TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

G. CAGNAC
E. RAMIS
J. COMMEAU

1

algèbre

MASSON & Cie

TRAITÉ
DE

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

1

Algèbre

TRAITÉ

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

G. CAGNAC

Inspecteur général de l'Instruction Publique.

E. RAMIS

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

J. COMMEAU

Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Kléber, à Strasbourg.

1

Algèbre

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1er cycle)

MASSON et Cie ÉDITEURS

1970

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés même photographiques, réservés pour tous pays.

© *1970, by Masson et Cie, Éditeurs Paris.*
(Printed in France.)

AVERTISSEMENT

DEPUIS que les programmes du 27 juin 1956 ont renouvelé l'enseignement des classes préparatoires aux Écoles Scientifiques, *cet enseignement s'est progressivement rapproché de celui qui est donné dans* le premier cycle des Facultés, *et cette évolution s'est concrétisée dans* les programmes du 21 janvier 1963 et du 25 mars 1964.

De son côté, l'enseignement des Facultés *a lui-même évolué, l'adoption des* programmes du 30 juin 1966 *répartissant sur deux ans l'enseignement du premier cycle de l'Enseignement Supérieur; entre les deux années, il existe une ventilation analogue à celle des programmes de première année et de seconde année des classes préparatoires.*

Cette volonté d'harmonisation s'est concrétisée enfin dans l'Arrêté du 11 juillet 1966 relatif aux titres admis en équivalence du D. U. E. S. en vue de l'inscription dans le second cycle de l'Enseignement Supérieur.

Nous avons voulu en particulier que les étudiants des classes préparatoires puissent trouver dans notre ouvrage les quelques compléments qui leur permettront de se présenter aux examens du premier cycle des Facultés.

Ces compléments ne seront pas inutiles aux étudiants des classes préparatoires qui auront acquis le D. U. E. S. par équivalence : ils trouveront dans l'ouvrage qui leur aura servi au cours de leur préparation l'exposé de quelques questions qui, n'étant pas reprises dans l'enseignement du second cycle des Facultés, leur seront utiles pour la poursuite de leurs études.

Nous avons été ainsi amenés à compléter notre exposé par l'introduction :
1° de notions que la pratique des récents concours rend nécessaires dans les classes préparatoires;
2° de questions propres au nouveau programme M. P. du premier cycle de l'Enseignement Supérieur. Nous en avons profité pour améliorer la rédaction sur un certain nombre de points.

Les Écoles qui ont choisi le programme B *ont souhaité que leurs candidats aient une première année de préparation sur le programme A 1. Suivant les circonstances, les professeurs de Mathématiques Supérieures pourront développer plus ou moins ce programme, l'essentiel étant qu'à la fin de la première année, l'étudiant soit parvenu à une bonne assimilation des notions de base, sans laquelle aucun effort ne serait fructueux par la suite.*

Les programmes B2 *sont assez voisins, au moins dans leur lettre, de certaines parties des programmes A2 pour que notre traité puisse aussi convenir aux étudiants qui suivent les programmes B des classes préparatoires, et même le programme P. C. du premier cycle des Facultés.*

Afin que notre ouvrage puisse être adapté aux exigences des divers programmes, nous avons été amenés

1) *à prévoir des paragraphes destinés exclusivement aux étudiants de première année; dans le présent tome I le chapitre IV et le chapitre IX sont réservés à une initiation aux espaces vectoriels et à l'algèbre linéaire traitée d'un point de vue élémentaire (il va de soi que l'étude de ces deux chapitres ne s'adresse pas aux étudiants qui auraient déjà reçu une telle initiation);*

2) *à mettre en caractères fins, non seulement des exercices d'application ou des exemples numériques, mais aussi des questions théoriques constituant des compléments pour les étudiants de seconde année;*

3) *à indiquer par des astérisques des questions qui, bien que manifestement hors des programmes, sont susceptibles d'intéresser de futurs mathématiciens.*

Nous avons réparti l'enseignement des diverses questions du programme en quatre tomes. Sachant les nombreuses façons dont peut s'organiser un cours de mathématiques, nous avons voulu respecter au maximum le choix des maîtres, et nous avons groupé dans chacun des tomes un ensemble cohérent auquel le lecteur pourra se reporter sans hésitation s'il a besoin d'un renseignement, d'une référence, d'une formule.

Nous n'avons pas hésité à faire des renvois d'un tome à l'autre, car nous sommes persuadés qu'au moins en première année, on aura intérêt à traiter les parties les plus simples de chacun des tomes avant l'étude complète de l'un d'entre eux.

Le tome I (Algèbre) *comprend essentiellement l'étude des structures algébriques, du corps des rationnels et du corps des complexes, des polynômes, fractions rationnelles et équations algébriques, enfin de l'algèbre linéaire. La fin du cours d'Algèbre (formes quadratiques, hermitiennes,...) a été reportée au début du tome III.*

Le tome II (Analyse) *contient d'une part l'étude des fonctions réelles ou complexes d'une ou de plusieurs variables réelles, d'autre part celle de la partie théorique du programme de calcul différentiel et intégral. Un premier chapitre est consacré à une introduction du corps des réels; un dernier chapitre rassemble ce que les élèves ont à savoir sur les calculs numériques en vue des travaux pratiques.*

Deux appendices, conformes au programme MP des Facultés, contiennent l'un, des notions de Topologie, l'autre une initiation aux fonctions holomorphes.

Le tome III (Géométrie) *comprend deux parties. L'une est consacrée à des compléments d'Algèbre qui forment une suite naturelle du tome I, et à une introduction axiomatique de la Géométrie; l'autre, plus pratique, étudie les diverses générations et les représentations analytiques usuelles des courbes et des surfaces élémentaires.*

Le tome IV (Applications de l'Analyse à la Géométrie) *contient la géométrie différentielle, les intégrales multiples, les calculs de longueurs, aires, volumes, etc., l'analyse vectorielle et les applications géométriques des équations différentielles.*

***

Nous avons numéroté les paragraphes tome par tome; les renvois sont indiqués par référence au tome (en chiffres romains) et au paragraphe (en chiffres arabes); ceux d'entre eux qui ne sont pas précédés d'un chiffre romain sont relatifs au tome étudié.

Chaque paragraphe est divisé en sous-paragraphes par des numéros 1°, 2°, 3°...; chaque sous-paragraphe est divisé, le cas échéant, en alinéas par des lettres a), b), c),.... *Nous espérons ainsi rendre service aux élèves en marquant bien la séparation des diverses idées.*

Les formules encadrées dans le texte sont d'un usage courant; il est indispensable, sinon de les savoir par cœur, du moins de pouvoir les retrouver très rapidement.

***

MM. MASSON ET Cie, *ainsi que leurs collaborateurs, ont consenti pour la refonte de notre ouvrage et son adaptation aux nouveaux programmes un effort dont nous sentons tout le prix; nous sommes heureux de les en remercier particulièrement.*

LES AUTEURS.

N.-B. — *Nous avons représenté les ensembles fondamentaux des naturels, entiers, rationnels, réels, complexes, par les lettres*

N, Z, Q, R, C.

Pour éviter des confusions, en particulier si un texte appelle les lettres précédentes à recevoir une autre signification, on pourra représenter les ensembles fondamentaux par les symboles

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS GÉNÉRALES

I. NOTIONS DE LOGIQUE

1. ***Termes primitifs.*** — La science mathématique utilise des mots du langage ordinaire; elle utilise aussi des mots spécialement adaptés à la fin qu'elle poursuit.

Le mathématicien a l'honnêteté de reconnaître qu'il existe des mots sur le sens desquels il accepte l'opinion commune, telle qu'elle s'est fixée par la tradition de nos ancêtres. Ces mots — ou termes primitifs — sont ceux que l'on présente sans définition.

L'énoncé d'une définition suppose l'acquisition préalable de termes antérieurement définis, c'est-à-dire, en fin de compte, l'acquisition par l'éducation, l'observation ou la coutume d'un certain nombre de *termes primitifs.*

C'est ainsi que nous ne pouvons définir les mots : *élément, collection, propriété,* mais nous pouvons préciser leur emploi à l'aide de la proposition suivante :

des *éléments* constituent une *collection* en vertu d'une *propriété* qui leur est commune.

Les premières théories qui se présentent en Mathématiques concernent chacune l'étude d'une certaine collection appelée *référentiel* de chaque théorie. Les éléments de ce référentiel sont dits *de même nature* et on convient de leur donner un même nom.

Les proprlétés des éléments du référentiel donnent lieu à des *énoncés.*

Une *assertion* est un énoncé susceptible de recevoir soit l'une, soit l'autre des deux valeurs logiques : *vrai, faux.*

Une *proposition* est un énoncé qui pourra être vrai ou faux suivant la théorie au sein de laquelle on le considère ou suivant la façon dont on a choisi les éléments donnés par hypothèse, mais dont nous pourrons dire, dans une situation donnée, si cet énoncé est vrai ou faux.

1° Parmi les énoncés d'une théorie on distingue :

a) les *axiomes* que l'on ne peut démontrer pour la simple raison qu'ils se présentent les premiers; les axiomes sont des propositions vraies par convention;

b) les *théorèmes* que l'on obtient à partir d'énoncés préalablement connus, axiomes ou théorèmes déjà démontrés, en utilisant les seules règles de la logique, au moyen d'une démonstration.

2. *Implication. Équivalence logique.* — 1° Une *implication* est une relation entre deux propositions (ou entre deux ensembles de propositions) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, qui a la signification suivante : si $\mathcal{A}$ est vraie, il en est de même pour $\mathcal{B}$.

On note : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$; on énonce : $\mathcal{A}$ *entraîne* $\mathcal{B}$.

L'énoncé en langage ordinaire d'une implication constitue un théorème; $\mathcal{A}$ est l'hypothèse, $\mathcal{B}$ est la conclusion; on peut aussi énoncer :

pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il *faut* que $\mathcal{B}$ soit vraie;
pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il *suffit* que $\mathcal{A}$ soit vraie.

La nécessité porte sur la conclusion ($\mathcal{B}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$); la suffisance porte sur l'hypothèse ($\mathcal{A}$ est une condition suffisante de $\mathcal{B}$).

L'implication est *transitive*, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant trois relations, les hypothèses $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$ entraînent $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}$.

C'est la transitivité de l'implication qui assure le raisonnement déductif (1).

2° L'implication n'est pas en général symétrique, c'est-à-dire que si l'on a : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$, l'on n'a pas nécessairement l'implication *réciproque* : $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$.

Toutefois, lorsqu'une implication est *symétrique*, c'est-à-dire lorsqu'on a simultanément les deux implications réciproques

$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}.$$

on lui donne le nom d'*équivalence logique*;

on note : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$; on énonce : $\mathcal{A}$ *est équivalente* à $\mathcal{B}$.

---

(1) Nous adoptons un point de vue différent de celui de la logique formelle pour laquelle à tout couple de propositions A, B on peut associer quatre propositions qui se notent

« $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Longrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$ »

et qui se lisent

« A et B, A ou B, A implique B, A équivalent à B ».

Leurs « valeurs logiques » se déduisent des valeurs logiques attribuées aux propositions A et B par la table suivante dans laquelle $\mathcal{V}$ se lit « vrai » et $\mathcal{F}$ se lit « faux ».

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

On peut aussi énoncer :

pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, *il faut et il suffit* que $\mathcal{B}$ soit vraie,
$\mathcal{A}$ est vraie *si, et seulement si,* $\mathcal{B}$ est vraie.

L'adjectif « logique » sert à distinguer cet emploi du mot « équivalence » de l'emploi qui en sera fait ultérieurement (n° 13) sous le nom de « relation d'équivalence ».

3° Pour démontrer l'équivalence logique de trois propositions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}, \qquad \mathcal{B} \iff \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \iff \mathcal{A},$$

il suffit de montrer que :

$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}, \qquad \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{A}.$$

4° Le symbole $\iff$ s'utilise aussi dans le cas d'une définition, c'est-à-dire d'une *équivalence linguistique* (ou *verbale*).

Par exemple,

$$\left.\begin{array}{l}\text{M est un point}\\ \text{du cercle C(O, R)}\end{array}\right\} \iff \text{OM} = \text{R}.$$

Si l'on veut éviter toute ambiguïté avec l'équivalence logique, on pourra noter l'équivalence verbale sous la forme

$$\overset{\text{déf.}}{\iff}$$

3. ***Propositions contradictoires.*** — Deux propositions $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ sont dites contradictoires si elles possèdent les deux propriétés suivantes :

1° $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ ne sont pas vraies simultanément

2° ou bien $\mathcal{A}$ est vraie, ou bien $\overline{\mathcal{A}}$ est vraie.

Par exemple, si x et a sont deux nombres réels,

la contradictoire de $x = a$ est $x \neq a$,
la contradictoire de $x < a$ est $x \geqslant a$.

Considérons les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et leurs contradictoires $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{B}}$, et supposons que l'on ait l'implication $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Supposons maintenant, en outre, que $\overline{\mathcal{B}}$ soit vérifiée : si $\mathcal{A}$ était vérifiée, $\mathcal{B}$ le serait aussi, ce qui est absurde puisque $\overline{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{B}$ sont exclusives l'une de l'autre. Puisque $\mathcal{A}$ n'est pas vérifiée, c'est que $\overline{\mathcal{A}}$ l'est, autrement dit $\overline{\mathcal{B}}$ entraîne $\overline{\mathcal{A}}$.

En résumé $\quad (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}})$.

En modifiant la notation, nous obtenons

$$(\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}).$$

En résumé $\quad (\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \iff (\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{A}})$.

Toute implication est équivalente logiquement à l'implication de sens

contraire entre les contradictoires des deux membres de l'implication donnée.

Lorsque l'hypothèse et la conclusion d'un théorème admettent des contradictoires, on appelle théorème contraire celui qui admet respectivement pour hypothèse et pour conclusion les contradictoires :

$$\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{A}} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{B}}$$

sont deux théorèmes contraires.

L'équivalence logique

$$(\overline{\mathfrak{A}} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{B}}) \Longleftrightarrow (\mathfrak{B} \Longrightarrow \mathfrak{A})$$

montre que, dans les conditions précédentes, l'existence du théorème contraire d'un théorème donné est équivalente logiquement à l'existence du théorème réciproque.

4. ***Les quantificateurs.*** — Supposons qu'une proposition $\mathfrak{R}$ — vérifiée ou non — soit attachée à tout élément d'un ensemble E.

Si, pour toute valeur de la variable x de E, la proposition $\mathfrak{R}$ est vérifiée, on écrira, abréviativement,

$$\forall x, \qquad \mathfrak{R} \text{ vraie.}$$

S'il existe au moins une valeur de la variable telle que la proposition $\mathfrak{R}$ soit vérifiée, on écrira, abréviativement,

$$\exists x, \qquad \mathfrak{R} \text{ vraie.}$$

Les symboles ainsi introduits s'appellent : le premier, $\forall$, *quantificateur universel*; le second, $\exists$, *quantificateur existentiel.*

Négation d'une proposition. — Pour nier une proposition, — par exemple nier une qualité d'un objet, une propriété d'un être mathématique, on peut remplacer $\forall$ par $\exists$, et inversement, et remplacer l'ancienne affirmation par sa négation.

C'est ainsi que

$$\forall x, \ \mathfrak{R} \text{ vraie} \qquad \text{et} \qquad \exists x, \ \mathfrak{R} \text{ non vraie}$$

sont deux propositions contradictoires.

5. — ***Sur l'emploi des conjonctions*** et ***et*** ou. — Les conjonctions « *et* » et « *ou* » sont deux conjonctions de coordination, c'est-à-dire qui unissent dans une même phrase, des expressions du langage ordinaire.

« *Et* » a un sens *cumulatif*, c'est-à-dire que les deux expressions que sépare cette conjonction doivent être pensées simultanément; par exemple : « les élèves apporteront un compas et une règle ».

En Mathématiques, comme en logique formelle, « et » note ce qu'on appelle la *conjonction* de deux propositions; « P et Q » est l'affirmation du fait que P et Q sont vraies simultanément.

« *Ou* » possède, dans le langage ordinaire, deux sens différents :

a) un sens *alternatif*, c'est-à-dire que des deux expressions qu'il sépare, l'une doit être pensée à l'exclusion de l'autre; par exemple : « les élèves choisiront comme première langue l'anglais ou l'allemand »;

b) un sens (auquel les grammairiens ne donnent pas de nom) d'après lequel des deux expressions qu'il sépare, au moins l'une des deux doit être pensée, mais éventuellement les deux expressions peuvent être pensées simultanément; par exemple : « les élèves apporteront des cahiers quadrillés ou réglés ».

En Mathématiques, comme en logique formelle, « ou » est toujours utilisé dans le second des deux sens précédents, et on l'appelle *disjonctif*; « ou » note ce qu'on appelle la *disjonction* de deux propositions; « P ou Q » est l'affirmation du fait que l'une au moins des propositions P, Q est vérifiée. « P ou Q » signifie la vérité de l'une des éventualités suivantes : 1° P est vraie (Q n'est pas vraie); 2° Q est vraie (P n'est pas vraie); 3° P et Q sont vraies. La seule éventualité exclue est que P et Q soient fausses simultanément (1).

Pour exprimer l'alternative exclusive, on emploiera, en Mathématiques, l'une des expressions « soit..., soit... », « ou bien..., ou bien... ». On aura intérêt à préciser, le cas échéant, que les hypothèses sont — ou ne sont pas — exclusives l'une de l'autre et à distinguer « soit A, soit B, mais non les deux » et « A ou B, ou peut-être les deux ».

6. *Égalité.* — Si, au cours de l'étude d'une théorie dont E est le référentiel, on est amené à représenter un élément déterminé de E par deux symboles graphiques différents, par exemple par deux lettres a et b, on peut noter :

$$a = b.$$

L'écriture précédente devrait se lire en énonçant ce qu'elle exprime « *a désigne le même élément que b* ». Par abus de langage on convient de dire : *a est égal à b*, ou : *a coïncide avec b*, ou : *a et b sont confondus.*

Dans le cas contraire on dit que *a et b sont distincts*, et on note : $a \neq b$.

On observera que l'adjectif « même » utilisé ci-dessus a, pour le mathématicien, un sens plus restrictif que dans le langage courant; par exemple, dire « Madame X a la même robe que Madame Y » signifie évidemment qu'elles ont chacune une robe, mais qu'elles ont fait choix, l'une et l'autre, du même modèle mis en vente au cours de la saison.

II. ENSEMBLES

7. *La notion d'ensemble.* — La notion d'ensemble doit être considérée comme intuitive. Historiquement elle s'est dégagée de la notion de collection : au début on a admis que n'importe quelle collection pouvait être considérée comme un ensemble; on a ensuite constaté qu'en considérant comme des ensembles certaines collections trop vastes, par exemple celle qui est formée par tous les ensembles, on était conduit à des contradictions.

1° La notion d'ensemble ne pouvant être définie, nous admettrons l'énoncé suivant :

Un ensemble est composé d'éléments; on dit que ceux-ci appartiennent à l'ensemble.

---

(1) C'est parce que le langage usuel ne permet pas toujours de distinguer nettement les sens alternatif et disjonctif de la conjonction « *ou* » qu'il existe tant de procès relatifs à l'interprétation de textes administratifs ou contractuels dans lesquels l'emploi de « *ou* » a été fait à la légère.

Nous considérerons un ensemble comme connu quand nous connaîtrons ses éléments, c'est-à-dire quand nous pourrons dire d'un objet donné s'il appartient ou non à l'ensemble. Nous conviendrons que nous pouvons distinguer entre eux deux éléments quelconques d'un ensemble.

Si l'élément a appartient à l'ensemble A, nous noterons $a \in A$; dans le cas contraire, nous noterons $a \notin A$.

Soit A un ensemble; un élément quelconque de A peut être désigné par un *nom général*, soit x; on dit que x est la *variable* de A, et que A est le *domaine de variation* (ou champ de variation) de x; on dit encore que x est l'*élément générique* de A, ou que x *décrit* (ou parcourt) A.

Un élément déterminé de A est désigné par un nom particulier, soit a ou x_0; on dit encore que cet élément est une *valeur particulière* de la variable ou encore une valeur donnée — ou attribuée — à la variable x.

3° **Égalité.** — Il résulte de la définition de l'égalité (n° 6) que *deux ensembles sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments.* Autrement dit la démonstration de l'égalité des deux ensembles A et B exige celle des deux implications

$$x \in A \Longrightarrow x \in B \quad \text{et} \quad x \in B \Longrightarrow x \in A.$$

4° **Inclusion.** — DÉFINITION. — **Si deux ensembles A et B sont tels que tout élément de A est un élément de B, on dit que A est inclus dans B et on écrit** $A \subset B$ (ou $B \supset A$).

Autrement dit :

(1) $\qquad A \subset B$ signifie : $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

On dit aussi que A *est contenu dans* B ou que B *contient* A; on dit encore que A *est une partie* (ou un *sous-ensemble*) de B.

Si l'on a à la fois $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est que tout élément qui appartient à A appartient aussi à B, et inversement; c'est donc (3°) que les ensembles A et B sont égaux.

REMARQUE I. — La relation (1) est dite relation d'inclusion. Elle est transitive, ce qui signifie que si A, B, C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, on a $A \subset C$.

REMARQUE II. — Parmi les parties de B, au sens de la définition précédente, figure B. Autrement dit, la relation d'inclusion (1) soit être comprise au sens large (avec égalité possible).

Dans l'étude de certaines questions il pourra cependant être utile de distinguer l'inclusion au sens large et l'inclusion au sens strict (qui implique l'inégalité); la première s'écrira alors $A \subseteq B$.

8. ***Axiomes fondamentaux.*** — Nous allons maintenant énoncer sous forme d'axiomes, une sorte de « règle du jeu ». Ces axiomes (dont nous ne chercherons pas à savoir s'ils sont non contradictoires) sont destinés :

a) à introduire (au 1°) des ensembles élémentaires;

b) à permettre la construction d'ensembles nouveaux à partir de ces ensembles élémentaires.

1° **Ensembles élémentaires.** — I. A tout être mathématique, a, nous convenons que l'on peut associer un ensemble

$$A = \{ a \}.$$

Un même symbole ne peut jamais désigner un ensemble, et un élément de cet ensemble : conventionnellement, un même être mathématique ne peut, à la fois, être un ensemble et un élément de cet ensemble.

II. — Au n° 24, nous introduirons l'ensemble des entiers naturels. A partir de cet ensemble nous construirons les ensembles des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes.

2° **Axiomes constructifs.** — I. **Les objets qui sont éléments d'au moins l'un des deux ensembles donnés** A **et** B **constituent un ensemble** R **qui est dit réunion de** A **et** B.

On note $R = A \cup B$ (oralement, on énonce : A union B).

En d'autres termes :

$$x \in A \cup B \iff \begin{cases} \text{soit} & x \in A, & x \notin B \\ \text{soit} & x \in B, & x \notin A \\ \text{soit} & x \in A, & x \in B \end{cases}$$

Remarquons la commutativité : $A \cup B = B \cup A$.

La réunion des ensembles $\{ a \}$ et $\{ b \}$ peut se noter $\{ a, b \}$.

II. **Les éléments d'un ensemble** E **qui vérifient une condition imposée** P **constituent un ensemble** E′ (qui est, naturellement, une partie de E, au sens du n° 7, 4°).

On notera : $E' = \{ x; x \in E, x \text{ possède P} \}$.

III. **Les parties d'un ensemble donné** E **constituent un nouvel ensemble qui est dit ensemble des parties de** E; **on le note** $\mathfrak{P}$ (E).

IV. **Étant donnés deux ensembles** A **et** B **dans un ordre donné, les couples** (x, y) **tels que** $x \in A$ **et** $y \in B$ **constituent un ensemble** P **qui est dit produit cartésien de** A **par** B.

On dit que x et y sont respectivement la première et la seconde composante (ou coordonnée) du couple (x, y).

On note $P = A \times B$ (on énonce A croix B). Lorsqu'il n'en résulte pas de confusion, on peut supprimer l'adjectif « cartésien ».

Si $A = B$, on note A^2 au lieu de $A \times A$.

Plus généralement, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles, dans un ordre donné.

On désigne par $E_1 \times E_2 \times E_3$ l'ensemble produit $(E_1 \times E_2) \times E_3$, etc..., par $E_1 \times \ldots \times E_{n-1} \times E_n$ l'ensemble produit $(E_1 \times \ldots \times E_{n-1}) \times E_n$.

Le nouvel ensemble a pour élément générique le système rangé :

$$(x_1, \ldots, x_n) \qquad x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$$

auquel nous donnerons le nom de *n-uple* (pour $n = 2, 3, 4$ nous parlerons aussi de *doublet*, *triplet*, *quadruplet*).

3° **Conséquences des axiomes.** — *a) Intersection.* — Les éléments communs à deux ensembles donnés A et B peuvent être considérés comme les éléments x de A qui vérifient la condition $x \in B$. Ils constituent donc (axiome II) un ensemble I.

Nous énoncerons :

DÉFINITION. — **On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble I formé par les éléments communs à A et B.**

On note $I = A \cap B$ (oralement, on énonce : A inter B)

En d'autres termes :

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B).$$

Remarquons la commutativité : $A \cap B = B \cap A$.

REMARQUE. — $A \cap B$ contient tout sous-ensemble commun à A et B, on dit qu'il est le plus grand sous-ensemble commun à A et B.

Lorsque A et B sont des parties d'un ensemble E, on dit de même que $A \cup B$ est la plus petite partie de E dont A et B soient simultanément des sous-ensembles, c'est-à-dire la partie de E incluse dans toute partie de E contenant simultanément A et B.

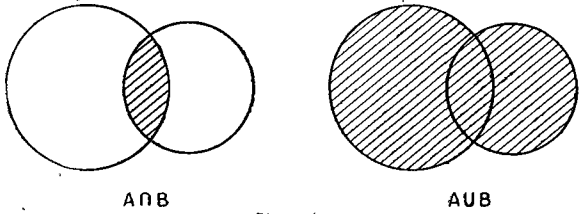


FIG. 1.

EXEMPLE. — Soit E un plan ; A l'ensemble des points situés sur le cercle O_1, ou intérieurs à ce cercle ; B l'ensemble des points situés sur le cercle O_2 ou intérieurs à ce cercle. En supposant les cercles O_1 et O_2 sécants, la figure 1 représente les ensembles I et R.

b) Différence. Complémentaire. — Étant donnés deux ensembles A et B les éléments x de A qui vérifient la condition $x \notin B$ constituent (axiome II) un ensemble, partie de A, qui est appelée différence de A et B. On la note $A - B$.

En particulier, si B est un sous-ensemble de A, la différence $A - B$ est appelée complémentaire de B par rapport à A. On note alors

$$A - B = \complement_A B.$$

c) Partie vide. Ensemble vide. — Si aucun élément d'un ensemble E ne vérifie une condition imposée $\mathcal{C}$, on dit alors que l'ensemble des éléments de E vérifiant $\mathcal{C}$ (cf. axiome II) est *la partie vide* de E.

Il est commode de considérer que les parties vides de tous les ensembles sont confondues avec un ensemble appelé *l'ensemble vide*, et désigné par la notation $\varnothing$; nous conviendrons que l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble : quel que soit E, $\varnothing \subset E$.

Si A et B sont deux ensembles qui n'ont aucun élément commun, on peut écrire

$$A \cap B = \varnothing;$$

on dit alors que A et B sont *disjoints*.

9. ***Propriétés de la réunion et de l'intersection.*** — Anticipant sur le n° 22 nous considérons ici $\cup$ et $\cap$ comme des *lois internes* sur l'ensemble $\mathfrak{P}$ (E) des parties d'un ensemble donné E.

1° **Commutativité.** — Elle a déjà été mise en évidence.

2° **Associativité de la loi $\cup$.** — Les ensembles

$$(A \cup B) \cup C$$

et

$$A \cup (B \cup C)$$

coïncident pour être formés, l'un et l'autre, des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A, B, C. L'ensemble obtenu de l'une ou l'autre façon se note

$$A \cup B \cup C \text{ (fig. 2).}$$

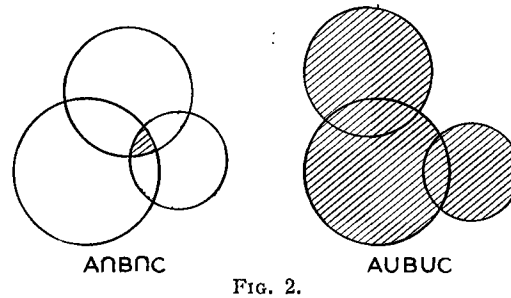


FIG. 2.

La réunion des ensembles $\{ a \}, \{ b \}, \ldots, \{ l \}$ peut se noter $\{ a, b, \ldots, l \}$.

3° **Associativité de la loi $\cap$.** — Les ensembles

$$(A \cap B) \cap C \quad \text{et} \quad A \cap (B \cap C)$$

coïncident pour être formés, l'un et l'autre, des éléments qui appartiennent simultanément à A, B, C. L'ensemble obtenu de l'une ou l'autre façon se note $A \cap B \cap C$ (fig. 2).

4° **Distributivité de la loi $\cap$ par rapport à la loi $\cup$.** — Étant donnée la commutativité de la loi $\cap$, il suffit de démontrer l'égalité des ensembles

$$U = A \cap (B \cup C) \quad \text{et} \quad V = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Un élément x de U appartient à A et à l'un au moins des ensembles B ou C ; il

appartient donc à l'un au moins des ensembles $A \cap B$ ou $A \cap C$, par suite x appartient à V.

Inversement, un élément y de V appartient à l'un au moins des ensembles $A \cap B$ ou $A \cap C$; il appartient donc à A et à au moins l'un des ensembles B ou C c'est-à-dire à A et à $B \cup C$; par suite y appartient à U.

5° **Distributivité de la loi $\cup$ par rapport à la loi $\cap$.** — Étant donnée la commutativité de la loi $\cup$, il suffit de démontrer l'égalité des ensembles

$$U' = A \cup (B \cap C) \qquad \text{et} \qquad V' = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Un élément x de U' appartient à l'un au moins des ensembles A ou $B \cap C$; si x appartient à A, il appartient à $A \cup B$ et à $A \cup C$ donc à V'; si x appartient à $B \cap C$ (sans appartenir à A), il appartient à B et à C, et par suite à $A \cup B$ et $A \cup C$, et finalement x appartient encore à V'.

Inversement, un élément y de V' appartient à $A \cup B$ et $A \cup C$; si y appartient à A, il appartient à U'; si y n'appartient pas à A, y appartient alors à B et à C, donc à $B \cap C$, donc à U'.

6° **Passage aux complémentaires.** — Tous les complémentaires étant pris par rapport à E on a :

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \qquad \text{et} \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces deux propositions et d'en déduire qu'à toute formule comportant les signes $\cup$, $\cap$, $\complement$ correspond une nouvelle formule obtenue à partir de la première par échange des signes $\cup$ et $\cap$, et remplacement des ensembles par leur complémentaire. C'est ainsi que le distributé de la loi $\cup$ par rapport à la loi $\cap$ aurait pu se déduire de celle de la loi $\cap$ par rapport à la loi $\cup$.

10. ***Recouvrement. Partition.*** — 1° **Famille indexée d'ensembles.** — Supposons qu'il existe d'une part un ensemble, I, d'autre part une famille $\mathscr{F}$ d'êtres mathématiques telle qu'à chaque élément i de I correspond biunivoquement un être mathématique de $\mathscr{F}$, que nous pouvons noter x_i. Nous dirons alors que $\mathscr{F}$ est une famille d'êtres mathématiques indexée par I et que I est l'ensemble des indices de la famille $\mathscr{F}$; nous noterons $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$. Si les x_i sont des éléments d'un ensemble X, $\mathscr{F}$ est dite famille d'éléments de X.

Étudions maintenant le cas d'une famille $\mathscr{F} = (E_i)_{i \in I}$ dans laquelle les E_i sont des ensembles.

Nous renforcerons l'axiome I du n° 8, 2° par la convention suivante : *les éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles E_i d'une famille $\mathscr{F}$, indexée par* I, *constituent un ensemble qui est dit réunion des E_i et noté*

$$\bigcup_{i \in I} E_i.$$

En nous plaçant dans cet ensemble, nous déduisons de l'axiome II du

n° 8, 2° que *les éléments communs à tous les ensembles* E_i *d'une famille* $\mathfrak{F}$, *indexée par* I, *constituent un ensemble qui est dit intersection des* E_i *et noté*

$$\bigcap_{i \in I} E_i.$$

2° DÉFINITION I. — *On dit que la famille indexée* $\mathfrak{F}$ *d'ensembles* E_i, $(i \in I)$, *constitue un recouvrement de l'ensemble* A *si* A *est une partie* (au sens large) *de la réunion des* E_i.

EXEMPLE. — Soit I l'ensemble des rationnels positifs i; ε désignant un réel donné, soit E_i l'ensemble des réels compris entre $i - \varepsilon$ et $i + \varepsilon$. Les E_i constituent un recouvrement de l'ensemble des réels positifs.

3° DÉFINITION II. — *On dit que la famille indexée* $\mathfrak{F}$ *d'ensembles* E_i, $(i \in I)$, *constitue une partition de l'ensemble* A *si* A *est la réunion des* E_i *et si ceux-ci sont non vides, deux à deux disjoints :*

$$A = \bigcup_{i \in I} E_i; \qquad E_i \neq \emptyset; \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \qquad (i \neq j).$$

III. RELATIONS BINAIRES

11. ***Relation. Correspondance.*** — Si on joint par un verbe (ou une expression verbale) un *sujet* (qui appartient à un ensemble A) et une *image* (qui appartient à un ensemble B), on constitue une *relation* entre le sujet et l'image. Le mot image remplace ici le mot complément, usuel en Grammaire, car le mot complément a un autre sens en Mathématiques.

Une telle relation joignant deux éléments s'appelle *relation binaire*. Voici le schéma d'une relation binaire :

sujet	verbe	image
$a \in A$		$b \in B$.

Si on désigne par $\mathcal{R}$ le verbe (ou la locution verbale) qui caractérise la relation binaire, celle-ci peut se représenter en abrégé par

$$a \mathcal{R} b. \tag{1}$$

On dit encore que (1) réalise une *correspondance* entre les variables x (de domaine A) et y (de domaine B).

Les éléments (a, b) de l'ensemble-produit $A \times B$ pour lesquels on peut écrire $a \mathcal{R} b$ forment une partie $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de $A \times B$; on dit que $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est le *graphe* de la relation binaire $\mathcal{R}$.

Les éléments (x, y) de $A \times B$ pour lesquels on ne peut pas écrire $x \mathcal{R} y$ (ce que l'on exprime par la notation $x \overline{\mathcal{R}} y$) forment le sous-ensemble de $A \times B$ complémentaire du précédent.

Réciproquement, si on définit un sous-ensemble $\mathfrak{D}$ du produit $A \times B$, pour exprimer que l'élément (a, b) de $A \times B$ appartient à $\mathfrak{D}$, on est conduit

à énoncer une condition entre a et b, c'est-à-dire à lier a et b par un verbe ou une relation verbale $\mathcal{R}$; on a donc défini une relation binaire entre a et b.

$$a \mathcal{R} b \iff (a, b) \in \mathcal{D}.$$

CONSÉQUENCE. — De la correspondance biunivoque que nous venons de mettre en évidence entre les parties de l'ensemble $A \times B$ et les relations binaires entre A et B il résulte que ces dernières constituent, elles aussi, un ensemble.

12. *Relation binaire dans un ensemble.* — Une relation binaire dont $\mathcal{R}$ désigne le lien verbal (on peut dire, en abrégé, la relation $\mathcal{R}$) peut emprunter son sujet a et son image b à un même ensemble E; on dit alors que $\mathcal{R}$ est une *relation dans* E.

Une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble E est dite :

1° *réflexive*, si elle vérifie :

$$(R) \quad \forall x, \quad x \mathcal{R} x.$$

Avec la notation du n° 11, une relation est réflexive si et seulement si son graphe admet pour sous-ensemble la *bissectrice* Δ de $E \times E$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments (x, x).

2° *symétrique*, si pour tout couple (x, y) tel que $x \mathcal{R} y$ est vraie, $y \mathcal{R} x$ est vraie, ce qui peut s'écrire abréviativement

$$(S) \qquad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x.$$

Nous constatons qu'une relation symétrique est une relation dont le graphe admet la bissectrice Δ de $E \times E$ pour *axe de symétrie*, étant entendu que cela n'implique rien quant à l'intersection du graphe et de Δ.

3° *antisymétrique*, si pour tout couple (x, y), $x \neq y$, tel que $x \mathcal{R} y$ est vraie, $y \mathcal{R} x$ n'est pas vraie. En d'autres termes, une relation antisymétrique est une relation dont le graphe ne contient aucun couple d'éléments distincts et symétriques par rapport à la bissectrice Δ de $E \times E$; là encore, cela n'implique rien quant à l'intersection de Δ et du graphe.

Puisqu'il est impossible qu'on ait simultanément $x \neq y$ et ($x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$) vraies, on peut encore exprimer l'antisymétrie par

$$(A) \qquad x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} x \implies x = y.$$

4° *transitive*, si elle vérifie

$$(T) \qquad x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$$

EXEMPLES. — I. — Si E est l'ensemble du genre humain, la relation « x est frère de y » est symétrique et transitive; elle n'est pas réflexive.
La relation « x est fils de y » est antisymétrique.

II. — Si E est l'ensemble des réels, la relation « $(x - y)^2 > 1$ » est symétrique, la relation « $(x - y)^2 < 1$ » est réflexive et symétrique.

13. *Relation d'équivalence.* — 1° DÉFINITION. — **Une relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble E est dite relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.**

Une relation d'équivalence est dite aussi parfois *relation de congruence*, pour éviter toute confusion avec la notion d'équivalence logique (cf. n° 2).

Si $x \mathcal{R} y$, on dit que x et y sont *équivalents* (ou *congrus*) *modulo* $\mathcal{R}$.

2° EXEMPLES. — I. — La relation d'égalité dans un ensemble (cf. n° 6) est une relation d'équivalence.

II. — On donne un entier $p \geqslant 2$. Dans l'ensemble Z (cf. n° 34), la relation « y a même reste que x dans la division par p » ou encore « il existe un entier relatif k tel que $y - x = kp$ » est une relation d'équivalence (cf. n° 39, 1°). On dit que x et y sont *congrus modulo p*.

3° **Classes d'équivalences.** — L'ensemble E étant muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, soit a un élément de E.

Les éléments de E qui sont équivalents à a (modulo $\mathcal{R}$) constituent (cf. axiome II, n° 8, 2°) un sous-ensemble de E qui est appelé *classe d'équivalence de a* (modulo $\mathcal{R}$) et que nous désignerons par $\mathcal{C}_a$.

$\mathcal{C}_a$ contient tous les éléments x de E tels que $x \mathcal{R} a$; en particulier $\mathcal{C}_a$ contient a à cause de la réflexivité.

Soit b équivalent à a (modulo $\mathcal{R}$), et soit $\mathcal{C}_b$ la classe d'équivalence de b (modulo $\mathcal{R}$). $\mathcal{C}_b$ contient a (à cause de la symétrie) et, plus généralement tout autre élément de $\mathcal{C}_a$ (à cause de la transitivité). $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ sont alors confondues : *deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.*

Soit b un élément de E non équivalent à a : les classes d'équivalence $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ de a et b, considérées comme parties de E, n'ont pas d'élément commun : car si elles en avaient un, soit c, on aurait $a \mathcal{R} c$, $c \mathcal{R} b$, et par suite $a \mathcal{R} b$, ce qui n'est pas. Par suite *deux classes distinctes d'équivalence* (modulo $\mathcal{R}$) *n'ont aucun élément commun.*

Tout élément de E appartient à une classe et à une seule.

La donnée d'une relation d'équivalence dans un ensemble E réalise dans cet ensemble une partition (n° 10). Inversement, la donnée d'une partition dans un ensemble E revient à la donnée d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en considérant comme équivalents (modulo $\mathcal{R}$) deux éléments qui appartiennent à l'un des sous-ensembles disjoints dont la réunion reconstitue E.

4° **Ensemble-quotient.** — Les classes d'équivalence de E (modulo $\mathcal{R}$) peuvent être considérées comme des éléments particuliers de l'ensemble $\mathfrak{P}$ (E) des parties de E; ces classes constituent donc (cf. axiome II, n° 8, 2°) un ensemble, partie de $\mathfrak{P}$ (E), que l'on appelle *ensemble-quotient de* E *par* $\mathcal{R}$; on le note

$$\frac{E}{\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad E/\mathcal{R}.$$

EXEMPLE I. — Soit $E = R \times R$, ensemble de tous les couples rangés $M(x, y)$ de nombres réels.

Posons

$$M \mathcal{D} M' \quad \text{si} \quad x = x';$$

une classe d'équivalence est l'ensemble de tous les points de même abscisse; géométriquement, une classe d'équivalence est représentée par une droite parallèle à l'axe des ordonnées; l'ensemble quotient est l'ensemble de toutes les parallèles à cet axe.

EXEMPLE II. — Dans l'ensemble E des droites d'un espace affine, convenons que « $D \| D'$ » signifie que D et D' sont des droites parallèles (au sens large). Nous dotons ainsi E d'une relation binaire qui est

réflexive : $D // D$
symétrique : $D // D'$ entraîne $D' // D$
transitive : $D // D'$ et $D' // D''$ entraînent $D // D''$,

c'est donc une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les *directions de droite*, ou simplement, les directions

On définit de même les *directions de plan* comme classes d'équivalence formées par les plans parallèles entre eux.

EXEMPLE III. — Dans l'ensemble E des bipoints d'un espace affine $\mathcal{A}$, convenons que

$$(A, B) \mathcal{L} (A', B')$$

signifie que les bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents; $\mathcal{L}$ est une relation d'équivalence; les classes d'équivalence sont dites *vecteurs* de $\mathcal{A}$ (cf. n° 57).

On représente par $\overrightarrow{AB}$ le « vecteur » dont le bipoint (A, B) est appelé un *représentant*.

Dans l'ensemble E^* des bipoints non nuls de A, convenons que

$$(A, B) \mathcal{G} (A', B')$$

signifie que les bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents et ont le même support; $\mathcal{G}$ est une relation d'équivalence; les classes d'équivalence sont dites *vecteurs glissants* de $\mathcal{A}$.

EXEMPLE IV. — Dans l'ensemble R des nombres réels, la relation « il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k\pi$ » est une relation d'équivalence; on dit alors que x et y sont congrus modulo 2π. L'ensemble-quotient peut se noter $R/2\pi Z$. La mesure de l'angle orienté d'un couple de vecteurs (ou d'un couple de droites orientées) dans un plan orienté est un élément de cet ensemble-quotient.

De même la mesure de l'angle orienté d'un couple de droites dans un plan orienté est un élément de l'ensemble-quotient $R/\pi Z$ associé à la relation d'équivalence dans R : « il existe un entier relatif k tel que $x - y = k\pi$ ».

14. *Relation d'ordre.* — 1° DÉFINITION. — **Une relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.**

Une relation *réflexive* et *transitive* (mais non nécessairement antisymétrique) est dite *relation de préordre.*

2° **Ensemble ordonné.** — Un ensemble E où existe une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est dit *ordonné*; deux éléments a et b tels que $a \mathcal{R} b$ ou $b \mathcal{R} a$ sont dits *comparables.*

Si deux éléments quelconques de E sont comparables par $\mathcal{R}$, on dit que E est *totalement ordonné* par $\mathcal{R}$, ou que E possède une *structure d'ordre total.*

S'il existe dans E au moins un couple d'éléments non comparables, on dit que E est *partiellement ordonné* par $\mathcal{R}$, ou que $\mathcal{R}$ définit sur E un *ordre partiel.*

A défaut de symbole spécial, une relation d'ordre peut se noter par le symbole $\prec$; $x \prec y$ peut s'énoncer : « x minore y », ou aussi « y majore x ».

3° **Ordre strict.** — Dans certaines relations, on s'interdit d'utiliser des éléments confondus (ou égaux). On dit alors que dans un ensemble E existe une *relation d'ordre strict* s'il existe dans E une relation $\mathcal{R}$ qui soit transitive, antisymétrique, et ne soit vérifiée par aucun couple de la forme (x, x); en d'autres termes, il s'agit d'une relation $\mathcal{R}$ transitive et telle que si on a $x \mathcal{R} y$, on n'a pas $y \mathcal{R} x$.

Par opposition, une relation satisfaisant à la définition du 1° est dite *relation d'ordre large.* On notera cependant que lorsqu'on parlera de *relation d'ordre*, sans préciser, il faudra comprendre *relation d'ordre au sens large.* Certains auteurs se refusent d'ailleurs à utiliser la relation d'ordre au sens strict.

REMARQUE. — Les verbes *précéder* et *suivre*
les adjectifs *antérieur* et *postérieur*
les prépositions *avant* et *après*

sont utilisés dans le langage courant pour noter une relation d'ordre strict. On peut aussi les utiliser pour énoncer une relation d'ordre large en les accompagnant de la locution « au sens large ».

Certains auteurs les utilisent, sans plus, pour une relation d'ordre large en les accompagnant de la locution « au sens strict » quand cela est nécessaire.

4° EXEMPLE I. — Dans l'ensemble $\mathfrak{P}$ (E) des parties d'un ensemble E, la relation d'inclusion, (n° 7, 4°) est une relation d'ordre partiel, au sens large.

EXEMPLE II. — Si E désigne le genre humain, dire que

a est un ancêtre de b
(ou que b est un descendant de a)

définit dans E une relation d'ordre strict, qui est l'*ordre généalogique*; il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

EXEMPLE III. — Dans l'ensemble des entiers naturels, la relation de *divisibilité* est une relation d'ordre large.

En effet, on dit que b divise a s'il existe un entier naturel q tel que $a = bq$.

On constate alors

α) que a divise a

β) que $\left\{\begin{array}{l} a \text{ divise } b \\ b \text{ divise } a \end{array}\right\}$ entraîne : $a = b$

γ) que $\left\{\begin{array}{l} a \text{ divise } b \\ b \text{ divise } c \end{array}\right\}$ entraîne : a divise c.

Il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

EXEMPLE IV. — Dans chacun des trois exemples précédents, l'ensemble considéré n'était pas totalement ordonné.

Donnons maintenant des exemples d'ensembles totalement ordonnés.

α) L'historien attache une date à chacun des faits qu'il étudie, et il peut ordonner ces faits par l'*ordre chronologique*; l'ensemble des dates est totalement ordonné.

β) Les lettres de l'alphabet forment un ensemble totalement ordonné par l'ordre alphabétique; on dit aussi l'*ordre lexicographique* parce qu'il permet de trouver rapidement un mot dans un dictionnaire.

γ) Nous verrons que les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels sont totalement ordonnés par une relation d'ordre que nous appellerons inégalité.

5° Éléments remarquables d'un ensemble ordonné.

— Soit E un ensemble ordonné par la relation $\prec$; soit A une partie de E.

DÉFINITION. I. — **Si la partie A de l'ensemble ordonné E contient un élément a qui majore tout autre élément de A, on dit que a est le plus grand élément de A :**

$$\forall x \in A, \qquad x \prec a.$$

Un tel élément, s'il existe, est unique, car s'il existe un élément a' de A tel que

$$\forall x \in A, \qquad x \prec a',$$
$$a' \prec a \quad \text{et} \quad a \prec a' \implies a = a'.$$

Si l'ensemble A contient un élément b qui minore tout autre élément de A, on dit que b est le plus petit élément de A.

DÉFINITION II. — **On dit qu'une partie A de l'ensemble ordonné E admet pour majorant (resp. minorant) (1) l'élément m de E si m majore** (resp. **minore) tout élément de A.**

En d'autres termes,

$$\forall x \in A, \qquad x \prec m \qquad (\text{resp. } m \prec x).$$

L'élément m n'est pas nécessairement un élément de A.

On dit alors que A est une partie majorée (resp. minorée) de E.

DÉFINITION. III. — **Étant donnée une partie majorée** (resp. **minorée**), A, **de l'ensemble ordonné** E, **s'il existe un majorant μ** (resp. **un minorant μ') qui minore** (resp. **majore) tous les autres, on dit que μ** (resp. μ') **est borne supérieure** (resp. **borne inférieure) de A.**

On note $\mu = \sup A$, $\mu' = \inf A$.

Si A possède un plus grand élément, a, a est le plus petit des majorants de A dans E, et l'on peut écrire $a = \sup A$.

---

(1) On peut souvent condenser le langage et l'écriture, lorsqu'on a à envisager deux hypothèses contradictoires, en mettant entre parenthèses « resp. », abréviation de respectivement.

Si A possède un plus petit élément, b, b est le plus grand des minorants de A dans E, et l'on peut écrire $b = \inf A$.

EXEMPLE. — On appelle *treillis* un ensemble ordonné dans lequel toute partie formée de deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. C'est ainsi que l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble donné E, ordonné par la relation d'inclusion, est un treillis; en effet (cf. 8, 3°).

$$\sup \{ A, B \} = A \cup B; \qquad \inf \{ A, B \} = A \cap B.$$

La notion de treillis n'est utile que pour les ensembles partiellement ordonnés, car tout ensemble totalement ordonné est un treillis.

*REMARQUE. — La définition suivante, comme celle de treillis, n'est utile que pour les ensembles partiellement ordonnés.

Un élément a d'une partie A *de l'ensemble ordonné* E *est dit élément maximal* (resp. *minimal*) *de* A, *si le seul élément x de* A *qui vérifie $a \prec x$* (resp. $x \prec a$) *est a lui-même.*

C'est ainsi que dans l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, ordonné par la relation de divisibilité, tous les nombres premiers sont des éléments minimaux.

Si A possède un plus grand élément, celui-ci est un élément maximal de A; l'exemple précédent montre que la réciproque est fausse pour un ensemble partiellement ordonné.

Au contraire si A est totalement ordonné, et possède un élément maximal a, a est le plus grand élément de A, puisque tous les éléments de A sont comparables à a.

Des remarques analogues peuvent être présentées en remplaçant, dans les deux alinéas précédents, grand et maximal par petit et minimal.

6° **Intervalles (ensembles totalement ordonnés).** Soit E un ensemble totalement ordonné par une relation notée $\prec$. Soit a et b deux éléments distincts de E ($a \prec b$).

I. On appelle *intervalle fermé* (ou *segment*) l'ensemble, noté $[a, b]$ des éléments x de E qui vérifient

$$a \prec x \prec b.$$

La borne a (resp. b) du segment $[a, b]$ est l'élément le plus petit (resp. le plus grand) de ce segment.

II. On appelle *intervalle ouvert* l'ensemble, noté $]a, b[$, des éléments x de E qui vérifient

$$a \prec x \prec b, \qquad x \neq a, \qquad x \neq b.$$

La borne a (resp. b) de l'intervalle ouvert $[a, b]$ est la borne inférieure (resp. supérieure) de cet intervalle.

III. L'ensemble des éléments x de E tels que

$$a \prec x \prec b, \qquad x \neq b \qquad \text{est noté } [a, b[,$$

l'ensemble des éléments x de E tels que

$$a \prec x \prec b, \qquad x \neq a \qquad \text{est noté }]a, b]$$

on dit que de tels ensembles sont des intervalles semi-ouverts à l'une des bornes.

IV. Soit a un élément d'un ensemble E totalement ordonné; s'il existe dans E un élément a' tel que $]a, a'[$ soit vide, on dit que a' est le *successeur* de a

(on montre aisément que si un tel élément existe, il est unique); on dit aussi que a est le *prédécesseur de* a'.

IV. APPLICATIONS. EQUATIONS

15. *Notion d'application.* — 1° DÉFINITION. — Soient A et B deux ensembles dont les variables respectives sont appelées x et y. **S'il existe un mode de correspondance associant à tout élément x de A un élément y déterminé, unique, de B, on dit qu'il existe une application de A dans B.**

On dit aussi qu'on a appliqué A dans B, que la correspondance envisagée est *univoque* de A *vers* B.

A s'appelle l'*ensemble de départ* (ou *ensemble objet*), B l'*ensemble d'arrivée* (ou *ensemble image*).

Le mot *application* désigne l'ensemble des procédés qui font correspondre à tout élément x de A un — et un seul — élément y de B. Si on désigne l'application par le symbole f, on dit que y *est l'image de* x *par* f; l'image de x par f se note $f(x)$, et on écrit

$x \multimap f(x)$ ou $x \longmapsto f(x)$ ou $x \rightsquigarrow f(x)$ ou encore $x \overset{f}{\multimap} y$.

On énonce : « x donne $f(x)$ » ou « à x correspond $f(x)$ ». On note aussi : « $f : A \longrightarrow B$ » ou « $A \overset{f}{\longrightarrow} B$ », aucune confusion n'étant à craindre alors avec la flèche qui indique une limite (tome II, 21 et 41).

On dit que deux applications f et g de A dans B sont *égales* si

$$\forall x \in A, \qquad f(x) = g(x).$$

Dans le langage courant, il peut arriver que $f(x)$ désigne non seulement l'élément de B qui est image de x par f, mais aussi l'application f elle-même.

2° **Image d'une partie.** — Soit f une application de A dans B.

Soit H une partie de A : l'ensemble des éléments $f(x)$ de B associés aux éléments x de H s'appelle l'*ensemble image de* H *par* f, et se note $f(H)$.

L'image $f(A)$ de A, ensemble des éléments de B associés par f aux éléments de A est une partie de B.

3° **Autres dénominations.** — *a*) Le mot *fonction* peut remplacer le mot application, surtout lorsque A et B sont des parties de l'ensemble R des nombres réels.

Si l'on sait l'existence d'un mode de correspondance, f, associant à tout élément x d'une partie de A un élément y déterminé de B, on dira aussi que f

est une *fonction définie dans* A, *et à valeurs dans* B (1). *L'ensemble de définition* de f est l'ensemble A′ des x pour lesquels il existe un y; une fois A′ connu, f est une application de A′ dans B.

Ce cas se présente fréquemment dans la pratique, lorsqu'on donne une expression ou une formule, $f(x)$, c'est-à-dire l'indication par des symboles appropriés d'une suite d'opérations sur la variable x, avant qu'on ait reconnu pour quelles valeurs de x le calcul de $f(x)$ était possible.

b) Le mot *transformation* est un synonyme du mot application, utilisé particulièrement lorsque A et B sont deux ensembles d'éléments géométriques. On dit que x est *transformé* en y, ou que y est le transformé de x.

4° Exemples. — *a*) Si pour tout x de A, on a $f(x) = y_0$, où y_0 est un élément donné de B, on dit que f est une *fonction constante*.

b) *Définitions diverses lorsque* A = B.

L'application e de A dans A définie par : $\forall x \in A, \quad e(x) = x$ est appelée l'*application identique* de A; on la note aussi id ou id_A.

Si f est une application de A dans A, l'image $f(H)$ d'une partie H de A est une partie de A.

Si $f(H) \subset H$, on dit que H est une partie de A *stable par* f.

Un élément x de A pour lequel $f(x) = x$ est *invariant par* f.

Si chaque élément d'une partie H de A est invariant par f, on dit que H est localement invariant par f.

Si $f(H) = H$, sans que chaque élément de H soit nécessairement invariant par f, on dit que H est globalement invariant par f.

5° **Restriction d'une application.** — Soit f une application de A dans B, et soit A′ une partie de A. L'application f fait alors correspondre à tout élément de A′ un élément de B; elle définit alors une application de A′ dans B appelée *restriction* de f à A′. Si B = A, et si A′ est stable par f, il existe alors une application g de A′ dans A′ qui coïncide avec f sur A′, ce qui signifie

$$\forall x \in A', \quad g(x) = f(x).$$

On dit que g est l'*application induite* par f sur A′.

6° **Notion de fonction de plusieurs variables.** — *a*) On désigne par $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles dont les variables génériques sont appelées $x_1, \ldots, x_n$. On peut appeler A l'ensemble produit

$$A = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n,$$

(1) Si une correspondance associe à un élément x de A plusieurs éléments de B, on dit que c'est une fonction *multiforme* de x. Le mot fonction, utilisé tout seul, aura toujours le sens de fonction *uniforme*, c'est-à-dire de correspondance univoque de A vers B.

et x le n-uple des éléments rangés

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si on donne le moyen d'associer à tout élément x de A un élément y d'un ensemble B, on définit une application f de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans B; on dit encore que f est une *fonction des n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On écrit $$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ou encore, de façon condensée, $y = f(x)$.

b) On désigne par $F_1, \ldots, F_p$, p ensembles dont les variables génériques sont $y_1, \ldots, y_p$. On peut appeler B l'ensemble produit

$$B = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p.$$

Soit f_i une application de A dans F_i, associant à l'élément x de A l'élément y_i de F_i. En appelant y tout élément $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ de l'ensemble produit $F_1 \times F_2 \times \ldots F_p$, on peut désigner par f l'application qui, à tout élément x de A associe un élément y de B.

Là encore l'expression $y = f(x)$ pourra condenser la donnée simultanée de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ des n variables $x_1, \ldots, x_n$.

7° **L'ensemble des applications de A dans B.** — Une application f de A dans B peut être considérée comme une relation binaire $\mathcal{R}$ entre A et B, $x\mathcal{R}y$ signifiant $y = f(x)$. Le graphe de cette relation, qui est la partie de $A \times B$ engendrée par le couple $(x, f(x))$ quand x décrit A est appelé *graphe* de l'application f.

Il en résulte que si nous considérons toutes les applications de l'ensemble donné A dans l'ensemble donné B, nous obtenons un ensemble, puisqu'il s'agit d'une partie de l'ensemble constitué (n° 11) par les relations binaires entre A et B.

16. ***Notion d'équation.*** — 1° Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B. **Étant donné un élément y_0 de B, chercher s'il existe dans A des éléments x_0 dont l'image par f soit l'élément donné y_0, c'est-à-dire tels que**

$$f(x_0) = y_0 \,. \qquad (1)$$

c'est résoudre l'équation

$$f(x) = y_0. \qquad (2)$$

Tout élément x_0 de A donnant lieu à l'égalité (1) est appelé *solution* (ou *racine*) de l'équation (2).

Dans l'écriture (1), le signe $=$ signifie que si l'on détermine l'image par f de l'élément connu x_0, on trouve y_0.

Dans l'écriture (2), le signe $=$ a un double sens interrogatif :

a) Existe-t-il dans A des éléments x_0 tels que $f(x_0) = y_0$?

b) Si oui, quels sont tous ces éléments?

En d'autres termes

le mot « équation » désigne l'énoncé abrégé d'un problème.
Résoudre une équation, c'est
a) **examiner si l'équation a des solutions,**
b) **dans l'affirmative, déterminer toutes ses solutions.**

La résolution d'une équation pose un double problème : *existence* et *détermination* des solutions.

Il peut arriver qu'on montre l'existence des solutions d'une équation en déterminant ses solutions, autrement dit que les deux problèmes posés soient résolus en même temps, la détermination entraînant l'existence.

Dans d'autres cas, les deux problèmes sont résolus séparément. D'après la terminologie couramment adoptée, la *résolution de l'équation* consiste en la *recherche des solutions* dont on a mis l'existence en évidence, par un moyen quelconque; la *discussion d'une équation* consiste dans l'*étude de l'existence des solutions*, la détermination explicite de ces solutions pouvant ne pas être demandée.

2° **Équations à plusieurs inconnues.** — Si f est une application de l'ensemble produit $A = E_1 \times \ldots \times E_n$ dans l'ensemble B, on peut, étant donné un élément y_0 de B, chercher s'il existe dans chacun des ensembles E_i au moins un élément ξ_i tel que

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = y_0 \qquad (1)$$

Tout n-uple d'éléments $\xi_1, \ldots, \xi_n$ donnant lieu à l'égalité (1) est dit *solution* de l'équation $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_0$ aux n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Le mot *solution* est ici un mot collectif s'appliquant à l'ensemble des éléments ξ_i, et non à l'un d'eux en particulier.

Les mêmes dénominations s'appliquent au cas où f est une application de $A = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans $B = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p$, et où l'on cherche les éléments $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de A tels que

$$f(x) = y_0$$

y_0 étant un élément $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ donné de B.

17. *Surjection. Injection. Bijection.* — 1° **Image réciproque.** — Soit f une application de A dans B; soit y_0 un élément donné de B, et considérons l'équation

$$f(x) = y_0 \qquad (1)$$

dans laquelle l'inconnue x est un élément de A (on dit encore *équation sur* A).

Si $y_0 \in f(A)$, c'est-à-dire s'il existe un élément x_0 de A tel que $f(x_0) = y_0$, l'équation (1) admet au moins la solution x_0; elle peut en admettre d'autres.

Si $y_0 \notin f(A)$, l'équation (1) n'a pas de solution dans A; on dit qu'elle est impossible.

Dans tous les cas, y étant un élément de B, on désigne par $f^{-1}(y)$ l'ensemble, éventuellement vide, de tous les éléments x de A tels que $f(x) = y$, et on dit que c'est l'*image réciproque de y par f*.

Si $y \notin f(A)$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est vide.

Plus généralement, si L est une partie de B, $f^{-1}(L)$ désigne l'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) \in L$, et on dit que c'est l'*image réciproque de* L *par f*.

2° **Surjection.** — Si $B = f(A)$, tout élément de B est l'image par f d'un élément x au moins de A. Nous énoncerons alors :

DÉFINITION. — **L'application f de A dans B est dite surjective si** $B = f(A)$.

Autrement dit

f est surjective $\iff \forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A$ tel que $y = f(x)$.

On dit encore que f est une application de A *sur* B, ou encore une *surjection* de A sur B.

3° **Injection.** — Si $y \in f(A)$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide; si $f^{-1}(y)$ se compose d'un seul élément x de A, cela veut dire qu'il n'existe qu'un seul élément x de A dont l'image par f soit y. Nous énoncerons alors :

DÉFINITION. — **L'application f de A dans B est dite injective (1) si**

$\forall\, y \in f(A)$, **l'équation en x, $f(x) = y$, admet une solution unique $x \in A$.**

On dit encore que f est une *injection* de A dans B.

La définition précédente peut encore se traduire par l'énoncé suivant : $\forall\, y \in B$, *il existe au plus un élément x de* A *tel que* $f(x) = y$.

Formes équivalentes de la définition. — En notant que, x étant un élément quelconque de A, $f(x)$ est un élément quelconque de $f(A)$, on traduit encore la définition de l'injection par l'énoncé suivant :

DÉFINITION. — **L'application f de A dans B est dite injective si**

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

— **ou encore si**

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

4° **Bijection.** — *a) Définition.* — **L'application f de A dans B est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.**

On dit encore que f est une *bijection de* A *sur* B.

f étant surjective, c'est que $f(A) = B$; tout élément y de B est l'image par f d'un élément x de A; cet élément est unique puisque f est injective. On vérifie la réciproque sans difficulté; nous énoncerons donc :

(1) On observera que cette locution a été mal choisie, le préfixe « in » n'ayant pas la signification d'unicité prévue par la définition; « unijective » aurait été plus heureux.

THÉORÈME. — **L'application f de A dans B est bijective si**

$\forall\, y \in B$, **il existe un élément $x \in A$, et un seul, tel que $f(x) = y$.**

b) Application réciproque. — Si f est une bijection de A sur B, à tout élément y de B on sait associer un élément x de A, et un seul tel que $f(x) = y$.

On définit ainsi une application de B dans A, qui est dite *application réciproque* (ou inverse) de f. A défaut de notation spéciale, on la note f^{-1} :

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

f^{-1} est surjective, car $\forall\, x \in A, \exists\, y = f(x)$ ou $x = f^{-1}(y)$.

f^{-1} est injective, car quel que soit $x_0 \in A$,
l'équation en y, $f^{-1}(y) = x_0$ admet une seule solution $y_0 = f(x_0)$.

En résumé, f^{-1} est une bijection de B sur A.

L'étude précédente permet d'énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si f est une bijection de A sur B, il existe une bijection, notée f^{-1}, de B sur A ; on l'appelle l'application réciproque de f.**

En abrégé, on écrira $x \leftrightarrow y$

qui résume $x \in A \left\{ \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{matrix} \right\} y \in B$

CAS PARTICULIER. — Une injection f de A dans B est une bijection de A sur l'ensemble-image $f(A)$.

On peut encore dire qu'il y a une injection de A dans B quand il y a une bijection de A sur une partie de B.

REMARQUES I. — Au lieu de bijection, on dit encore parfois correspondance biunivoque.

II. On évitera de confondre $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(L)$ (images réciproques définies au 1° et qui désignent des parties de l'ensemble-objet) avec la notation f^{-1} qui n'est employée que si f est une bijection et qui désigne une application.

III. *Autres dénominations.* — L'application réciproque f^{-1} est dite aussi *fonction réciproque* ou *fonction inverse* de la fonction f.

c) Ensembles équipotents. — Étant donnés deux ensembles A et B, s'il existe une bijection de A sur B, on vient de voir qu'il existe aussi une bijection de B sur A. On dit alors que *les ensembles* A *et* B *ont même puissance*, ou encore qu'ils sont *équipotents*.

Cette notion sera utilisée au n° **24** pour définir les ensembles finis.

5° Discussion résumée de l'équation $f(x) = y$. — Les définitions précédentes (2°, 3°, 4°) permettent de discuter l'équation :

$$f(x) = y$$

dans laquelle y est un élément donné de B, et x un élément inconnu de A, de la façon suivante :

f est surjective : quel que soit y, au moins une solution

f est injective : si $y \in f(A)$, une solution unique

si $y \notin f(A)$, aucune solution

f est bijective : quel que soit y, une solution unique.

18. *Composition des applications.* — 1° **Définition.** — Étant donnés trois ensembles A, B, C quelconques, considérons une application f de A dans B, et une application g de B dans C.

A tout élément x de A, l'application f associe un élément y de B : $y = f(x)$.

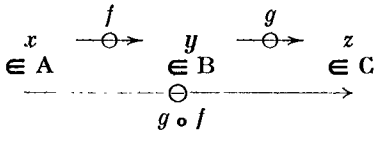
A cet élément y de B, l'application g associe un élément z de C :

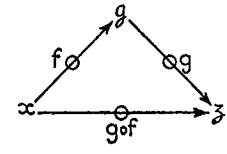
$$z = g(y) \qquad \text{ou} \qquad z = g[f(x)].$$

L'application qui, à l'élément x de A *associe l'élément z de* C *est dite application composée de f par g*; on dit aussi que cette application résulte de la *composition de f par g*, ou qu'elle est le *produit de f par g*. On dit aussi composition — ou produit — de f et de g, en respectant l'ordre dans lequel f et g sont énoncées.

On rappelle l'écriture $g[f(x)]$ en notant $g \circ f$ l'application qui vient d'être définie de A dans C (on énonce « g rond f »). On insiste sur le fait que le symbole g de la seconde application est placé à gauche du symbole f de la première.

En résumé, on peut utiliser l'un des diagrammes suivants :





Si l'on convient de dire que f et g sont des fonctions, on dit que la fonction qui associe z à x résulte de la composition des fonctions f et g, qu'elle est la *fonction composée de f par g*; au lieu de fonction composée, nous utiliserons quelquefois la locution traditionnelle de *fonction de fonction*; on dit alors que f est la fonction intermédiaire.

Dans la pratique, les ensembles B et C seront souvent confondus avec A, ou seront des sous-ensembles de A.

Si l'on convient de dire que f et g sont des transformations, on pourra aussi appeler produit le résultat de la composition de f et g (dans l'ordre indiqué).

Lorsqu'il n'en résultera aucune ambiguïté, on pourra même noter gf le produit des transformations f et g, prises dans cet ordre.

2° **Question de terminologie.** — Alors que le résultat de la composition des transformations f et g, prises dans cet ordre, peut être appelé « produit » de la transformation f par la transformation g, on ne dit jamais que la fonction composée de la fonction f par la fonction g est le « produit » de f par g : en effet le mot « fonction » est employé le plus souvent quand l'ensemble E est un ensemble de nombres et quand par suite $f(x)$ et $g(x)$ sont aussi des nombres; et il y aurait risque de confusion avec la fonction h définie par $h(x) = f(x) \times g(x)$, fonction dont la valeur numérique est le produit des valeurs numériques $f(x)$ et $g(x)$, au sens élémentaire du mot produit, c'est-à-dire résultat d'une opération de multiplication effectuée dans un ensemble de nombres.

La notation $f(x)\,g(x)$ désignera, sans ambiguïté possible, le résultat de la multiplication des valeurs numériques $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions f et g définies dans un ensemble E de nombres.

3° **Applications réciproques et applications identiques.** — Nous noterons e_A et e_B, les applications identiques des ensembles A et B (n° 15, 4°).

a) Soit f une bijection de A sur B et soit f^{-1} l'application réciproque de f.

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Dans ces conditions

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}[f(x)] = x; \quad \forall y \in B, \quad f[f^{-1}[y)] = y$$

En d'autres termes

$$f^{-1} \circ f = e_A, \qquad f \circ f^{-1} = e_B.$$

b) Supposons données une application f de A dans B et une application g de B dans A, telles que

$$\text{(I)} \qquad g \circ f = e_A \qquad \text{et} \qquad \text{(II)} \quad f \circ g = e_B.$$

L'hypothèse (II) implique

$$\forall y \in B, \qquad f[g(y)] = y;$$

il existe $x = g(y)$ tel que $f(x) = y$, donc f est surjective.

L'hypothèse (I) implique :

$$f(x) = f(x_0) \implies g[f(x)] = g[f(x_0)] \qquad \text{ou} \qquad x = x_0,$$

donc f est injective.

En résumé, f est bijective.

Soit alors f^{-1} l'application réciproque de f;

$$g[f(x)] = f^{-1}[f(x)], \text{ chaque membre étant } x.$$

Or $y = f(x)$ peut coïncider avec tout élément de B, il en résulte donc

$$\forall y \in B, \quad g(y) = f^{-1}(y), \qquad \text{et par suite} \qquad g = f^{-1}.$$

On peut donc résumer *a*) et *b*) en énonçant :

THÉORÈME. — **Soit f une application de A dans B; f est bijective si, et seulement si, il existe une application g de B dans A telle que**

$$g \circ f = e_A, \qquad f \circ g = e_B.$$

g (resp. f). est alors l'application réciproque de f (resp. g).

4° **Application involutive.** — DÉFINITION. — **Une application f de A dans A est dite involutive si**

$$f \circ f = e_A,$$

e_A étant l'application identique de A.

Si f est involutive, on peut appliquer le résultat du 3°, *b*) avec $g = f$; il en résulte que f est bijective et que f coïncide avec l'application réciproque f^{-1}.

Inversement, si f est une bijection de A sur A, et si $f^{-1} = f$,

$$f^{-1} \circ f = e_A \implies f \circ f = e_A$$

et l'application f est alors involutive.

REMARQUE. — On peut noter $f \circ f = f^2$, et plus généralement

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ applications } f} = f^n.$$

Cette notation sera utilisée au n° **220.**

5° **Associativité de la composition des applications.** — Soit f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de C dans D. De proche en proche on définit

$$y = f(x), \qquad z = g(y), \qquad u = h(z).$$

L'application $x \longrightarrow h\{g[f(x)]\}$ se note $h \circ (g \circ f)$; c'est la composition de $g \circ f$ (qui transforme x en z) par h (qui transforme z en u).

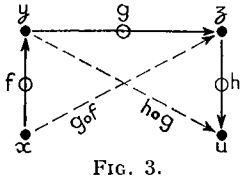


FIG. 3.

Mais on peut aussi transformer x en y par f, puis y en u par $h \circ g$; c'est donc que

$$(1) \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On énonce :

THÉORÈME. — **Dans un produit de trois applications, on peut remplacer deux applications consécutives par leur produit.**

On traduit la propriété précédente en disant que **le produit des applications est associatif.**

Il en résulte qu'on peut écrire l'un ou l'autre des deux membres de l'égalité (1) sous la forme

$$h \circ g \circ f$$

sans mettre aucune parenthèse.

Plus généralement, dans la composition d'un nombre quelconque d'applications, on peut remplacer plusieurs applications consécutives par le résultat de leur composition.

Soit par exemple

$$\varphi_1 = f_2 \circ f_1; \quad \varphi_2 = f_3 \circ \varphi_1; \quad \varphi_3 = f_4 \circ \varphi_2; \quad \varphi_4 = f_5 \circ \varphi_3,$$

et posons $k = f_4 \circ (f_3 \circ f_2)$.

On a sucessivement $\varphi_2 = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$

$$\varphi_3 = f_4 \circ [(f_3 \circ f_2) \circ f_1] = [f_4 \circ (f_3 \circ f_2)] \circ f_1 \quad \text{ou} \quad k \circ f_1.$$

Enfin $\varphi_4 = f_5 \circ (k \circ f_1)$ ou $f_5 \circ k \circ f_1$.

Finalement on peut écrire $\varphi_4 = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

en supprimant toutes parenthèses, étant entendu qu'on pourra en rétablir pour des applications consécutives.

6° **Applications permutables.** — Soient f et g deux applications de E dans E; elles sont dites *permutabes* si $g \circ f = f \circ g$.

On dit encore que le produit de ces deux applications est *commutatif*.

7° THÉORÈME. — **L'application composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).**

a) Reprenons les notations du 1°, en supposant ici que f et g sont des injections.

Soient x et x_0 deux éléments de A qui ont même image par $g \circ f$:

$$g[f(x)] = g[f(x_0)].$$

Cela signifie que les éléments $f(x)$ et $f(x_0)$ de B ont la même image par g; d'après le caractère injectif de g, ils coïncident.

D'après le caractère injectif de f, $f(x) = f(x_0)$ entraîne $x = x_0$.

b) Supposons cette fois que f et g sont des surjections. Soit z_0 un élément quelconque de C.

D'après le caractère surjectif de g, il existe au moins un élément y_0 de B tel que $z_0 = g(y_0)$.

D'après le caractère surjectif de f, il existe au moins un élément x_0 de A tel que $y_0 = f(x_0)$ et, par suite $z_0 = g[f(x_0)]$.

COROLLAIRE. — **L'application composée de deux bijections f et g est une bijection.**

En effet, f et g étant à la fois injectives et surjectives, il en est de même de $g \circ f$.

D'autre part, en désignant par e_A et e_C les applications identiques des ensembles A et C, et en utilisant l'associativité, on peut écrire

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = e_A; \qquad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = e_C$$

si bien que l'application réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

8° ***Factorisation canonique d'une application.** — *a*) DÉFINITION 1. — Étant donné un ensemble A dans lequel est défini une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on appelle *surjection canonique de* A *sur l'ensemble-quotient* A/$\mathcal{R}$ l'application φ qui, à l'élément générique de A fait correspondre sa classe d'équivalence.

Autrement dit :

$$\forall x \in A, \quad \varphi(x) = \bar{x} \qquad \text{(en désignant par } \bar{x} \text{ la classe de } x\text{)}.$$

DÉFINITION II. — Étant donné une application f de A dans B, on appelle *injection canonique de* f (A) *dans* B l'application i qui à tout élément y de f (A) associe l'élément y de B.

b) Ces définitions posées, considérons une application f de A dans B. La relation binaire

$$\text{« } x \mathcal{R} x' \quad \text{signifie} \quad f(x) = f(x') \text{ »}$$

détermine une relation d'équivalence dans A (nous laissons au lecteur le soin de le vérifier).

Puisque tous les représentants d'une même classe d'équivalence ont la même image par f, on peut associer à cette classe l'image commune de tous ses représentants. On détermine ainsi une application de l'ensemble-quotient A/$\mathcal{R}$ dans f(A). Cette application, que nous noterons ψ, est bijective; en effet un élément donné y de f(A) est l'image par ψ d'un, et un seul, élément de A/$\mathcal{R}$, qui n'est autre que $f^{-1}(y)$. On dit que ψ est la *bijection canonique de* A/$\mathcal{R}$ *sur* f(A).

c) Les applications φ et i étant celles qui ont été définies en *a*), nous disposons du diagramme

$$x \in \mathrm{A} \xrightarrow{\varphi} \dot{x} \in \mathrm{A}/\mathcal{R} \xrightarrow{\psi} y \in f(\mathrm{A}) \xrightarrow{i} y \in \mathrm{B} \quad [y = f(x)]$$

Autrement dit : $f = i \circ \psi \circ \varphi$.

Cette décomposition est dite *factorisation canonique* de l'application f.

V. LOIS DE COMPOSITION

19. *Loi de composition interne.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle loi de composition interne dans l'ensemble** E **une application d'une partie** $\mathcal{C}$ **de l'ensemble** E × E **dans** E.

Cette loi concerne les seuls couples (a, b) de E × E qui appartiennent à $\mathcal{C}$.

Dans la suite nous rencontrerons principalement des lois de composition pour lesquelles $\mathcal{C}$ = E × E. On dit alors que la loi est *partout définie*.

On explicite alors la définition par l'énoncé suivant :

On appelle loi de composition interne — ou opération interne — définie sur un ensemble E **une correspondance associant à tout couple rangé** (a, b) **d'éléments de** E **un élément déterminé** c **de** E.

On dit que c est le *composé de* a *avec* b (ou de a par b), et l'on écrit

$$c = a * b.$$

Au lieu de dire « considérons sur E la loi $(x, y) \longrightarrow x * y$ », nous abrégerons en disant « considérons la loi $*$ sur E ». Nous noterons E $(*)$ ou (E, $*$) l'ensemble E muni de la loi $*$.

Le symbole $*$ utilisé ici peut être remplacé dans la pratique par l'un quelconque des symboles spéciaux attachés aux opérations couramment utilisées; par exemple on sait associer à tout couple d'entiers naturels n et n' leur somme $s = n + n'$ et leur produit $p = n \times n'$.

Lorsqu'on ne précise pas la nature de l'opération, a et b en sont appelés les *termes* (on écrit le premier terme à gauche du second), c est appelé le *résultat* de l'opération. On n'oubliera pas que l'opération est l'indication d'un travail

à faire; effectuer l'opération, c'est faire effectivement le travail indiqué.

Si l'opération étudiée est appelée *addition*, on la note $+$; son résultat est appelé *somme*.

Si l'opération étudiée est appelée *multiplication*, on la note $\times$ ou $.$; son résultat est appelé *produit*.

CAS PARTICULIER. — Si l'ensemble E ne comprend qu'un nombre fini d'éléments $a_1, a_2, \ldots a_n$, on peut dresser une *table* de l'opération $*$; on désigne ainsi un tableau carré de n^2 cases dans lequel le résultat $a_i * a_j$ est inscrit à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne : la table de Pythagore pour la multiplication des entiers naturels, en est un exemple universellement connu.

2° **Commutativité.** — **Une loi de composition interne sur E est dite commutative si quels que soient a et b appartenant à E,**

$$b * a = a * b.$$

Par exemple, l'addition et la multiplication des entiers sont des opérations commutatives. Par contre, dans l'ensemble N des entiers naturels, l'exponentiation n'est pas commutative ($2^3 \neq 3^2$).

3° **Partie stable (ou fermée) pour une loi de composition.** — Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Une partie A de E est dite *stable* (ou *fermée*) pour la loi $*$ si

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{A} \\ y \in \mathrm{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x * y \quad \in \quad \mathrm{A}.$$

En associant à tout couple rangé (a, b) d'éléments de A l'élément $a * b$ de A, on détermine une loi interne sur A qui est dite *restriction* à A de la loi $*$, ou encore *loi induite* sur A par la loi $*$.

EXEMPLE. — **Les multiples d'un entier naturel forment un ensemble fermé, et par rapport à l'addition, et par rapport à la multiplication des entiers naturels.**

20. ***Itération d'une opération interne.*** — 1° **Composé de plusieurs éléments pris dans un ordre donné.** — Supposons l'opération $*$ partout définie sur l'ensemble E.

Après avoir composé a_1 par a_2 :

$$p_2 = a_1 * a_2$$

on peut composer l'élément p_2 obtenu dans E par un autre élément a_3 :

$$p_3 = p_2 * a_3.$$

$$p_3 \text{ se note } (a_1 * a_2) * a_3 \qquad \text{ou} \qquad a_1 * a_2 * a_3.$$

Par récurrence on peut étendre — ou itérer — l'opération à une suite quelconque d'éléments rangés dans un ordre donné;

$$p_4 = p_3 * a_4, \ldots \qquad p_n = p_{n-1} * a_n.$$

On convient d'écrire $p_n = a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_n$.

L'écriture précédente suppose que les opérations successives ont été uniquement faites dans l'ordre indiqué plus haut. Nous allons voir que la rigueur de cette convention s'atténue pour les lois associatives.

2° **Associativité.** — *a*) DÉFINITION. — **Une loi de composition interne sur E est dite associative si, quels que soient a, b, c appartenant à E,**

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

la parenthèse indiquant qu'il s'agit du résultat de l'opération qu'elle renferme.

EXEMPLES I. — L'addition et la multiplication des entiers naturels sont associatives.

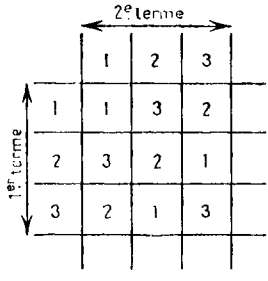


FIG. 4.

II. — Dans un ensemble fini de nombres réels, on désigne par (a, b) le plus grand des deux nombres a et b. Cette opération est

commutative, car $(a, b) = (b, a)$
associative, car $[(a, b), c] = [a, (b, c)]$.

III. — L'opération définie par la table ci-contre (fig. 4) dans l'ensemble E = { 1, 2, 3 } est commutative (le tableau est symétrique par rapport à la diagonale principale).

$1 * 2 = 3$ $\quad 2 * 3 = 1$ } L'opération
$(1 * 2) * 3 = 3$ $\quad 1 * (2 * 3) = 1$ } n'est pas associative.

b) *Itération d'une opération associative.* — L'opération $*$ étant associative, on démontre, comme on l'a fait à propos de la composition des applications, qu'on peut remplacer plusieurs termes consécutifs par le résultat de leur composition.

Par exemple,

$a * b * c * d * e$, qui était par définition $\{ [(a * b) * c] * d \} * e$, peut s'écrire indifféremment, lorsque la loi $*$ est associative

$$(a * b) * (c * d * e); \qquad a * (b * c) * (d * e), \ldots$$

on peut introduire ou supprimer des parenthèses, pourvu qu'on ne change pas l'ordre des éléments.

4° **Loi associative et commutative.** — THÉORÈME. — **Si une loi de composition interne sur l'ensemble E est associative et commutative, on peut permuter les termes de façon quelconque et remplacer plusieurs d'entre eux par le résultat de l'opération effectuée sur eux.**

Reprenons $p_n = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$.
1° Écrivons $p_n = (p_{n-2} * a_{n-1}) * a_n$
par associativité $p_n = p_{n-2} * (a_{n-1} * a_n)$
par commutativité $p_n = p_{n-2} * (a_n * a_{n-1})$
par associativité $p_n = (p_{n-2} * a_n) * a_{n-1}$,
finalement $p_n = a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-2} * a_n * a_{n-1}$.

Par suite : on *peut transposer les deux derniers termes de l'opération.*

2° Écrivons $p_n = p_k * a_{k+1} * a_{k+2} * \ldots * a_n$

$p_k = a_1 * a_2 * \ldots * a_{k-1} * a_k$

peut s'écrire $p_k = a_1 * a_2 * \ldots * a_k * a_{k-1}$

et finalement $p_n = a_1 * a_2 * \ldots * a_{k-2} * a_k * a_{k-1} * a_{k+1} * \ldots * a_n$.

Par suite : *On peut transposer deux termes consécutifs quelconques de l'opération.*

3° Montrons maintenant qu'*on peut permuter les éléments a_i d'une manière quelconque.* Cela résulte du fait qu'on peut passer d'un ordre quelconque des éléments donnés à un autre ordre par des échanges successifs de deux éléments consécutifs : par de tels échanges on amène d'abord au premier rang l'élément qui doit y venir, puis on amène au second rang l'élément qui doit y venir, etc....

4° Montrons enfin que l'*on peut remplacer certains des éléments a_i par leur composé au moyen de l'opération étudiée* *.

En effet, on peut toujours amener ces éléments, a_α, a_β, a_γ par exemple, aux trois premiers rangs, et écrire

$$p_n = a_\alpha * a_\beta * a_\gamma * a_1 * \ldots * a_n \qquad \text{(de 1 à } n\text{, sauf } \alpha, \beta, \gamma\text{)}.$$

Mais par définition

$$p_n = (a_\alpha * a_\beta * a_\gamma) * a_1 * \ldots * a_n.$$

Chaque fois que nous aurons démontré (ou admis) qu'une opération est commutative (pour 2 éléments) et associative (pour 3 éléments), nous pourrons affirmer, pour un nombre quelconque d'éléments, que l'opération est aussi commutative et associative, sans que soient recommencés les raisonnements précédents.

Remarque. — Le mot *addition* n'est utilisé que pour désigner une opération commutative et associative; au lieu d'écrire $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ on écrira, en abrégé Σa_i (i de 1 à n).

21. *Étude de certains éléments par rapport à une loi de composition.* - Soit * une loi de composition, définie sur l'ensemble E.

1° **Élément neutre.** — DÉFINITION. — **Un élément e de l'ensemble E est dit élément neutre pour une loi de composition interne sur E si quel que soit l'élément a de E,**

$$e * a = a \qquad \text{et} \qquad a * e = a. \tag{1}$$

THÉORÈME. — **S'il existe un élément neutre pour la loi *, il est unique.**

En effet, s'il existait deux éléments neutres e et e', distincts,
la définition de e comme élément neutre donne $e * e' = e'$
la définition de e' comme élément neutre donne $e * e' = e$
d'où $e = e'$, ce qui est contraire à l'hypothèse $e' \neq e$.

Par exemple 1 est élément neutre pour la multiplication des entiers naturels.

2° **Élément régulier.** — DÉFINITION. — **Un élément de E, a, est dit régulier pour une loi de composition interne sur E si, quels que soient les éléments x et y de E**

$$a * x = a * y \implies x = y$$

et

$$x * a = y * a \implies x = y.$$

Autrement dit, dans les égalités écrites à gauche, on peut *simplifier* par a.

Par exemple, tout entier naturel n est régulier pour l'addition, car

$$n + n' = n + n'' \quad \text{entraîne} \quad n' = n''.$$

Par contre l'égalité $nn' = nn''$ n'entraîne $n' = n''$ que si n est différent de zéro; tout entier non nul est donc régulier pour la multiplication; zéro ne l'est pas.

Une loi de composition $*$ définie sur E est dite *régulière* si tout élément de E est régulier.

3° **Éléments symétriques.** — *a*) DÉFINITION. — **Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, avec un élément neutre e; on dit qu'un élément x' est symétrique de x si**

$$x * x' = x' * x = e.$$

Tout élément qui possède un symétrique est dit *symétrisable*.

D'après la définition précédente, x est aussi symétrique de x'; on dit encore que x et x' sont symétriques.

b) THÉORÈME. — **Si la loi $*$ de E est associative, tout élément de E possède au plus un symétrique.**

Supposons en effet que x admette deux symétriques distincts x' et x'_1; par hypothèse

$$x * x' = x' * x = e; \qquad x * x'_1 = x'_1 * x = e.$$

Considérons

$$p = (x' * x) * x'_1$$

$$p = e * x'_1 \qquad \text{ou} \qquad x'_1.$$

L'opération de E étant associative

$$p = x' * (x * x'_1) = x' * e \qquad \text{ou} \qquad x'.$$

On arriverait à une contradiction.

NOTATION. — Lorsque x admet un symétrique unique, on peut le noter $\mathrm{sym}x$:

$$x * \mathrm{sym}x = \mathrm{sym}x * x = e$$

$$\mathrm{sym}(\mathrm{sym}x) = x.$$

4° **Opérations inverses.** — PROBLÈME. — **Soit $c = a * b$ une opération interne sur l'ensemble E. Connaissant le résultat de l'opération et l'un des deux termes, peut-on trouver l'autre?**

Cela revient à résoudre les équations

(1) $c = x * b$ (b et c donnés) (2) $c = a * y$ (c et a donnés).

Les problèmes posés par (1) et par (2) peuvent être impossibles; s'ils sont possibles, ils peuvent admettre plusieurs solutions.

Si l'équation (1) admet une solution unique, quels que soient c et b, on a ainsi obtenu une nouvelle façon d'associer à un couple rangé (c, b) d'éléments de E un autre élément de E; on a ainsi défini une nouvelle opération interne sur E; on dit que c'est l'opération inverse à droite de l'opération $*$.

Si l'équation (2) admet une solution unique, quels que soient c et a, on définit de même une nouvelle opération interne sur E; on dit que c'est l'opération inverse à gauche de l'opération $*$.

Si l'opération $*$ est commutative, il ne peut exister qu'une seule opération inverse.

Si l'opération commutative est appelée *addition*, l'opération inverse est appelée *soustraction*, et le résultat est appelé *différence*.

Si l'opération commutative est appelée *multiplication*, l'opération inverse est appelée *division*, et le résultat est appelé *quotient*.

5° **Distributivité.** — On peut créer, dans un ensemble E, deux lois de composition internes. L'ensemble N des entiers naturels, muni de l'addition et de la multiplication, en est un exemple.

Notons $*$ et T les deux opérations définies sur l'ensemble E. On peut composer deux éléments a et b de E par la première loi; le résultat, $a * b$ est un élément de E qu'on peut composer avec un autre élément c de E au moyen de la seconde loi, ce qui donne

$$(a * b)\mathrm{T}c \qquad \text{ou} \qquad c\mathrm{T}(a * b)$$

les deux éléments précédents étant distincts si la seconde loi n'est pas commutative.

DÉFINITION DE LA DISTRIBUTIVITÉ. — **Un ensemble E étant muni de deux lois internes $*$ et T, on dit que la loi (T) est distributive par rapport à la loi $(*)$, si, quels que soient a, b, c dans E,**

$$(a * b)\mathrm{T}c = (a\mathrm{T}c) * (b\mathrm{T}c)$$

et

$$c\mathrm{T}(a * b) = (c\mathrm{T}a) * (c\mathrm{T}b).$$

La première (resp. seconde) égalité précédente traduit ce qu'on appelle la distributivité à droite (resp. à gauche).

Dans le cas où la loi (T) est commutative l'une quelconque des deux égalités suffit pour traduire la distributivité de la loi (T) par rapport à la loi $(*)$. Par exemple, dans l'ensemble N la multiplication est distributive par rapport à l'addition puisque

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

22. *Loi de composition externe.* — **1° Définition.** — Définir une loi interne dans l'ensemble E ($a * b = c$), c'est définir une application de l'ensemble produit E × E dans l'ensemble E. On dit qu'on fait agir sur l'élément a de E un élément b de E, pour obtenir l'élément c de E.

Mais on peut, en se donnant deux ensembles E et Ω, donner le moyen d'associer à un élément a de E et à un élément α de Ω un élément b de E; on réalise ainsi une application de l'ensemble produit E × Ω dans l'ensemble E, et cette application est dite *loi externe sur* E, parce qu'elle fait intervenir des éléments extérieurs à E, c'est-à-dire les éléments de Ω; ces derniers s'appellent aussi les *opérateurs de la loi externe*; l'ensemble Ω est dit *ensemble des opérateurs.*

En résumé, nous énoncerons :

DÉFINITION. — **On appelle loi de composition externe entre l'ensemble** E **et un ensemble** Ω (dit ensemble des opérateurs) **toute application de l'ensemble produit** E × Ω **dans** E.

Une loi externe est en général notée multiplicativement,

$$b = \alpha.a \qquad \text{ou} \qquad a.\alpha \qquad (\text{et aussi } \alpha a \quad \text{ou} \quad a\alpha)$$

l'ordre n'intervenant pas puisque les deux termes a et α sont pris dans des ensembles différents. On dit que b est le *composé de a et de* α pour la loi étudiée.

C'est surtout dans l'étude des espaces vectoriels (chapitre X) que nous rencontrerons l'usage des lois externes.

2° Partie stable (ou fermée). — Soit E un ensemble sur lequel est définie une loi de composition externe, le domaine des opérateurs étant Ω. Une partie A de E est dite *stable* (ou *fermée*) pour cette loi externe si

$$\{ x \in A \quad \text{et} \quad \alpha \in \Omega \} \Longrightarrow x . \alpha \in A.$$

On dispose alors d'une loi externe sur A, induite par la loi (.).

3° Distributivité. — DÉFINITION. — **Un ensemble** E **étant muni d'une loi interne** (*) **et d'une loi externe** (.), **dont l'ensemble des opérateurs est** Ω, **on dit que la loi** (.) **est distributive par rapport à la loi** (*) **si, quels que soient** a, b **dans** E **et** α **dans** Ω,

$$\alpha . (a * b) = (\alpha . a) * (\alpha . b).$$

23. *Structures algébriques. Homomorphisme. Isomorphisme.*

1° Structure algébrique. — On dit qu'un ensemble E est muni d'une *structure algébrique* lorsqu'on a défini dans E une ou plusieurs lois de composition, internes ou externes, vérifiant un certain nombre d'axiomes (par exemple associativité, commutativité, ...). Nous étudierons, dans la suite, les structures usuelles de groupe, d'anneau, de corps, et d'espace vectoriel.

2° Homomorphisme. Isomorphisme. — *a*) DÉFINITION. — **Soient** E **et** F **deux ensembles respectivement munis des lois** * **et** T. **On dit qu'une application** f **de** E **dans** F **est un homomorphisme de** E (*) **dans** F (T) **si**

(1) $$\forall x_1, x_2 \in E, \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1)\ T\ f(x_2).$$

Si l'application f est surjective, on dit que f est un *épimorphisme*; si l'application f est injective, on dit que f est un *monomorphisme.*

b) DÉFINITION. — **Si f est une bijection de E sur F, et si f est un homomorphisme de $E(*)$ sur $F(T)$, on dit que f est un isomorphisme de $E(*)$ sur $F(T)$.**

On note parfois cet isomorphisme en écrivant

$$E(*) \approx F(T)$$

ou même $E \approx F$ si aucune ambiguïté n'existe sur les lois internes.

Puisque f est bijective, f admet une application réciproque f^{-1}; en transformant par f^{-1} les deux membres de la relation d'homomorphisme (1), on obtient

$$\forall x_1, x_2 \in E, \qquad x_1 * x_2 = f^{-1}[f(x_1)\, T\, f(x_2)],$$

ce qui s'écrit, en observant que

$$x_1 = f^{-1}(y_1), \qquad x_2 = f^{-1}(y_2).$$
$$\forall y_1, y_2 \in F, \qquad f^{-1}(y_1\, T\, y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)$$

et montre que f^{-1} est aussi un isomorphisme. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Si f est un isomorphisme de $E(*)$ sur $F(T)$, f^{-1} est un isomorphisme de $F(T)$ sur $E(*)$.**

3° **Endomorphisme. Automorphisme.** — Supposons maintenant que F coïncide avec E, et que la loi T coïncide avec la loi $*$.

Un homomorphisme de $E(*)$ dans $E(*)$ est dit endomorphisme de $E(*)$.
Un isomorphisme de $E(*)$ sur $E(*)$ est dit automorphisme de $E(*)$.

4° **Induction d'une loi par bijection.** — Soit f une bijection de l'ensemble E (d'élément générique x) sur l'ensemble F (d'élément générique y).

Supposons que l'on ait défini sur E une opération interne $*$;

$$x_1 \overset{f}{\longrightarrow} y_1 = f(x_1); \qquad x_2 \overset{f}{\longrightarrow} y_2 = f(x_2)$$
$$x_3 = x_1 * x_2 \longrightarrow y_3 = f(x_1 * x_2).$$

Montrons qu'on définit ainsi une opération interne sur F : y_1 et y_2 étant donnés, quelconques, dans F, ils sont les images par f des éléments $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ de E; le composé x_3 de x_1 et x_2 par la loi $*$ a pour image par f $y_3 = f(x_3)$, et y_3 se trouve ainsi associé de façon unique au couple rangé y_1, y_2 d'éléments de F, ce qui est la définition d'une opération interne sur F; en notant T cette loi de composition, on a

$$y_3 = y_1 T y_2 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1 * x_2) = f(x_1)\, T f(x_2).$$

On peut aussi bien écrire : $f^{-1}(y_1 T y_2) = f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2)$,

ou $\left\{\begin{matrix} x_1 \longleftrightarrow y_1 \\ x_2 \longleftrightarrow y_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x_1 * x_2 \longleftrightarrow y_1 T y_2,$

les relations précédentes étant vraies quels que soient les couples x_1, x_2 pris dans E, ou y_1, y_2 pris dans F. L'étude précédente permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Si f est une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F, à toute loi interne sur E (notée $*$) on peut faire correspondre une loi interne sur F (notée T) telle que f soit un isomorphisme de E($*$) sur F(T).**

5° **Cas des lois externes.** — Soient E et F deux ensembles munis chacun d'une loi externe vis à vis d'un même domaine d'opérateurs Ω :

$(\alpha, x) \in \Omega \times E \longrightarrow (\alpha * x) \in E$; $(\alpha, y) \in \Omega \times F \longrightarrow (\alpha \,T\, y) \in F$.

Une application f de E sur F est dite un homomorphisme de E ($*$) sur F (T) si

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \Omega \qquad f(\alpha * x) = \alpha \,T\, f(x). \qquad (2)$$

Comme dans le cas de lois internes, on dit que l'homomorphisme f est un isomorphisme quand f est une bijection. Dans ce cas on a, en transformant les deux membres de l'égalité (2) par l'application réciproque f^{-1} de f :

$$\alpha * x = f^{-1}(\alpha \,T\, f(x))$$

ce qui s'écrit, en observant que $x = f^{-1}[f(x)]$ et en posant $f(x) = y$

$$\forall y \in F, \forall \alpha \in \Omega \qquad f^{-1}(\alpha \,T\, y) = \alpha * f^{-1}(y).$$

On montre ainsi que f^{-1} est un isomorphisme de F (T) sur E ($*$). Autrement dit, nous avons étendu le théorème du 2° *b*), au cas où $*$ et T sont des lois externes.

6° **Homomorphismes surjectifs.** — Soit E et F deux ensembles respectivement munis de lois internes ou externes $*$, $*'$, ... et T, T', ... que l'on peut associer deux à deux, grâce à une même application f de E dans F de façon que f soit un homomorphisme non seulement de E ($*$) dans F (T), mais aussi de E ($*'$) sur F (T'), ..., ce que nous exprimerons en disant que f est un homomorphisme de E ($*$, $*'$, ...) dans F (T, T', ...).

Montrons que *la partie* f(E) *de* F *est stable pour chacune des lois* T, T', ...

a) Dans le cas où $*$ et T sont des lois internes, à tout couple (y_1, y_2) d'éléments de f(E) nous pouvons associer un couple (x_1, x_2), pas nécessairement unique, d'éléments de E tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$

$y_1 \,T\, y_2$, qui s'écrit $f(x_1 * x_2)$, est un élément de f(E).

b) Dans le cas de lois externes, à tout élément (α, y) de $\Omega \times f$(E) nous pouvons associer un élément (α, x) de $\Omega \times$ E tel que $y = f(x)$.
$\alpha\, y$, qui s'écrit $f(\alpha\, x)$, est un élément de f(E).

En conclusion f *est un homomorphisme surjectif de* E, *muni des lois* $*$, $*'$, ... *sur* f(E) *muni des lois* T, T', ..., ou plus précisément des restrictions de ces lois. Nous sommes ainsi conduits à étudier plus spécialement les homomorphismes surjectifs.

7° **Les lois associées par un homomorphisme surjectif ont les mêmes propriétés.** — Dans ce qui suit f désigne un homomorphisme surjectif de E sur F.

I) Étudions d'abord le cas des lois internes.

a) Si l'opération $*$ est commutative sur E, *l'opération* T *est commutative sur* F.

En effet, soit y_1 et y_2 deux éléments de F; il leur correspond, d'une façon qui n'est pas nécessairement unique, deux éléments x_1 et x_2 de E tels que

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{et} \qquad y_2 = f(x_2).$$

$$y_1 \mathrm{T} y_2 = f(x_1) \mathrm{T} f(x_2) = f(x_1 * x_2) = f(x_2 * x_1) = f(x_2) \mathrm{T} f(x_1) = y_2 \mathrm{T} y_1.$$

b) Si l'opération $*$ est associative, l'opération T *l'est aussi.* En effet,

$$(y_1 \mathrm{T} y_2) \mathrm{T} y_3 = [f(x_1) \mathrm{T} f(x_2)] \mathrm{T} f(x_3) = f(x_1 * x_2) \mathrm{T} f(x_3) = f[(x_1 * x_2) * x_3]$$
$$y_1 \mathrm{T} (y_2 \mathrm{T} y_3) = f(x_1) \mathrm{T} [f(x_2) \mathrm{T} f(x_3)] = f(x_1) \mathrm{T} f(x_2 * x_3) = f[x_1 * (x_2 * x_3)]$$

et les derniers éléments obtenus à chaque ligne sont égaux par hypothèse.

c) si u est élément neutre pour $*$ dans E, $v = f(u)$ *est élément neutre pour* T *dans* F. En effet $v \mathrm{T} y = f(u) \mathrm{T} f(x) = f(u * x) = f(x) = y$
et $y \mathrm{T} v = f(x) \mathrm{T} f(u) = f(x * u) = f(x) = y.$

d) Si x et x' sont deux éléments symétriques de E, $f(x)$ *et* $f(x')$ *sont deux éléments symétriques de* F.

Par hypothèse $x * x' = u.$
Par suite $f(x * x') = f(x) \mathrm{T} f(x') = f(u) = v.$

e) Dans un homomorphisme surjectif de E $(*, *')$ *sur* F $(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$, *si la loi interne $*'$ est distributive par rapport à la loi interne $*$, la loi interne* T' *est distributive par rapport à la loi interne* T.

En effet, posons $\mathrm{P} = (y_1 \mathrm{T}\, y_2) \mathrm{T}'\, y_3$. Nous avons

$$\mathrm{P} = [f(x_1) \mathrm{T}\, f(x_2)] \mathrm{T}'\, f(x_3) = f(x_1 * x_2) \mathrm{T}'\, f(x_3) = f[(x_1 * x_2) *' x_3]$$

En utilisant l'hypothèse de la distributivité « à droite » de $*'$ par rapport à $*$:

$$\mathrm{P} = f[(x_1 *' x_3) * (x_2 *' x_3] = f(x_1 *' x_3) \mathrm{T}\, f(x_2 *' x_3)$$
et $$\mathrm{P} = (y_1 \mathrm{T}' y_3) \mathrm{T}\, (y_2 \mathrm{T}' y_3).$$

Le résultat précédent montre la distributivité « à droite « de la loi T'.

On vérifierait de même la distributivité « à gauche », ce qui justifie l'énoncé *e*).

II. Supposons maintenant que $*'$ et T' soient des lois externes vis à vis d'un même domaine d'opérateurs Ω. En opérant comme en *e*), le lecteur montrera :

Dans un homomorphisme surjectif de E $(*, *')$ *sur* F $(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ *si la loi externe $*'$ est distributive par rapport à la loi interne $*$, la loi externe* T' *est distributive par rapport à la loi interne* T.

CONSÉQUENCE. — Soit f un homomorphisme surjectif de E $(*, *', \ldots)$ sur F $(\mathrm{T}, \mathrm{T}', \ldots)$. Si les lois $(*, *', \ldots)$ munissent E d'une certaine structure (de groupe, d'anneau, de corps, d'espace vectoriel, ...), ce qui signifie que ces lois vérifient un certain nombre d'axiomes, les lois $(\mathrm{T}, \mathrm{T}', \ldots)$, vérifient les mêmes axiomes, et munissent F d'une structure analogue.

8° Structures quotients. — DÉFINITION I. — *L'ensemble* E *étant muni d'une loi interne* $*$ *et d'une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$, *on dit que* $\mathcal{R}$ *est compatible avec la loi* $*$ (*ou que la loi* $*$ *est stable vis-à-vis de* $\mathcal{R}$) *si*

$$a' \mathcal{R} a \quad \text{et} \quad b' \mathcal{R} b \implies (a' * b') \mathcal{R} (a * b).$$

Sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ la loi interne qui aux classes d'équivalence de a et de b associe la classe d'équivalence de $a * b$ est dite *quotient de la loi* $*$ *par* $\mathcal{R}$ (ou encore loi induite par $*$ sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$).

Le lecteur vérifiera que la commutativité, l'associativité se conservent par *passage au quotient*, que si $*$ admet un élément neutre e, la loi quotient admet la classe de e pour élément neutre, qu'à deux éléments symétriques de E correspondent des classes symétriques de $E/\mathcal{R}$, et enfin que si la loi T est elle aussi stable vis-à-vis de $\mathcal{R}$, la distributivité de T par rapport à $*$ se conserve par passage aux quotients.

EXEMPLES. — Le lecteur verra des applications de la notion précédente aux n^{os} **33, 34, 36, 115.**

DÉFINITION II. — *Si l'ensemble* E *est muni d'une loi externe* ($\bullet$) *vis à vis d'un domaine d'opérateurs* Ω, *et d'une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$, *on dit que* $\mathcal{R}$ *est compatible avec la loi* ($\bullet$) (ou que la loi externe est stable vis à vis de $\mathcal{R}$) *si*

$$\left.\begin{matrix} \forall a, a' \in E \\ \forall \alpha \in \Omega \end{matrix}\right\} \quad a' \mathcal{R} a \implies (\alpha \bullet a') \mathcal{R} (\alpha \bullet a)$$

Sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ la loi externe qui à la classe de a et à l'opérateur α associe la classe de $\alpha \bullet a$ est dite *quotient de la loi externe par* $\mathcal{R}$.

CONSÉQUENCE. — Si E est muni d'une structure algébrique et d'une relation d'équivalence compatible avec toutes les lois de structure, on dispose sur l'ensemble-quotient $E/\mathcal{R}$ d'une structure-quotient.

9° Factorisation canonique d'un homomorphisme. — *a*) THÉORÈME. — *Le produit de deux homomorphismes* (resp. *homomorphismes surjectifs*) *est un homomorphisme* (resp. *un homomorphisme surjectif*).

Soit f un homomorphisme de E ($*$) dans F (T) et g un homomorphisme de F (T) dans G ($\perp$).

$h = g \circ f$ est une application de E dans G (qui est surjective si f et g sont surjectives).

S'il s'agit de lois internes on a, pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$h(x * y) = g[f(x) \top f(y)] = g[f(x)] \perp g[f(y)] = h(x) \perp h(y).$$

S'il s'agit de lois externes, on a, pour tout $(\alpha, x) \in \Omega \times E$

$$h(\alpha * x) = g[\alpha \top f(x)] = \alpha \perp g[f(x)[= \alpha \perp h(x).$$

La proposition en résulte.

b) THÉORÈME. — *Tout homomorphisme* f *de* E ($*$, ...) *dans* F (T, ...) *peut être factorisé en le produit de*

un homomorphisme surjectif de E *sur un ensemble-quotient* $E/\mathcal{R}$

un isomorphisme de $E/\mathcal{R}$ *sur* $f(E)$

un homomorphisme injectif de $f(E)$ *dans* F (dont on n'a pas à tenir compte si f est surjectif).

Reprenons la factorisation canonique $f = i \circ \psi \circ \varphi$ de l'application f étudiée au n° **18**, 8°, avec les mêmes notations, à cela près que E et F remplacent ici A et B :

$$x \in E \xrightarrow{\varphi} \bar{x} \in E/\mathcal{R} \xrightarrow{\psi} y \in f(E) \xrightarrow{i} y \in F \qquad (y = f(x))$$

$\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence « $x \mathcal{R} x'$ signifie $f(x) = f(x')$ ». Elle est compatible avec les lois $*$ .... En effet à partir de

$$x_1 \mathcal{R} x_1' \qquad \text{et} \qquad x_2 \mathcal{R} x_2'$$

on a, suivant qu'il s'agit de lois internes ou externes,

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) \top f(x_2) = f(x_1') \top f(x_2') = f(x_1' * x_2')$$

ou
$$f(\alpha * x_1) = \alpha \top f(x_1) = \alpha \top f(x_1') = f(\alpha \top x_1').$$

Soit $\bar{*}$ la loi-quotient (interne ou externe sur $E/\mathcal{R}$) associée à la loi $*$.

I. Selon que $*$ est interne ou externe

$$\begin{cases} \bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y} & \text{s'écrit} \quad \varphi(x) \bar{*} \varphi(y) = \varphi(x * y) \\ \alpha * \bar{x} = \overline{\alpha * x} & \text{s'écrit} \quad \alpha \bar{*} \varphi(x) = \varphi(\alpha * x) \end{cases}$$

ce qui montre que la surjection φ est un homomorphisme de $E(*)$ sur $E/\mathcal{R}(\bar{*})$.

II. Selon que $*$ est interne ou externe

$$f(x) \top f(y) = f(x * y) \quad \text{donne} \quad \psi(\bar{x}) \top \psi(\bar{y}) = \psi(\overline{x * y}) \quad \text{ou} \quad \psi(\bar{x} \bar{*} \bar{y})$$
$$\alpha \top f(x) = f(\alpha * x) \quad \text{donne} \quad \alpha \top \psi(\bar{x}) = \psi(\overline{\alpha * x}) \quad \text{ou} \quad \psi(\alpha \bar{*} \bar{x})$$

ce qui montre que la bijection ψ est un isomorphisme de $E/\mathcal{R}(\bar{*})$ sur $f(E)$ muni de la restriction de la loi T.

III. Il est bien évident que l'injection i est un homomorphisme de $f(E)$ dans F, les deux ensembles étant munis de la loi T.

10° **Isomorphisme pour l'ordre.** — DÉFINITION. — Soient E et F deux ensembles totalement ordonnés, dans lesquels ces relations d'ordre se notent respectivement $\leqslant$ et $\prec$. *S'il existe une bijection f de* E *sur* F, *on dit que f respecte l'ordre, ou encore que f est un isomorphisme pour l'ordre, quand, x et x' étant deux éléments de* E,

$$x \leqslant x' \iff f(x) \prec f(x').$$

VI. LES ENTIERS NATURELS

24. ***L'ensemble des entiers naturels.*** — 1° La construction axiomatique de l'ensemble des entiers naturels ne figure pas au programme des classes préparatoires. Une telle construction est possible de diverses façons (1); quelle que soit la construction adoptée, elle suppose acquis par l'éducation, l'usage, la coutume..., l'emploi d'un certain nombre de mots du langage courant; un être humain qui n'aurait pas appris à compter dans son enfance serait-il capable, parvenu à l'âge adulte, de comprendre une quelconque des constructions axiomatiques élaborées à ce propos? (2).

Nous nous bornerons à ébaucher une des méthodes possibles, sans nous

---

(1) Madame Lelong, dans son ouvrage « Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré » a étudié deux de ces constructions possibles.

(2) En épigraphe d'un chapitre du cours d'Analyse de l'École Polytechnique, en 1958-59, on lisait la phrase suivante de Saint-Thomas d'Aquin « Principium totius nostrae cognitionis est a sensu ». (Le point de départ de toute notre connaissance se trouve dans la perception sensorielle).

astreindre à donner toutes les démonstrations. Il importe de connaître, par contre, les propriétés des entiers naturels qui seront utilisées dans la suite pour la construction d'autres ensembles.

2° **Ensemble naturel.** — *a*) Nous admettons l'existence d'un ensemble non vide, totalement ordonné, $\mathfrak{N}$, possédant les trois propriétés suivantes :

Axiome $\mathfrak{N}_1$: *Toute partie non vide de* $\mathfrak{N}$ *a un plus petit élément.*

Axiome $\mathfrak{N}_2$: *Toute partie majorée non vide de* $\mathfrak{N}$ *a un plus grand élément.*

Axiome $\mathfrak{N}_3$: $\mathfrak{N}$ *n'a pas de plus grand élément.*

La relation d'ordre dans $\mathfrak{N}$ est l'inégalité au sens large (notée $x \leqslant y$).

DÉFINITION. — **On appelle ensemble naturel tout ensemble totalement ordonné $\mathfrak{N}$ possédant les propriétés $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$.**

Nous admettrons que tous les ensembles naturels sont isomorphes pour l'ordre (n° 23, 10°).

b) *Conséquences des axiomes.* — Soit $\mathfrak{N}$ un ensemble naturel.

I) $\mathfrak{N}$ *a un plus petit élément*, soit e (conséquence de $\mathfrak{N}_1$).

II) *Tout élément* a *de* $\mathfrak{N}$ *a un successeur* a' (14, 6°).

Soit X l'ensemble des éléments x tels que $x \leqslant a$, et soit Y le complémentaire de X dans $\mathfrak{N}$.

Y n'est pas vide, sinon a serait le plus grand élément de $\mathfrak{N}$ (contradiction avec $\mathfrak{N}_3$).

Y a donc (d'après $\mathfrak{N}_1$) un plus petit élément, soit a'.

Si $]a, a'[$ n'était pas vide, il existerait un élément b de $\mathfrak{N}$ tel que $a < b < a'$; b serait un majorant de X, $b \notin X \Rightarrow b \in Y$, d'où une contradiction avec l'existence de a'.

Finalement, puisque $]a, a'[$ est vide, a' est le successeur de a.

III. *Tout élément de* $\mathfrak{N}$, *distinct du plus petit, a un prédécesseur.*

Soit a un élément de $\mathfrak{N}$, distinct de e. L'ensemble des éléments x de $\mathfrak{N}$ tels que $x < a$ n'est pas vide, est majoré par a, et par suite, d'après $\mathfrak{N}_2$, a un plus grand élément a_1.

Si $]a_1, a[$ n'était pas vide, il existerait un élément b de $\mathfrak{N}$ tel que $a_1 < b < a$ ce qui est contradictoire avec l'existence de a_1.

Finalement, puisque $]a_1, a[$ est vide, a_1 est le prédécesseur de a.

3° **Ensemble des entiers naturels.** — Puisque tous les ensembles naturels sont isomorphes pour l'ordre, nous nous référerons à l'un d'eux, appelé ensemble des entiers naturels, dans lequel nous désignerons par 0 le plus petit élément, par 1, 2, 3, ... les successeurs de 0, 1, 2, ... L'ensemble des entiers naturels est désigné par N, l'élément générique de N est désigné par n.

$$\mathrm{N} = \{\, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \,\}.$$

Comme tout ensemble naturel, N possède les propriétés suivantes :

a) N est totalement ordonné;

b) N a un plus petit élément, 0;

c) N n'a pas de plus grand élément;

d) tout élément de N a un successeur, et tout élément autre que 0 a un prédécesseur;

e) toute partie non vide de N a un plus petit élément, et, si elle est majorée, un plus grand élément.

Nous utiliserons aussi l'ensemble

$$N^{\bullet} = N - \{ 0 \}$$

qui est un autre modèle d'ensemble naturel.

En associant à tout élément de N son successeur, on détermine une bijection de N sur $N^{\bullet}$; ces deux ensembles sont donc équipotents.

Lorsqu'on utilise $N^{\bullet}$, on dit, souvent, parce qu'il ne peut en résulter aucune ambiguïté, que le segment [1, n] de $N^{\bullet}$ est formé par les n premiers entiers naturels.

4° **Récurrence.** — Soit $\mathfrak{L}$ une propriété vérifiée par certains entiers naturels, avec les hypothèses suivantes :

(H_1) $\mathfrak{L}$ est vérifiée par un entier a;

(H_2) si $\mathfrak{L}$ est vérifiée par l'entier m, $\mathfrak{L}$ est vérifiée par le successeur m' de m.

On traduit (H_2) en disant que la propriété $\mathfrak{L}$ est *récurrente* dans N.

Appelons alors P (resp. Q) l'ensemble des entiers naturels x ($x \geqslant a$) qui vérifient $\mathfrak{L}$ (resp. qui ne vérifient pas $\mathfrak{L}$).

Si Q n'est pas vide, Q admet un plus petit élément, soit $q \geqslant a$; q est distinct de a à cause de (H_1); alors q est supérieur à a; q admet un prédécesseur $q_1 \geqslant a$; q_1 appartient à P; mais alors le successeur q de q_1 vérifie $\mathfrak{L}$, d'où une contradiction.

Finalement Q est vide, et P comprend tous les entiers supérieurs ou égaux à a.

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Si une propriété $\mathfrak{L}$ récurrente dans N est vérifiée pour un entier a, elle est vérifiée pour tout nombre naturel supérieur ou égal à a.**

Ce théorème sert de fondement au raisonnement dit « *par récurrence* ».

25. ***Ensembles finis.*** — 1° On démontre que s'il existe une injection du segment [1, n] de N sur le segment [1, m] de N, alors $n \leqslant m$ (on utilise pour cela une récurrence sur n).

Il en résulte que s'il existe une bijection de [1, n] sur [1, m], alors $n = m$.

Par suite, s'il existe une bijection d'un même ensemble E, l'une sur [1, n], l'autre sur [1, m], nécessairement $n = m$.

Cette étude justifie la partie *b*) de la définition suivante :

2° DÉFINITION. — **On dit qu'un ensemble** E **est fini dans chacun des deux cas suivants :**

a) E **est vide; on dit alors qu'il a zéro élément;**

b) E **a même puissance qu'un segment** [1, *n*] **de l'ensemble** N; **on dit alors que** E **a** *n* **éléments.**

On dit encore que n est le nombre des éléments de E, ou que n est le cardinal de E, et l'on écrit

$$\text{card E} = n.$$

En particulier, card [1, n] = n. On convient d'écrire card $\varnothing = 0$.

Puisqu'il existe une bijection de E sur [1, n], on peut désigner par $x_1, x_2, \ldots x_n$ les éléments de E associés par la bijection précédente aux divers naturels 1, 2, ..., n.

Nous écrirons

$$\text{E} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

Nous dirons aussi que la bijection considérée permet de *ranger* l'ensemble E.

3° A partir des propriétés du n° **24**, 3°, on peut démontrer les propriétés suivantes :

I) Toute partie A d'un ensemble fini E est finie, et card A $\leqslant$ card E.

L'intersection d'une famille finie d'ensemble finis est finie.

II) Si f est une application de A dans B, et si A est fini, f(A) est fini, et

$$\text{card } f(\text{A}) \leqslant \text{card A}.$$

card f(A) = card A si et seulement si f est injective.

III) La réunion d'une famille finie d'ensembles finis est finie.

4° **Opérations sur** N. — Soit a et b deux éléments de N; associons-leur deux ensembles (nécessairement finis) A et B admettant respectivement pour cardinaux a et b.

On pose les définitions suivantes :

I) *Addition* : $a + b = \text{card } (\text{A} \cup \text{B})$

à condition que A et B soient disjoints.

II) *Multiplication* : $ab = \text{card } (\text{A} \times \text{B})$.

On démontre en effet que les seconds membres sont invariants lorsqu'on remplace A et B par des ensembles A′ et B′ ayant respectivement même puissance que A et B.

On démontre alors les propriétés de ces opérations :

— associativité, commutativité;

— distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

— 0 et 1 sont respectivement élément neutre de l'addition et de la multiplication;

— tout entier naturel est régulier pour l'addition; tout entier naturel non nul est régulier pour la multiplication.

26. *Ensembles dénombrables. Suites.* — 1° **Ensemble infini.** — Nous avons vu que les segments [1, n] de N sont les modèles des ensembles qualifiés de finis.

Un ensemble E est dit *infini* s'il n'est pas fini, c'est-à-dire si, quel que soit l'entier naturel n, il n'existe pas de bijection de E sur le segment [1, n] de N.

L'ensemble N lui-même est un ensemble infini puisque, n'ayant pas de plus grand élément, il ne peut être mis en correspondance bijective avec un de ses segments [1, n]. On donne alors la définition suivante :

2° Ensemble dénombrable. DÉFINITION. — **Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe au moins une bijection de E sur l'ensemble N des entiers naturels.**

Les ensembles dénombrables sont donc ceux qui ont même puissance que N; ils sont infinis, mais il existe des ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables.

EXEMPLES. — I. L'ensemble N_p des entiers pairs est dénombrable; il suffit d'invoquer la bijection

$$2n(\in N_p) \quad \leftrightarrow \quad n(\in N).$$

II. — L'ensemble N_i des entiers impairs est dénombrable; il suffit d'invoquer la bijection

$$2n + 1(\in N_i) \quad \leftrightarrow \quad n(\in N).$$

III. — Plus généralement *toute partie infinie* E *de l'ensemble* N^* *est dénombrable.*

En effet l'ensemble E se trouve ordonné par la restriction de la relation d'ordre de N.

On peut alors établir une bijection φ de N^* sur E de la façon suivante.

E, partie non vide de N, a un plus petit élément, soit $\varphi(1) \geqslant 1$.

$\{ E - \varphi(1) \}$ a un plus petit élément,

soit $\varphi(2) \geqslant 2$. Par récurrence, on associe à tout élément n de N^* un élément et un seul, $\varphi(n)$, de E, soit $\varphi(n) \geqslant n$.

Inversement, un élément p de E figure nécessairement dans l'ensemble

$$\{ \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(p) \}$$

et on peut lui associer un élément et un seul, n, de N^*.

L'ensemble E est donc dénombrable.

THÉORÈME. — *Un ensemble* E *est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection de* E *sur un ensemble dénombrable* F *arbitrairement choisi.*

Par hypothèse, F étant dénombrable, il existe une bijection, φ, de F sur N.

I. — Supposons l'ensemble E tel qu'il existe une bijection, f, de E sur F; alors $\varphi \circ f$ est une bijection de E sur N; E est dénombrable.

II. — Supposons E dénombrable; il existe alors une bijection ψ de E sur N; alors $\varphi^{-1} \circ \psi$ est une bijection de E sur F.

COROLLAIRE. — *Toute partie infinie* E' *d'un ensemble dénombrable* E *est dénombrable.*

Cet énoncé résulte de ce que la bijection de E sur N a pour conséquence une bijection de E' sur une partie de N, partie qui est dénombrable d'après l'exemple III précédent.

3° THÉORÈME. — *Le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Considérons d'abord deux ensembles E et F, d'éléments génériques e_p et f_q. L'élément générique de l'ensemble produit $G = E \times F$ est (e_p, f_q) que nous pouvons noter $g_{p,q}$. Classons les éléments de G de la façon suivante :

— groupons dans un système (S_m) les éléments $g_{p,q}$ tels que $p + q = m$, m étant un nombre naturel donné. Dans chaque système (S_m), les $m - 1$ éléments sont classés par valeurs croissantes du premier indice.

— classons les systèmes (S_m) par valeurs croissantes de m.

On obtient le tableau suivant (où α_m désigne la somme des $m - 1$ premiers entiers naturels)

1	2	3	4	5	6	....	$\alpha_m + 1$	$\alpha_m + 2$		$\alpha_m + m$	
$g_{1,1}$	$g_{1,2}$	$g_{2,1}$	$g_{1,3}$	$g_{2,2}$	$g_{3,1}$	....	$g_{1,m}$	$g_{2,m-1}$	....	$g_{m,1}$	....
(S_2)	(S_3)		(S_4)				(S_{m+1})				

qui réalise une correspondance biunivoque entre N et G.

La propriété est ainsi démontrée dans le cas de deux ensembles. On l'étend de proche en proche à celui d'un nombre fini d'ensembles dénombrables.

4° THÉORÈME. — *La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables disjoints est un ensemble dénombrable.*

Soit E_p l'ensemble de la famille considérée associé à l'entier naturel p.

Les éléments de E_p peuvent être désignés par

$$E_p = \{ x_{p,1} \quad x_{p,2}, \quad \ldots, \quad x_{p,q}, \quad \ldots \}.$$

Comme les E_p sont disjoints, en faisant correspondre à l'élément $x_{p,q}$ de la réunion des E_p le couple (p, q) de N × N, on établit une bijection de l'ensemble $\bigcup E_p$ sur le produit cartésien N × N, qui est dénombrable, d'après le 3°.

COROLLAIRE. — Le même énoncé s'applique si les ensembles E_p ne sont pas disjoints; l'étude précédente établit en effet une bijection de $\bigcup E_p$ sur une partie du produit cartésien N × N, partie qui est dénombrable.

5° **Suites.** — DÉFINITION I. — **Toute application de l'ensemble N des entiers naturels dans un ensemble quelconque E est dite suite sur E.**

Les notations habituelles des fonctions conduiraient à désigner par une lettre, u par exemple, la suite, c'est-à-dire l'application. L'image dans E d'un entier naturel n s'écrirait $u(n)$. Nous nous conformerons à la tradition en modifiant légèrement ces notations :

Notation : $1, 2, \ldots, n, \ldots \in N \longrightarrow u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \in E.$

On dit qu'il s'agit de la suite de terme général u_n. On la note $\{ u_n \}$.

Insistons sur le fait qu'il faut distinguer la suite, qui est une fonction, et l'ensemble des termes de la suite, sous-ensemble de E que l'on peut désigner par $u(N)$.

REMARQUE. — Si les éléments u_n de la suite sont tous distincts, la correspondance entre N et $u(N)$ est biunivoque. L'ensemble $u(N)$ est dénombrable. Si le nombre des éléments u_n distincts est fini, $u(N)$ est fini.

DÉFINITION II. — *Toute application de l'ensemble* N × N *dans un ensemble quelconque* E *est dite suite double sur* E.

Notation : $(p, q) \in N \times N \longrightarrow u_{p,q} \in E.$

D'après les 2° et 3°, l'ensemble des termes d'une suite double est fini ou dénombrable.

EXERCICES

1. — Soient A, B, C trois ensembles quelconques. Démontrer que

$$(A \cup B) \subset (A \cup C) \quad et \quad (A \cap B) \subset (A \cap C) \Longrightarrow B \subset C.$$

2. — On projette les points de l'espace sur un plan P parallèlement à une même direction. On établit dans l'ensemble E des points de l'espace la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par la phrase « deux points ont même projection ». Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence? Quel est l'ensemble quotient? Résoudre la même question pour la projection sur une droite parallèlement à un plan.

3. — Un ensemble E contient un nombre *fini* d'éléments. On définit une application f de E dans E telle que tout élément de $f(E)$ soit le transformé par f d'un seul élément de E. Démontrer que f est une application *surjective*.

4. — Soit R l'ensemble des nombres réels; soit f l'application de R^2 dans R^2 qui, à tout couple rangé (x, y) associe le couple $(X = x + y, Y = xy)$. On interprétera (x, y) [resp (X, Y)] comme les coordonnées d'un point m [resp. M] dans un plan p [resp. P] rapporté à un repère cartésien.

Quel est l'ensemble image $f(R^2)$ de R^2 par f? Combien existe-t-il d'éléments (x, y) de R^2 que f transforme en un élément donné (X, Y) de $f(R^2)$. Indiquer les constructions géométriques correspondantes.

5. — On donne deux ensembles E et F. Soit A une application de E dans E. Soit f une application injective de E sur F. Aux éléments α et $\alpha' = A(\alpha)$ de E, f associe les éléments $\beta = f(\alpha)$ et $\beta' = f(\alpha')$ de F. Montrer que l'application B : $\beta \multimap \beta'$ est une application de F dans F, qui est dite la *transmuée de* A *par f*. Montrer que

$$B = f \circ A \circ f^{-1},$$

que A est la transmuée de B par f^{-1}, et enfin que si l'une des applications A, B est injective, il en est de même de l'autre.

CHAPITRE II

GROUPES. ANNEAUX. CORPS.

I. STRUCTURE DE GROUPE

27. *Axiomes de la structure de groupe.* — 1° DÉFINITION. — **On dit qu'un ensemble E possède une structure de groupe (ou encore est un groupe) si, sur cet ensemble, existe une loi de composition interne $*$ partout définie possédant les propriétés suivantes :**

1° la loi est associative :

$$(a * b) * c = a * (b * c), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathrm{E}.$$

2° la loi admet un élément neutre e :

$$a * e = e * a = a, \qquad \forall\, a \in \mathrm{E}.$$

3° tout élément a de E admet un symétrique a' (unique d'après 21, 3°)

$$a' * a = a * a' = e.$$

Notons que $e \in \mathrm{E}$ implique $\mathrm{E} \neq \varnothing$.

2° Exemples de groupes. — *a*) L'ensemble des translations $\mathcal{T}$ de l'espace constitue un groupe, la composition des translations $\mathcal{T}(\vec{V})$ et $\mathcal{T}(\vec{V}')$ étant la translation $\mathcal{T}(\vec{V} + \vec{V}')$. L'élément neutre est la translation $\mathcal{T}(\vec{0})$; les translations $\mathcal{T}(\vec{V})$ et $\mathcal{T}(\text{opp } \vec{V})$ sont des éléments symétriques.

b) L'ensemble des rotations $\mathcal{R}$ autour d'un point O du plan constitue un groupe, la composition des rotations $\mathcal{R}(\theta)$ et $\mathcal{R}(\theta')$ étant la rotation $\mathrm{R}(\theta + \theta')$. L'élément neutre est la rotation $\mathcal{R}(0)$; les rotations $\mathcal{R}(\theta)$ et $\mathcal{R}(-\theta)$ sont des éléments symétriques.

c) L'ensemble des homothéties $\mathcal{H}$ de centre O, dans l'espace, constitue un groupe, la composition des homothéties $\mathcal{H}(k)$ et $\mathcal{H}(k')$ étant l'homothétie $\mathcal{H}(kk')$. L'élément neutre est l'homothétie $\mathcal{H}(1)$; les homothéties $\mathcal{H}(k)$ et $\mathcal{H}\left(\frac{1}{k}\right)$ sont des éléments symétriques.

d) L'ensemble des déplacements $\mathcal{D}$ dans l'espace constitue un groupe.

e) Il ne faut pas croire que toutes les transformations géométriques d'un type donné constituent toujours un groupe : l'ensemble des symétries par rapport à une droite, dans

le plan n'est pas un groupe; l'ensemble des inversions, dans le plan (ou dans l'espace), n'est pas un groupe.

f) Nous créerons ultérieurement d'autres groupes. Constatons dès maintenant :

L'ensemble N des entiers naturels muni de l'addition (resp. de la multiplication) n'est pas un groupe, car un élément de N n'admet pas de symétrique.

28. *Propriétés générales d'un groupe.* — Dans tout ce paragraphe, les lettres a, b, c,... x, y, éventuellement accentuées ou indexées, désignent des éléments du groupe étudié E.

1° **Régularité.** — *L'égalité* (1) $b * a = c * a$ *entraîne* $b = c$; en d'autres termes : *tous les éléments d'un groupe sont réguliers par la loi du groupe* (24, 2°). En effet si a' est le symétrique de a, l'égalité (1) entraîne

$$(b * a) * a' = (c * a) * a'$$

ou $$b * (a * a') = c * (a * a')$$

ou $$b * e = c * e$$

et enfin $$b = c.$$

On exprime cette propriété en disant que l'égalité (1) peut être simplifiée à droite par a; de même l'égalité $a * b = a * c$ entraîne $b = c$; on dit qu'elle est simplifiable à gauche par a.

2° **L'opération du groupe admet des opérations inverses** (24, 4°). Soit en effet à résoudre l'équation en x ($x \in$ E)

(2) $$x * b = c.$$

Supposons que (2) admette une solution, soit x_0 :

$$\text{par hypothèse } x_0 * b = c; \quad (2')$$

soit b' le symétrique de b : (2') entraîne $(x_0 * b) * b' = c * b'$.

Le premier membre précédent s'écrit $x_0 * (b * b')$ ou $x_0 * e$ ou x_0; si x_0 existe, sa valeur nécessaire est donc $c * b'$.

Inversement, l'élément $c * b'$ vérifie-t-il l'équation (2)? Remplaçons x, dans le premier membre de (2), par cette valeur; celui-ci devient

$$(c * b') * b \quad \text{ou} \quad c * (b' * b) \quad \text{ou} \quad c * e \quad \text{et enfin} \quad c.$$

Nous avons ainsi montré que l'équation (2) admet une solution et une seule

$$c * b'.$$

De même, on montrerait que l'équation en y ($y \in$ E)

(3) $$a * y = c$$

admet une solution et une seule $y = a' * c$, a' étant le symétrique de a.

3° Symétrique du composé de plusieurs éléments.

Soit u le symétrique de $a * b$: $(a * b) * u = e$.
Par associativité : $a * (b * u) = e$.
Multiplions à gauche par a' : $b * u = a' * e$ ou a'.
Multiplions à gauche par b' : $u = b' * a'$.

En d'autres termes :

$$\text{sym}\,(a * b) = \text{sym}\,b * \text{sym}\,a.$$

Plus généralement $\boxed{\text{sym}\,(a * b * c) = \text{sym}\,c * \text{sym}\,b * \text{sym}\,a}$

car $\text{sym}\,[(a * b) * c] = \text{sym}\,c * \text{sym}\,(a * b)$
$= \text{sym}\,c * (\text{sym}\,b * \text{sym}\,a).$

et la formule visée s'en déduit par associativité.

4° **Cas d'un groupe commutatif.** — Si l'opération du groupe est commutative, on dit que le groupe est *commutatif* (ou encore abélien).

I. — L'opération $*$ étant commutative et associative, le résultat du n° **23**, 4° est applicable; pour obtenir $a * b * c * d$, on peut permuter les éléments ou remplacer plusieurs d'entre eux par leur composé.

II. — Le symétrique du composé de plusieurs éléments peut s'obtenir sans considération de leur ordre :

$$\text{sym}(a * b) = \text{sym}\,a * \text{sym}\,b$$
$$\text{sym}(a * b * c) = \text{sym}\,a * \text{sym}\,b * \text{sym}\,c$$
$$\text{ou} \quad \text{sym}\,a * \text{sym}\,c * \text{sym}\,b.$$

III. — Dans un groupe commutatif, il n'existe qu'une seule opération inverse, et l'équation

$$a * x = c \quad (\text{ou} \quad x * a = c)$$

admet pour solution $c * a'$ (ou $a' * c$).

Si l'on désigne alors par $\perp$ l'opération inverse, on peut écrire :

$$a * b = c \iff b = c \perp a$$

ou à cause de la commutativité $a = c \perp b$

mais comme $b = c * \text{sym}\,a$, on peut finalement écrire

$$c \perp a = c * \text{sym}\,a.$$

Composer c avec a par l'opération inverse de celle du groupe, c'est composer c avec le symétrique de a par l'opération du groupe.

En particulier, e étant l'élément neutre du groupe,

$$a * \text{sym}\,a = e \iff \text{sym}\,a = e \perp a.$$

L'opération inverse $\perp$ n'est pas commutative, d'après son origine même. Elle n'est pas associative, car

$$\begin{aligned}(a \perp b) \perp c &= (a * \text{sym } b) * \text{sym } c \\ &= a * (\text{sym } b * \text{sym } c) \\ &= a * \text{sym } (b * c) \quad \text{ou} \quad a \perp (b * c). \\ a \perp (b \perp c) &= a * \text{sym } (b * \text{sym } c) \\ &= a * \text{sym } b * c = (a * c) \perp b.\end{aligned}$$

Comme l'opération $\perp$ effectuée sur a se ramène à l'opération $*$ effectuée sur sym a, une suite quelconque d'opérations $*$ et $\perp$ se ramène uniquement à des opérations $*$, et on peut alors permuter les termes de façon quelconque, et remplacer plusieurs d'entre eux par le résultat de l'opération effectuée sur eux.

Ainsi, soit $u = \{ [(a \perp b) * c] \perp d \{ \perp f$.
On écrit successivement :

$$\begin{aligned}u &= \} [(a * \text{sym } b) * c] * \text{sym } d \{ * \text{sym } f \\ u &= (a * c) * (\text{sym } b * \text{sym } d * \text{sym } f) \\ u &= (a * c) * \text{sym } (b * d * f) \\ u &= (a * c) \perp (b * d * f).\end{aligned}$$

On peut ainsi réunir les éléments précédés de $*$, ceux qui sont précédés de $\perp$, et ne faire qu'une seule fois une opération $\perp$

29. ***Sous-groupes.*** — 1° DÉFINITION. — **Soit G un groupe pour la loi interne $*$ et H une partie de G qui est fermée pour cette loi,** ce qui signifie

$$a \in H \quad \text{et} \quad b \in H \implies a * b \in H.$$

Si la restriction à H de la loi $*$ confère à cet ensemble une structure de groupe, on dit que H est un sous-groupe de G. Au titre de groupe, H ne peut être vide.

EXEMPLES. — *a*) Les translations d'un plan P forment un sous-groupe du groupe des translations de l'espace.
b) Les translations de l'espace forment un sous-groupe du groupe des déplacements.
c) L'ensemble du nombre 0 et des nombres pairs, positifs ou négatifs est un sous-groupe du groupe additif des entiers relatifs.

2° **Un groupe G et un quelconque de ses sous-groupes H ont le même élément neutre.** Désignons par e et ε les éléments neutres de G et de H, sans qu'on sache à l'avance si $e = \varepsilon$ ou $e \neq \varepsilon$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour H : } \varepsilon * \varepsilon = \varepsilon \\ \text{pour G : } \varepsilon * e = \varepsilon\end{array}\right\} \implies \varepsilon * \varepsilon = \varepsilon * e \implies \varepsilon = e. \quad \text{(simplification).}$$

Conséquence. — Les symétriques a' et α' d'un même élément a de H dans G et dans H sont confondus. En effet ces symétriques vérifient

$$\left.\begin{array}{l}a * a' = e \\ a * \alpha' = \varepsilon = e\end{array}\right\} \implies a * a' = a * \alpha' \implies a' = \alpha' \quad \text{(simplification).}$$

3° **Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie d'un groupe en soit un sous-groupe.** — THÉORÈME I. — **G étant un groupe pour la loi $*$, une partie non vide H de G en est un sous-groupe si et seulement si**

a) **H est fermée pour la loi $*$**

$$b)\ \left\{\begin{array}{l} a \in H \\ a' = \text{sym } a \quad \text{dans} \quad G \end{array}\right\} \Longrightarrow a' \in H.$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement, supposons-les remplies; la loi induite (19, 3°) sur la partie fermée H de G par la loi associative $*$ est elle-même associative. Non vide, H possède au moins un élément α; d'après *b*), le symétrique α' de α dans $*$ vérifie $\alpha' \in H$; d'après *a*), on a $\alpha * \alpha' \in H$, ou $e \in H$; on en déduit que la loi induite admet e pour élément neutre et que le symétrique dans $*$ d'un élément quelconque a de H est aussi le symétrique de a dans la loi induite.

THÉORÈME II. — **G étant un groupe pour la loi $*$, une partie non vide H de G en est un sous-groupe si et seulement si**

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a \in H, \quad b \in H \\ b' = \text{sym } b \text{ dans G} \end{array}\right\} \Longrightarrow a * b' \in H.$$

N) Supposons que H soit un sous-groupe de G; le symétrique b' de $b \in H$ est un élément de H, et le composé $a * b'$ est aussi un élément de H.

S) Supposons la condition (1) réalisée. Non vide, H contient un élément α.

En choisissant $a = \alpha$ et $b = \alpha$, (1) fournit : $e \in H$.

En choisissant $a = e$, $b \in H$, on a $e * b' \in H$; donc $b' \in H$.

En choisissant alors dans H les éléments a et b', on a d'après (1), $a *$ sym $b' \in H$, c'est-à-dire $a * b \in H$; H est donc fermée pour la loi $*$.

Les conditions suffisantes du théorème I sont ainsi réalisées.

REMARQUE. — Le lecteur vérifiera que le théorème II s'applique encore quand on remplace (1) par

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a \in H, \quad b \in H \\ a' = \text{sym } a \text{ dans G} \end{array}\right\} \Longrightarrow a' * b \in H.$$

4° **Intersection de sous-groupes.** — Soit H et H' deux sous-groupes du groupe G et soit a et b deux éléments quelconques de $H \cap H'$. Le théorème II, vrai pour H et H', est vrai aussi pour $H \cap H'$; il en résulte que $H \cap H'$ *est un sous-groupe de* G.

Plus généralement, **l'intersection d'une famille finie ou infinie de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.**

30. ***Vocabulaire et notations.*** — Jusqu'à présent nous avons désigné par $*$ l'opération du groupe. Le tableau suivant fait connaître la terminologie et les notations qui sont le plus souvent employées.

L'opération du groupe se nomme	addition (groupe commutatif)	multiplication (cas général)
la notation est dite	additive	multiplicative
le composé $a * b$ est dit	somme	produit
et se note	$a + b$	ab
l'élément neutre se note	0 ou e	1 ou e
le symétrique est dit	opposé	inverse
l'équation	$x + a = b$	$xa = b$ | $ax = b$
a pour solution	$x = b + \text{opp } a$	$x = b(\text{inv}\,a)$ | $x = (\text{inv}\,a)\,b$
on écrit aussi	$x = b + (-a)$	
	ou	$x = ba^{-1}$ | $x = a^{-1}b$
	$x = b - a$	
en notant	$-a$ l'opposé de a	a^{-1} l'inverse de a
	$-(a + b + c) = -a - b - c$	$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$
	$-(a - b) = -a + b$	$(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$
itération de l'opération		
$\underbrace{a * a \ldots * a}_{n \text{ termes}}$ se note (cf. n° 35)	na (multiple de a)	a^n (puissance de a)

REMARQUE. — Les règles usuelles de calcul auxquelles le lecteur est habitué à propos de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs s'étendent aux calculs effectués sur les éléments d'un groupe commutatif noté additivement.

Les règles usuelles de calcul auxquelles le lecteur est habitué à propos des rapports des nombres relatifs ne s'étendent aux calculs effectués sur les éléments d'un groupe noté multiplicativement que si ce groupe est commutatif.

31. ***Groupes-quotients.*** — 1° Soit G un groupe dans lequel la loi de structure est notée multiplicativement, l'élément neutre étant désigné par e. Cherchons s'il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec la loi de structure.

a) Analyse. — Supposons, pour commencer, qu'il existe une relation d'équivalence compatible *à gauche* avec la loi de structure, c'est à dire telle que

$$\forall\, a \in G, \qquad x\mathcal{R}y \implies axRay.$$

En particulier, pour $a = x^{-1}$,

$$x\mathcal{R}y \implies x^{-1}x\mathcal{R}x^{-1}y \qquad \text{ou} \qquad e\mathcal{R}x^{-1}y.$$

Autrement dit, H désignant la classe d'équivalence de e, pour la relation $\mathcal{R}$,

$$x\mathcal{R}y \implies x^{-1}y \in \mathrm{H}.$$

Si alors a et b sont deux éléments quelconques de H, ils appartiennent à une même classe, et on a $a\mathcal{R}b$, ce qui entraîne $a^{-1}b \in \mathrm{H}$; le théorème II du n° **29**, 3° permet d'affirmer que H est un sous-groupe de G.

Synthèse. — Supposons que H soit l'un quelconque des sous-groupes de G. Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ dans G définie par

$$\text{« } x\mathcal{R}y \text{ signifie } x^{-1}y \in \mathrm{H} \text{ ».}$$

$\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x,\ x^{-1}x = e$; or $e \in \mathrm{H}$; d'où $x^{-1}x \in \mathrm{H}$,

$\mathcal{R}$ est symétrique : $x^{-1}y \in \mathrm{H} \implies (x^{-1}y)^{-1} \in \mathrm{H}$ ou $y^{-1}x \in \mathrm{H}$,

$\mathcal{R}$ est transitive :

$$x^{-1}y \in \mathrm{H} \text{ et } y^{-1}z \in \mathrm{H} \implies x^{-1}yy^{-1}z \in \mathrm{H} \text{ ou } x^{-1}z \in \mathrm{H}.$$

$\mathcal{R}$ est ainsi une relation d'équivalence. En outre

$$\forall a \in \mathrm{G},\ x^{-1}y \in \mathrm{H} \text{ s'écrit } (ax)^{-1}(ay) \in \mathrm{H}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est compatible, à gauche, avec la loi de structure.

Nous étudierions, de la même façon, la compatibilité à droite.

En conclusion :

THÉORÈME. — **Sur un groupe G, la forme générale des relations d'équivalence $\mathcal{R}$ compatibles à gauche [resp. à droite] avec la loi de structure est**

$$\text{« } x\mathcal{R}y \text{ signifie } x^{-1}y \in \mathrm{H} \text{ [resp. } yx^{-1} \in \mathrm{H}] \text{ »,}$$

H étant un sous-groupe de G.

b) Étant donné une partie G′ du groupe G et un élément a de G, nous conviendrons de désigner par $a\mathrm{G}'$ [resp. $\mathrm{G}'a$] la partie de G qui est engendrée par ax [resp. xa] lorsque x décrit G′. Avec cette convention, on peut énoncer le théorème précédent en notant

$$\text{« } x\mathcal{R}y \text{ signifie } y \in x\mathrm{H} \text{ [resp. } y \in \mathrm{H}x] \text{ ».}$$

c) Tout sous-groupe H de G détermine donc deux relations d'équivalence, deux éléments x et y d'une même classe étant respectivement tels que

$$x^{-1}y \in \mathrm{H} \quad (\text{ce qui s'écrit } y \in x\mathrm{H})$$

ou

$$yx^{-1} \in \mathrm{H} \quad (\text{ce qui s'écrit } y \in \mathrm{H}x).$$

REMARQUE. — On déduit de là que l'ordre (ou nombre des éléments) d'un groupe fini est un multiple de l'ordre de l'un quelconque de ses sous-groupes.

En effet, soit n le nombre des éléments du groupe G, p le nombre des éléments du sous-groupe H; x étant donné, l'ensemble des y tels que $x^{-1}y \in \mathrm{H}$ est l'ensemble des y tels qu'il existe $z \in \mathrm{H}$, et $y = xz$; or l'application $z \longrightarrow xz$ de H dans $x\mathrm{H}$ est bijective; c'est donc que l'ensemble $x\mathrm{H}$ a p éléments. L'ensemble des parties $x\mathrm{H}$ distinctes est une partition de G, il existe donc un nombre entier q tel que $n = pq$.

2° *a*) DÉFINITION. — **Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est dite compatible avec la loi de structure du groupe G si cette relation est compatible à gauche et à droite avec cette loi.**

Soit H la classe d'équivalence de e pour $\mathcal{R}$; d'après 1° *a*) et *b*) H est un sous-groupe de G tel que, pour tout élément x de G, $x\mathcal{R}y$ signifie à la fois

$$y \in xH \qquad \text{et} \qquad y \in Hx.$$

Cela exige

$$(1) \qquad \forall x \in G, \qquad xH = Hx.$$

Inversement, s'il existe un sous-groupe H de G vérifiant la condition (1), la relation binaire $\mathcal{R}$ entre éléments de G :

$$\text{« } x\mathcal{R}y \quad \text{signifie} \quad y \in xH \text{ »}$$

s'écrit aussi

$$\text{« } x\mathcal{R}y \quad \text{signifie} \quad y \in Hx \text{ »}$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible à gauche et à droite avec la loi de structure de G, c'est-à-dire une relation d'équivalence compatible avec cette loi.

DÉFINITION. — **Un sous-groupe H d'un groupe G est dit distingué** (ou **invariant**) **si**

$$\forall x \in G, \quad xH = Hx \quad \textbf{ou} \quad xHx^{-1} = H.$$

Nous sommes ainsi en mesure d'énoncer :

THÉORÈME. — **Sur un groupe G, la forme générale des relations d'équivalence compatibles avec la loi de groupe est**

$$(2) \qquad \text{« } x\mathcal{R}y \text{ } \textbf{signifie} \text{ } y \in xH \text{ »}, \quad \textbf{H étant un sous-groupe distingué de G.}$$

L'ensemble G/$\mathcal{R}$, que l'on note G/H, est aussi muni d'une loi quotient qui est une loi de groupe (23, 8°). Nous dirons qu'il s'agit du *groupe-quotient* de G par $\mathcal{R}$ (ou par H).

b) THÉORÈME. — **Un sous-groupe H d'un groupe G est distingué si, et seulement si,**

$$(3) \qquad \forall x \in G, \quad \forall a \in H \qquad xax^{-1} \in H.$$

Condition nécessaire. — Cela résulte de la définition.

Condition suffisante. — Nous supposons que la condition (3) est remplie. Soit x un élément quelconque de G. Pout tout $a \in H$, xax^{-1} et $x^{-1}ax$ sont des éléments, b et c de H. On a

$$xa = bx \quad \text{et} \quad ax = xc \implies xa \in Hx \quad \text{et} \quad ax \in xH.$$

Tout élément de xH (resp. Hx) appartient donc à Hx (resp. xH) et

$$xH = Hx.$$

3° **Cas d'un groupe commutatif.** — Si G est un groupe commutatif, il n'y a pas lieu de distinguer, pour une relation d'équivalence, si elle est compatible à droite ou à gauche avec la loi de structure : tout sous-groupe d'un groupe commutatif est un sous-groupe distingué.

Si la loi de structure est notée additivement, le théorème du *a*) s'énonce ainsi :

THÉORÈME. — **Sur un groupe commutatif G, noté additivement, la forme générale des relations d'équivalence $\mathcal{R}$ compatibles avec la loi du groupe est :**

« $x\mathcal{R}y$ signifie $y - x \in H$ » H **étant un sous-groupe de** G.

32. ***Homomorphisme de groupes.*** — 1° De l'étude générale des homomorphismes faite au n° 23, retenons :

DÉFINITION. — **Soient** G **et** G′ **deux groupes, d'éléments neutres** e **et** e'**, dans lesquels les lois de structure sont notées multiplicativement. Une application** f **de** G **dans** G′ **est un homomorphisme de groupes si**

$$\forall x, y \in G \qquad f(xy) = f(x)\,f(y).$$

On dit que f(G), que l'on note Imf est l'image de f et que $f^{-1}(e')$, que l'on note Ker f, est le noyau de f.

THÉORÈME I. — **L'image de** f **est un sous-groupe de** G′.

On sait (23, 6°) que Im f est stable pour la loi de groupe de G′. D'autre part, d'après la factorisation canonique d'un homomorphisme (23, 9°), il existe un homomorphisme surjectif de G, muni de sa loi de groupe, sur Im f, muni de la restriction de la loi de groupe de G′; cette dernière est donc loi de groupe sur Im f, qui est ainsi sous-groupe de G′.

THÉORÈME II : $\qquad e' = f(e); \qquad \forall x \in G \quad f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}.$

Il s'agit de propriétés de l'homomorphisme surjectif du groupe G sur le groupe Im f.

THÉORÈME III. — **Le noyau de** f **est un sous-groupe distingué de** G.

x et y étant deux éléments quelconques de Ker f, on a

$$f(xy^{-1}) = f(x)\,f(y^{-1}) = f(x)\,[f(y)]^{-1} = e'\,(e')^{-1} = e' \qquad \text{et} \qquad xy^{-1} \in \text{Ker } f,$$

ce qui montre que Ker f est un sous-groupe de G.

D'autre part, x et a étant respectivement un élément quelconque de G et de Ker f

$$f(xax^{-1}) = f(x)\,f(a)\,f(x^{-1}) = f(x)e'\,[f(x)]^{-1} = e' \qquad \text{et} \qquad xax^{-1} \in \text{Ker } f,$$

ce qui montre que le sous-groupe Ker f est distingué.

THÉORÈME IV. — **L'application** f **est injective si et seulement si** Ker $f = \{e\}$.

(1) $f(x) = f(y)$ équivaut à $[f(x)]^{-1}f(y) = e'$ ou à $f(x^{-1}y) = e'$ ou à $x^{-1}y \in \text{Ker } f$.

Autrement dit, (1) équivaut à :

$$y = xs, \qquad s \in \mathrm{Ker} f$$

Par suite (1) entraîne $x = y$ si et seulement si e est le seul élément de $\mathrm{Ker} f$.

2° D'après (1), la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui intervient dans la décomposition canonique de l'homomorphisme f (**23**, 9°) s'écrit ici

$$\text{« } x \mathcal{R} y \text{ signifie } x^{-1}y \in \mathrm{Ker} f \text{ »}$$

et nous avons :

THÉORÈME. — *Un homomorphisme f d'un groupe* G *dans un groupe* G' *peut être factorisé en le produit*
d'un homomorphisme surjectif du groupe G *sur le groupe* G/Ker f
d'un isomorphisme du groupe G/Ker f *sur le groupe* Im f
d'un homomorphisme injectif du groupe Im f *dans le groupe* G'.

II. SYMÉTRISATION D'UN DEMI-GROUPE LES ENTIERS RELATIFS. LES NOMBRES RATIONNELS

33. ***Symétrisation d'un demi-groupe.*** — 1° En étudiant la structure de groupe, nous avons vu que la propriété de simplification par l'élément a était une conséquence de l'existence du symétrique de a. Mais un ensemble peut être muni d'une loi simplifiable sans que tout élément de cet ensemble admette un symétrique : par exemple, on a vu que dans l'ensemble N

$$x + a = y + a \implies x = y$$

mais il n'existe pas d'entier naturel a' tel que $a + a' = 0$, a étant un élément arbitraire de N (cf n° **21**, 2°).

DÉFINITION. — **On dit qu'un ensemble E est un demi-groupe s'il est muni d'une loi de composition L associative et régulière.**

Le demi-groupe est dit *commutatif* si la loi L est commutative.

Nous nous proposons de montrer que si E est un demi-groupe commutatif on peut construire un ensemble $\overline{\mathrm{E}}$ dans lequel on définira une loi de groupe $\overline{\mathrm{L}}$, et tel que E, muni de la loi L, soit isomorphe à une partie $\overline{\mathrm{E}}'$ de $\overline{\mathrm{E}}$ munie de la loi $\overline{\mathrm{L}}$.

Nous noterons la loi L additivement ; les résultats obtenus sont indépendants de cette convention.

2° **Définition d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans E × E.** — Nous désignons par a, b, ... affectés d'indices le cas échéant, les éléments de l'ensemble E.

Nous appellerons $\mathcal{R}$ la relation définie dans E × E par

$$(a_1, a_2) \mathcal{R} (b_1, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

$\mathcal{R}$ est *réflexive* car

$$(a_1, a_2) \mathcal{R} (a_1, a_2) \quad \text{résulte de} \quad a_1 + a_2 = a_2 + a_1;$$

$\mathcal{R}$ est *symétrique* car

$$(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \iff (b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$$

du fait que $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ peut s'écrire $b_1 + a_2 = b_2 + a_1$;
$\mathcal{R}$ est *transitive*; supposons en effet

$$(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \quad \text{et} \quad (b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$$

c'est-à-dire $\quad a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \quad$ et $\quad b_1 + c_2 = b_2 + c_1$.

On en déduit

$$(a_1 + b_2) + (b_1 + c_2) = (a_2 + b_1) + (b_2 + c_1)$$

ou encore, puisque la loi L est associative et commutative,

$$(a_1 + c_2) + (b_1 + b_2) = (a_2 + c_1) + (b_1 + b_2)$$

et enfin, puisque la loi L est régulière,

$$a_1 + c_2 = a_2 + c_1$$

c'est-à-dire $\quad (a_1, a_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$.

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence; on peut donc la noter par le symbole $=$, et dorénavant nous poserons

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

en n'oubliant pas que le symbole $=$ n'a pas la même signification selon qu'il est employé entre deux éléments de E, ou entre deux éléments de $E \times E$.

En particulier

$$(a_1, a_2) = (a_1 + k, \quad a_2 + k), \quad \text{quel que soit} \quad k \in E.$$

Nous appellerons $\overline{E}$ l'ensemble $E \times E$ muni de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, (notée par le symbole d'égalité), ou encore l'ensemble quotient $\frac{E \times E}{\mathcal{R}}$ des classes d'équivalence de $E \times E$ pour la relation $\mathcal{R}$.

Un élément de $\overline{E}$ admet une infinité de représentants : en appelant α la classe d'équivalence de (a_1, a_2), α a pour représentants tous les couples

$$(a_1 + k, a_2 + k), \quad \text{quel que soit} \quad k \in E.$$

Nous désignerons, dans la suite, par β et γ les classes d'équivalence de (b_1, b_2) et de (c_1, c_2).

3° **Définition d'une loi de composition sur $\overline{E}$.** — Nous appellerons L et noterons provisoirement $*$ la loi définie sur $\overline{E}$ par

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \tag{1}$$

I. — Montrons que le résultat de l'opération est indépendant du mode de représentation des éléments que l'on compose, en d'autres termes que cette loi est compatible avec la relation d'équivalence dans $\overline{E}$. Soit en effet

$$(a'_1, a'_2) = (a_1, a_2) \iff a'_1 + a_2 = a'_2 + a_1$$
$$(b'_1, b'_2) = (b_1, b_2) \iff b'_1 + b_2 = b'_2 + b_1.$$

La loi L étant commutative et associative, nous pouvons composer entre eux, respectivement, les premiers membres et les seconds membres des égalités précédentes, d'où

$$(a'_1 + b'_1) + (a_2 + b_2) = (a'_2 + b'_2) + (a_1 + b_1)$$

ce qui exprime que $(a'_1 + b'_1,\ a'_2 + b'_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$.

II. — Montrons que $\bar{L}$ est une loi de groupe abélien.

a) $\bar{L}$ est commutative, car

$$\beta * \alpha = (b_1 + a_1,\ b_2 + a_2) \qquad \text{ou} \qquad \alpha * \beta.$$

b) $\bar{L}$ est associative, car

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma),$$

les deux membres étant égaux à

$$(a_1 + b_1 + c_1,\ a_2 + b_2 + c_2).$$

c) Montrons que $\bar{L}$ admet un élément neutre.

$$(x, y) \text{ élément neutre} \iff (a_1, a_2) * (x, y) = (a_1, a_2)$$

ou $$(a_1 + x,\ a_2 + y) = (a_1, a_2)$$

ou $$a_1 + x + a_2 = a_2 + y + a_1$$

ou enfin $$x = y.$$

L'élément neutre ε est la classe de tous les éléments égaux à (x, x).

d) Montrons que tout élément de $\bar{E}$ admet un symétrique pour la loi $\bar{L}$.

$$(a'_1, a'_2) \text{ symétrique de } (a_1, a_2) \iff (a_1, a_2) * (a'_1, a'_2) = \varepsilon$$

ou $$(a_1 + a'_1,\ a_2 + a'_2) = (x, x)$$

ou $$a_1 + a'_1 + x = a_2 + a'_2 + x$$

ou enfin $$a_1 + a'_1 = a_2 + a'_2.$$

on obtient une solution en prenant

$$a'_1 = a_2, \qquad a'_2 = a_1$$

et finalement $$\text{sym}\,(a_1, a_2) = (a_2, a_1).$$

4° **Isomorphisme entre E et une partie $\bar{E}'$ de $\bar{E}$.** — A tout élément a de E, associons l'élément $\bar{a}$ de $\bar{E}$, classe de tous les éléments $(a + k, k)$ égaux entre eux, quel que soit $k \in E$.

Appliquons à a et b la loi L; nous obtenons $c = a + b$.

Appliquons à $\bar{a}$ et $\bar{b}$ la loi $\bar{L}$; nous obtenons

$$\bar{a} * \bar{b} = (a + k, k) * (b + l, l) = (a + b + k + l, k + l)$$

ou encore, en posant $k + l = m$ $\quad (c + m, m)$ ou $\bar{c}$.

Finalement si l'on pose $\quad a \longleftrightarrow (a + k, k)$ ou $\bar{a}$

$$a + b \longleftrightarrow \bar{a} * \bar{b}$$

c'est-à-dire que E, *muni de la loi* L, *est isomorphe à la partie* $\bar{E}'$ *de* $\bar{E}$ *dont les éléments sont* $(a + k, k)$, *munie de la loi* $\bar{L}$.

E et E′ ne se distinguent pas du point de vue algébrique, puisque pour composer deux éléments a et b de E avec la loi L, on peut composer les éléments correspondants $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de E′ avec la loi $\bar{\text{L}}$, ou inversement. Nous pourrons donc

a) représenter la loi $\bar{\text{L}}$ par le même symbole que L, en d'autres termes, considérer $\bar{\text{E}}$ comme groupe additif (1);

b) convenir d'écrire a au lieu de $(a + k, k)$ puisque les règles de calcul sur E et sur E′ sont les mêmes.

En d'autres termes, on peut considérer E comme une partie de $\bar{\text{E}}$.

Alors tout élément de E se trouvant inclus dans $\bar{\text{E}}$, a un symétrique dans $\bar{\text{E}}$:

$$a = (a + k, k) \Longrightarrow \operatorname{sym} a = (k, a + k).$$

Le groupe $\bar{\text{E}}$ construit à partir de l'ensemble E s'appelle *groupe déduit de* E *par symétrisation*.

Remarque. — Le fait que nous avons pu construire un groupe $\bar{\text{E}}$ à partir de E ne prouve pas que $\bar{\text{E}}$ soit le seul groupe jouissant des mêmes propriétés qu'on pourrait construire à partir de E.

5° **Expression des éléments de $\bar{\text{E}}$ au moyen de ceux de E par l'intermédiaire de l'opération inverse.** — Nous venons de voir que nous pouvions considérer $\bar{\text{E}}$ comme groupe additif. L'opération inverse est alors notée — :

$$\alpha + \beta = \gamma \Longleftrightarrow \beta = \gamma + \operatorname{sym}\alpha \Longleftrightarrow \beta = \gamma - \alpha.$$

Deux éléments a_1 et a_2 de E pouvant être considérés comme éléments du groupe $\bar{\text{E}}$, posons

$$\rho = a_1 - a_2, \qquad \text{ou} \qquad \rho = a_1 + \operatorname{sym} a_2$$

c'est-à-dire

$$\rho = (a_1 + k, k) - (a_2 + l, l)$$

ou

$$\rho = (a_1 + k, k) + (l, a_2 + l)$$

$$\rho = (a_1 + k + l, \quad a_2 + k + l) \qquad \text{ou} \qquad (a_1, a_2).$$

En définitive $(a_1, a_2) = a_1 - a_2$ ou $a_1 + \operatorname{sym} a_2$.

Tout élément de $\bar{\text{E}}$ peut donc s'exprimer au moyen d'éléments de E, *en utilisant l'opération inverse du groupe* $\bar{\text{E}}$(2).

En d'autres termes, l'ensemble E peut être immergé dans un groupe $\bar{\text{E}}$ de façon que tout élément de $\bar{\text{E}}$ soit le composé de deux éléments de E par l'opération inverse de celle du groupe.

---

(1) Si on avait noté multiplicativement la loi L de l'ensemble E, la loi $\bar{\text{L}}$ de $\bar{\text{E}}$ serait alors notée aussi multiplicativement.

(2) Si la loi L de E, et la loi $\bar{\text{L}}$ de $\bar{\text{E}}$, avaient été appelées multiplication, on aurait obtenu

$$(a_1, a_2) = a_1 : a_2 \qquad \text{ou} \qquad a_1 \times \operatorname{inv} a_2.$$

34. ***Les entiers relatifs (ou entiers rationnels).*** — **1° Symétrisation de N.** — Soit l'ensemble N des entiers naturels (n° **24**). L'addition définie sur N est une opération associative, commutative, régulière (**25**, 3°).

Nous pouvons donc symétriser l'ensemble N pour la loi d'addition; appliquant l'étude précédente (**33**), nous constituons un groupe additif Z d'éléments rangés (n, p), où n et p sont deux éléments de N, par les conventions suivantes :

a) $$(n, p) = (n', p') \iff n + p' = p + n'$$

en particulier $$(n, p) = (n + k, p + k) \qquad \forall\, k \in \mathrm{N}$$

$$(n, p) = (n - k, p - k) \qquad \text{si} \quad k \leqslant \inf(p, n)$$

$$(n, 0) = (n + k, k).$$

b) $$(n, p) + (n', p') = (n + n', p + p')$$

il en résulte que

c) l'élément neutre de Z est

$$(n, n) = (0,0)$$

d) l'opposé de (n, p) est (p, n).

2° Isomorphisme entre N et une partie de Z. Entiers positifs. — Par les conventions précédentes, il y a isomorphisme entre N et la partie de Z formée par les éléments $(n, 0)$ ou $(n + k, k)$, ces deux ensembles étant munis de leur loi d'addition :

$$n \longleftrightarrow (n, 0)$$
$$n + n' \longleftrightarrow (n, 0) + (n', 0).$$

Nous pourrons représenter par n la classe d'équivalence dans Z dont un représentant est $(n, 0)$, et poser

$$(n, 0) = n, \quad \text{en particulier} \quad (0, 0) = 0.$$

Nous dirons que $(n, 0)$ ou n est un entier positif.

3° Entiers négatifs. — Utilisons les propriétés des groupes additifs (n° **31**) et le résultat du 1°, (*d*).

$$\mathrm{opp}\, n = (0, n) = -n.$$

Nous dirons que $(0, n)$ ou $-n$ est un entier négatif.

4° Entiers relatifs. — Tout élément de Z peut s'écrire sous la forme

$$(n, p) = (n, 0) + (0, p) = n + \mathrm{opp}\, p \qquad \text{ou} \qquad n - p;$$

autrement dit tout élément de Z est la différence (opération inverse de l'addition définie dans Z) de deux éléments de N.

Si $n > p$, $(n, p) = (n - p, 0)$ le nombre est *positif* on dit que $n - p$ est sa *valeur absolue.*	Si $n < p$ $(n, p) = (0, p - n)$ le nombre est *négatif* on dit que $p - n$ est sa *valeur absolue.*

Tout élément de Z est, soit positif, soit négatif, soit nul; *l'ensemble* Z *est appelé ensemble des entiers relatifs* (ou encore *entiers rationnels*).

Comme $0 + n$ est le nombre positif $(n, 0)$ ou n, et que
$0 - n$ est le nombre négatif $(0, n)$ ou $-n$,

on peut, en supprimant les zéros qui sont en tête, dire que les nombres positifs ont le signe $+$, et les nombres négatifs le signe $-$.

5° **Relation d'ordre strict sur Z.** — Nous désignerons dorénavant par λ, μ, ν, ... des éléments de Z. Adoptons les deux définitions suivantes :

DÉFINITION I. — **On dit que λ est supérieur à 0 et on écrit $\lambda > 0$ quand λ est positif.**

La somme de deux entiers positifs est un entier positif. Il en résulte que

$$\lambda > 0 \quad \text{et} \quad \mu > 0 \implies \lambda + \mu > 0.$$

DÉFINITION II. — **On dit que λ est supérieur à μ** (ou que μ est inférieur à λ) **au sens strict et on écrit $\lambda > \mu$** (ou $\mu < \lambda$) **quand $\lambda - \mu$ est positif.** Autrement dit

$$\lambda > \mu \quad (\text{ou } \mu < \lambda) \iff \lambda - \mu > 0.$$

Il en résulte :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La relation $\lambda > \mu$ est une relation d'ordre strict sur Z. Elle est dite inégalité stricte.**

En effet : *a*) Cette relation n'est pas symétrique.

b) Elle est transitive car

$$\left.\begin{matrix}\lambda > \mu \\ \mu > \nu\end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix}\lambda - \mu > 0 \\ \mu - \nu > 0\end{matrix}\right\} \quad \text{entraîne}$$
$$(\lambda - \mu) + (\mu - \nu) > 0 \iff \lambda - \nu > 0 \iff \lambda > \nu.$$

REMARQUE I. — *L'ensemble* Z *est totalement ordonné par cette relation.* En effet, λ et μ étant deux entiers relatifs quelconques, nous avons vu au 4° que l'entier relatif $\lambda - \mu$ est
soit positif, auquel cas nous avons $\lambda > \mu$,
soit négatif, auquel cas $\mu - \lambda$ est positif et nous avons $\mu > \lambda$,
soit nul, auquel cas nous avons $\lambda = \mu$.

REMARQUE II. — *La relation $\lambda > \mu$ est compatible avec l'addition.* En effet $\lambda > \mu \iff \lambda - \mu > 0$ s'écrit $(\lambda + \nu) - (\mu + \nu) > 0 \iff \lambda + \nu > \mu + \nu$.

6° **Extension à Z de la multiplication sur N.** — *a) Analyse.* — Nous voulons étendre à Z la multiplication déjà connue sur son sous-ensemble N. Nous appliquerons dans ce but les deux principes suivants :

α) *deux entiers positifs se multiplient comme leurs valeurs absolues* (hypothèse de *concordance*);

β) *la multiplication est distributive par rapport à l'addition* (hypothèse de *distributivité*) :

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu; \qquad (\mu + \nu)\lambda = \mu\lambda + \nu\lambda. \tag{1}$$

En faisant $\nu = 0$, les égalités (1) donnent nécessairement :

$$\lambda\mu = \lambda\mu + \lambda.0 \quad \text{d'où} \quad \lambda.0 = 0$$
$$\mu\lambda = \mu\lambda + 0.\lambda \quad \text{d'où} \quad 0.\lambda = 0.$$

En faisant $\nu = \operatorname{opp}\mu$, les égalités (1) donnent nécessairement

$$0 = \lambda\mu + \lambda(\operatorname{opp}\mu) \quad \text{d'où} \quad \lambda(\operatorname{opp}\mu) = \operatorname{opp}(\lambda\mu)$$
$$0 = \mu\lambda + (\operatorname{opp}\mu)\lambda \quad \text{d'où} \quad (\operatorname{opp}\mu)\lambda = \operatorname{opp}(\mu\lambda)$$

c'est-à-dire que si on change le signe d'un facteur du produit, ce produit change de signe.

Il en résulte que, n, p, ... étant des entiers naturels, les hypothèses initiales conduisent aux égalités suivantes :

$$n(-p) = -np, \qquad (-n)p = -np$$
$$(-n)(-p) = -[n(-p)] = -[-np] = np.$$

b) Synthèse. — Définition et propriétés de la multiplication sur Z.

Inversement, définissons sur Z une multiplication qui vérifie, outre le principe de concordance, les axiomes suivants (n, p, q, sont des entiers naturels)

$$\begin{cases} n(-p) = -np \qquad (-n)p = -np \qquad (-n)(-p) = np \\ (-n).0 = 0.(-n) = 0. \end{cases}$$

α) L'opération ainsi définie sur Z est *commutative.*

β) Elle est *associative*, car la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues des facteurs, et le signe est + ou — suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair.

γ) Elle est *distributive par rapport à l'addition sur* Z, comme le montrent les implications suivantes qui se déduisent du changement de signe d'un facteur

$$n(p+q) = np + nq \implies (-n)(p+q) = (-n)p + (-n)q$$
$$\implies n(-p-q) = n(-p) + n(-q)$$
$$\begin{cases} n(p-q) = np - nq \\ p > q \end{cases} \implies \begin{cases} n(q-p) = nq - np \\ q < p \end{cases}$$
$$n(p-q) = np - nq \implies (-n)(p-q) = -np + nq.$$

En résumé, si λ, μ, ν, ... sont des éléments de Z

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu.$$

δ) Sauf le zéro, tous les éléments de Z sont réguliers pour la multiplication sur Z.

ε) Le nombre 1 est élément neutre pour la multiplication sur Z.

REMARQUE. — La relation d'ordre $\lambda > \mu$, définie au 5°, est compatible avec la multiplication par un entier positif.

Cela signifie que $\lambda > \mu$ et $\nu > 0$ impliquent $\lambda\nu > \mu\nu$.

En effet $\lambda > \mu \iff \lambda - \mu > 0$; le produit $(\lambda - \mu)\,\nu = \lambda\nu - \mu\nu$ de deux entiers positifs est un entier positif. On a donc

$$\lambda\nu - \mu\nu > 0 \iff \lambda\nu > \mu\nu.$$

7° Relation d'ordre large sur Z. — DÉFINITION. — **On écrit $\lambda \geqslant \mu$ si, et seulement si, l'on a soit $\lambda > \mu$, soit $\lambda = \mu$.**

Il s'agit d'une relation d'ordre sur Z, au sens large, compatible avec l'addition (cf 5°) et avec la multiplication par un entier positif (cf 6°). On l'énonce en disant « λ au moins égal à μ » ou « λ supérieur ou égal à μ »; on peut aussi écrire $\mu \leqslant \lambda$ et énoncer « μ au plus égal à λ », ou « μ inférieur ou égal à λ ».

35. *Compléments sur les groupes.* — Soit G un groupe d'élément neutre e dans lequel la loi de structure est notée additivement si le groupe est commutatif, multiplicativement dans le cas général.

a) Nous définissons une loi externe sur G, vis à vis du domaine d'opérateurs Z, en convenant que (cf. n° 30), en notation additive

$$na \text{ désigne } \begin{cases} a + a + \ldots + a & (n \text{ termes}) & \text{si } n > 0 & (1\,a = a) \\ e & & \text{si } n = 0 & \\ (-n)\,(-a) & & \text{si } n < 0 & \end{cases}$$

et qu'en notation multiplicative

$$a^n \text{ désigne } \begin{cases} aa\ldots a & (n \text{ facteurs}) & \text{si } n > 0 & (a^1 = a) \\ e & & \text{si } n = 0 & \\ (a^{-1})^{-n} & & \text{si } n < 0. & \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera que, quels que soient les éléments a et b de G et quels que soient les entiers relatifs n et m

I. $m(na) = (mn)a$ et $(a^n)^m = a^{nm}$

II. $(m + n)a = ma + na$ et $a^{m+n} = a^m a^n$.

III. $n(a + b) = na + nb$ (en vertu de la commutativité).

En revanche, dans le cas d'un groupe non commutatif G, l'égalité

$$(ab)^n = a^n b^n$$

n'a lieu que si, exceptionnellement, a et b sont des éléments commutables de G, c'est-à-dire des éléments tels que : $ab = ba$.

b) **Sous-groupe engendré par un élément donné** a **du groupe** G. — Soit H la partie du groupe G constituée par les éléments de la forme a^p, ($p \in Z$). Étant donné que

$$a^p(a^q)^{-1} = a^{p-q}$$

est un élément de H, nous pouvons affirmer que celui-ci est un sous-groupe de G. On dit que H est le *sous-groupe monogène* de G engendré par l'élément a.

Deux cas peuvent se présenter :

1er *cas.* Les puissances de a sont toutes distinctes, autrement dit $a^\lambda = a^\mu$ exige $\lambda = \mu$. G et H ont, l'un et l'autre une infinité d'éléments.

2e *cas.* Il existe au moins un couple (λ, μ) d'entiers relatifs distincts tels que $a^\lambda = a^\mu$. Il existe alors au moins un entier positif h tel que $a^h = e$, et, par suite, un plus petit entier positif p tel que $a^p = e$, ce qui veut dire que

$$a^p = e \quad \text{et} \quad a^m \neq e \quad \text{pour} \quad m = 1, \ldots, p-1.$$

Nous avons alors : $a^{p+1} = a$, $a^{p+2} = a^2$, ... si bien que H possède exactement p éléments, soit

$$H = \{ a, a^2, \ldots, a^p = e \}$$

Corollaire. — Si G est un groupe fini d'ordre n, d'élément neutre e démontrons

$$\forall\, a \in G \qquad a^n = e.$$

En effet, nous avons vu au n° 31 que n est un multiple de l'ordre de l'un quelconque des sous-groupes de G. En particulier n est un multiple de l'ordre p du sous-groupe H engendré par a, soit $n = pq$. Nous avons

$a^n = (a^p)^q$; or $a^p = e$; la proposition en résulte.

36. ***Les nombres rationnels.*** — Nous savons que les entiers relatifs sont des éléments réguliers pour la multiplication sur Z, à l'exception de l'élément neutre 0 de l'addition. Appelons Z^* l'ensemble déduit de Z par suppression du zéro; la multiplication sur Z^* étant commutative, associative, régulière, nous pouvons construire, par symétrisation (33), un groupe multiplicatif Q^* dans lequel on pourra immerger Z^*.

Nous désignerons par des minuscules latines a, b, ... des éléments de Z^*.

1° **Symétrisation de** Z^* **pour la multiplication.** — Nous créons un groupe multiplicatif : *a*) en considérant dans l'ensemble $Z^* \times Z^*$ la relation d'équivalence (notée $=$)

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1;$$

soit Q^* l'ensemble des classes d'équivalence associées;

b) en définissant sur Q^* une loi multiplicative

$$(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Cette loi est compatible avec la relation d'équivalence précédente et est une loi de groupe.

En particulier :

$$(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \qquad \forall\, k \in Z^*$$
$$(ak, k) = (ak', k') \qquad \forall\, k, k' \in Z^*$$
$$\text{inv}\,(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$$

2° **Isomorphisme entre Z^* et une partie de Q^*.** — Il y a isomorphisme, entre Z^* et l'ensemble des classes de Q^* associées aux éléments (ak, k), ces ensembles étant munis de leur loi de multiplication :

$$a \longleftrightarrow (ak, k)$$
$$a \times b \longleftrightarrow (ak, k) \times (bk', k') = (ab\, kk', kk')$$

si bien qu'on peut convenir d'écrire l'élément (ak, k) sous la forme simplifiée a. En d'autres termes,

$$(ak, k) = a \qquad \text{ou} \qquad (a, 1) = a$$
$$(k, ak) = \text{inv}\, a.$$

Tous les éléments de Q^* peuvent s'exprimer à partir des éléments de Z^* au moyen d'une division, opération inverse de la multiplication dans Q^* :

$$(a_1, a_2) = (a_1, 1) \times (1, a_2)$$
$$= a_1 \times \text{inv}\, a_2 \qquad \text{ou} \qquad a_1 : a_2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1}{a_2},$$

en symbolisant par la barre de fraction la division dans Q^* ; a_1 et a_2 sont appelés respectivement *numérateur* et *dénominateur* de la fraction, élément de Q^*.

Dorénavant nous écrirons

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \longleftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 k}{a_2 k} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{1} = a.$$

L'élément neutre pour la multiplication est la classe des éléments (k, k) qu'on peut noter $\frac{k}{k}$ ou 1.

3° **Adjonction d'un zéro à l'ensemble Q^*.** — Avec l'élément 0 de Z on peut former les couples $(0, k)$, $(k \neq 0)$, et constater que

$$(0, k) = (0, k')$$

d'après l'équivalence posée au 1°.

Soit Q l'ensemble formé par l'adjonction à Q^* de la classe des couples précédents.

On peut étendre à Q la multiplication définie sur Q^* en posant

$$(0, k) \times (a_1, a_2) = (0.a_1, ka_2) \qquad \text{ou} \qquad (0, k').$$

Par suite en convenant d'identifier le zéro de Z à la classe $(0, k)$ de Q, c'est-à-dire de poser

$$(0, k) = 0,$$

l'isomorphisme du 2° s'étend à Z et Q.

Nous poserons $(0, k) = \frac{0}{k}$ et $\frac{0}{k} = 0$.

On notera que nous n'avons pas, dans Q, considéré de fraction dont le dénominateur est zéro.

4° **Extension à Q de l'addition sur Z.** — *a) Analyse.* — Nous voulons créer sur Q une loi additive qui redonne celle qui est connue sur Z, lorsque les éléments considérés dans Q font partie du sous-ensemble Z. Autrement dit, l'addition de a et b dans Z se traduisant par l'addition de $\frac{ak}{k}$ et $\frac{bk}{k}$ dans Q, doit donner comme résultat $\frac{(a+b)k}{k}$, autrement dit, nécessairement,

$$\frac{ak}{k} + \frac{bk}{k} = \frac{ak + bk}{k}. \qquad (1)$$

b) Synthèse. — Définition et propriétés de l'addition sur Q.
Inversement, définissons sur Q une addition pour la convention suivante :

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

pour des éléments de même dénominateur. Le principe de concordance se trouve ainsi vérifié pour l'addition. La convention précédente donne, dans le cas général, par réduction préalable au même dénominateur

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2b_2}.$$

α) Montrons que *cette loi est compatible avec la relation d'équivalence dans* Q. Posons

$$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{a_1}{a_2} \iff a_1'a_2 = a_2'a_1$$
$$\frac{b_1'}{b_2'} = \frac{b_1}{b_2} \iff b_1'b_2 = b_2'b_1.$$

Transformons les deux égalités de droite en multipliant

par b_2b_2' les deux membres de la première : $a_1'a_2b_2b_2' = a_2'a_1b_2b_2'$
par a_2a_2' les deux membres de la seconde : $b_1'b_2a_2a_2' = b_2'b_1a_2a_2'$.

Additionnons (dans Z) ces deux égalités membre à membre en mettant en facteur a_2b_2 dans la somme des premiers membres, $a_2'b_2'$ dans la somme des seconds membres :

$$(a_1'b_2' + a_2'b_1')\,a_2b_2 = (a_1b_2 + a_2b_1)a_2'b_2'$$

d'où l'égalité des fractions

$$\frac{a_1'b_2' + a_2'b_1'}{a_2'b_2'} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2b_2}.$$

β) *La loi additive sur* Q *est commutative* et *associative* (ce qui est immédiat avec des fractions réduites au même dénominateur);

γ) *La loi additive sur* Q *admet un élément neutre* $\frac{0}{k}$, identifié avec le zéro de Z.

L'élément $\frac{a_1}{a_2}$ admet un symétrique $\frac{-a_1}{a_2}$, qu'on pourra noter $-\frac{a_1}{a_2}$.

δ) *La multiplication sur* Q *est distributive par rapport à l'addition sur* Q; en effet

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)\times\frac{u}{v}=\frac{a+b}{m}\times\frac{u}{v}=\frac{(a+b)u}{mv}$$

$$\frac{a}{m}\times\frac{u}{v}+\frac{b}{m}\times\frac{u}{v}=\frac{au}{mv}+\frac{bu}{mv}=\frac{au+bu}{mv}$$

et la distributivité sur Z l'assure sur Q.

5° **Les nombres rationnels.** — Sur l'ensemble Q que nous venons de créer existent deux opérations, une addition et une multiplication.

L'addition est une loi de groupe, et l'opération inverse, la soustraction, est partout définie.

La multiplication n'est une loi de groupe que sur l'ensemble Q privé de l'élément neutre de l'addition.

Les éléments de Q sont appelés *nombres rationnels;* Q *est l'ensemble des nombres rationnels.*

Un nombre rationnel est le quotient (au sens de l'opération inverse de la multiplication définie sur Q) de deux entiers relatifs.

6° **Rationnels positifs. Rationnels négatifs.** a et b étant deux entiers relatifs, le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est dit positif ou négatif suivant que ses deux termes a et b sont de même signe ou de signes contraires.

En dehors du nombre 0, tout nombre rationnel est soit positif, soit négatif.

La définition précédente est compatible avec l'égalité puisque la relation

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \iff ab' = ba'$$

n'est possible que si a et b, a' et b', sont simultanément du même signe, ou de signes contraires.

Un nombre rationnel positif peut se noter $\frac{n}{p}$, où n et p sont des entiers naturels; l'ensemble des rationnels positifs se désigne par Q^+; Q^+ est l'ensemble symétrisé pour la multiplication de l'ensemble N. La somme et le produit de rationnels positifs sont encore des rationnels positifs.

Un nombre rationnel négatif peut se noter $\frac{-n}{p}$ ou $-\frac{n}{p}$, puisqu'il est l'opposé de $\frac{n}{p}$.

7° **Relation d'ordre sur** Q. — Les relations d'inégalité stricte et d'inégalité large déjà définies sur Z (n° 34, 5° et 7°) peuvent être étendues à Q.

Nous adopterons pour cela les définitions suivantes (où x, y, ... désignent des éléments de Q) :

DÉFINITIONS. — **I. On dit que x est supérieur à 0 et on écrit $x > 0$ quand x est positif.**

II. — **On dit que x est supérieur à y** (ou que y est inférieur à x) **au sens strict et on écrit $x > y$** (ou $y < x$) **quand $x - y$ est positif.**

$$x > y \iff x - y > 0.$$

III. — **On dit que x est au moins égal à y** (ou que y est au plus égal à x) **et on écrit $x \geqslant y$** (ou $y \leqslant x$), **soit quand x est supérieur à y, soit quand x est égal à y.**

En raisonnant comme au n° 34, on en déduit

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La relation $x \geqslant y$ définie sur Q est une relation d'ordre total; elle est dite inégalité large.**

Cette relation d'ordre sur Q est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un nombre rationnel positif.

La relation $x > y$ est dite *inégalité stricte.*

8° **L'ensemble des rationnels est archimédien.** — Cette expression signifie que si α et β sont deux rationnels positifs, ($\alpha < \beta$), il existe un entier naturel N tel que

$$N\alpha > \beta. \qquad (1)$$

En effet, soit $\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{p'}{q'}$, p, q, p', q' étant des entiers naturels. L'inégalité (1) s'écrit encore

$$Npq' > p'q,$$

et il suffit que N soit supérieur au quotient entier de $p'q$ par pq'.

9° **Valeur absolue.** — *a*) DÉFINITION. — Soit x un élément de Q. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$ le nombre rationnel ainsi défini

$$\begin{cases} \text{si } x > 0 & |x| = x \\ \text{si } x < 0 & |x| = -x \\ \text{si } x = 0 & |0| = 0. \end{cases}$$

b) PROPRIÉTÉS.

α) $$|x| \geqslant 0; \quad |x| = 0 \iff x = 0;$$

β) $$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

il suffit de vérifier dans les trois cas où x est positif, négatif ou nul;

γ) ρ étant un rationnel positif

$$-\rho \leqslant x \leqslant \rho \iff |x| \leqslant \rho.$$

δ) $$|xy| = |x| \times |y| \quad \text{et} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

ε) $$\left.\begin{array}{l} -|x| \leqslant x \leqslant |x| \\ -|y| \leqslant y \leqslant |y| \end{array}\right\} \Longrightarrow -(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

et par suite, d'après (γ)

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

On peut généraliser par récurrence

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

III. STRUCTURES D'ANNEAU ET DE CORPS

37. ***Axiomes de la structure d'anneau.*** — 1° DÉFINITION. — **On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de composition internes jouissant des propriétés suivantes :**

La première loi pour laquelle A est un groupe commutatif est appelée addition.	**La seconde loi associative distributive par rapport à l'addition est appelée multiplication.**
Par suite :	Par suite :
Commutativité $a + b = b + a$.	
Associativité $(a + b) + c = a + (b + c)$.	*Associativité* $(ab)c = a(bc)$.
Élément neutre $0 + a = a + 0 = a$	*Distributivité :* $(a + b)c = ac + bc$
Élément symétrique noté $-a$ $a + (-a) = 0$.	$c(a + b) = ca + cb$.

Si la multiplication est commutative, A est appelé *anneau commutatif.*

Si la multiplication possède un élément neutre, ε, cet élément s'appelle l'unité de A, et A est alors appelé *anneau unitaire.*

Au titre de groupe, tout anneau A est non vide.

2° **Sous-anneau.** — **On appelle sous-anneau d'un anneau A tout sous-ensemble B de A qui est stable pour les deux lois de structure et tel que les lois induites sur B par les lois de structure confèrent à B une structure d'anneau** (ou encore tout sous-groupe additif B de A qui est stable pour la seconde loi).

38. ***Propriétés générales d'un anneau.*** — 1° **Multiplication par zéro. Anneau d'intégrité.**

$$a.b = a(b + 0) = a.b + a.0 \quad \text{donc} \quad a.0 = 0$$

de même $$b.a = (b + 0)a = b.a + 0.a \quad \text{donc} \quad 0.a = 0.$$

Dans un anneau, tout produit dont un facteur est nul est lui-même nul.

La réciproque n'est pas vraie; il existe des anneaux dans lesquels le produit de deux éléments non nuls peut être nul.

Lorsqu'il existe des éléments non nuls, a, b, d'un anneau tels que $ab = 0$, on dit que a et b sont des *diviseurs de zéro.*

Lorsque l'égalité $ab = 0$ entraîne nécessairement ou $a = 0$, ou $b = 0$, ou $a = b = 0$, on dit que l'anneau n'a pas de diviseur de zéro. Un anneau commutatif sans diviseur de zéro est dit *anneau d'intégrité* ou *anneau intègre.*

2° **Règle des signes.**

$$a.b \quad \text{et} \quad a.(-b) \quad \text{sont opposés car}$$
$$(a.b) + [a.(-b)] = a.[b + (-b)] = a.0 = 0.$$
Par suite $$a.(-b) = -a.b.$$
De même $$(-a).b = -a.b.$$
Il en résulte que $$(-a).(-b) = ab.$$

La « règle des signes » s'applique donc aux éléments d'un anneau.

3° **Produit de sommes algébriques.** — La distributivité de la multiplication s'applique aux différences.

En effet $(a - b)\,c = (a + \text{opp } b)c = a.c + \text{opp } b.c = ac - bc.$

Plus généralement la distributivité s'étend aux « sommes algébriques » d'un nombre quelconque d'éléments de A.

Dans un anneau quelconque

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ba + ab + b^2$$
$$(a + b).(a - b) = a^2 + ba - ab - b^2.$$

Ce n'est que dans un anneau commutatif qu'on retrouve les « identités remarquables » de l'algèbre élémentaire (cf. n^{os} **54** et **56**).

4° **Caractéristique.** — Soit A un anneau unitaire dans lequel les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sont notés respectivement 0 et ε.

Considérons la somme de p éléments de A égaux à $\varepsilon (p \in \mathbf{N})$. Si pour tout p cette somme est différente de 0, on dit que l'anneau A est de *caractéristique nulle.* Dans le cas contraire, il existe un plus petit entier naturel m tel que la somme de m éléments de A égaux à ε (c'est-à-dire $m\,\varepsilon$) soit 0; on dit alors que l'anneau A est de *caractéristique m.*

EXEMPLES. — L'ensemble Z des entiers relatifs (**34**) est un anneau commutatif unitaire, l'unité est le nombre naturel 1; sa caractéristique est nulle. L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ étudié à la fin du n° **39**, 1° est de caractéristique n.

5° **Anneau ordonné.** — Un anneau commutatif A, muni d'une relation d'ordre total (au sens large), notée $\geqslant$, n'est dit *anneau ordonné* que si cette relation est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un élément $\geqslant 0$, c'est-à-dire si

I) $\forall z \in A, \quad x \geqslant y \implies x + z \geqslant y + z$

II) $\forall a \in A, \quad a \geqslant 0, \quad x \geqslant y \implies ax \geqslant ay.$

La condition II équivaut à la condition

III) $a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad b \geqslant 0 \implies ab \geqslant 0.$

L'étude faite au n° 34 montre que Z est un anneau ordonné.

La relation $\geqslant$ peut s'énoncer « supérieur ou égal ».

Dans un anneau ordonné, on peut appeler *positif* tout élément x tel que $x \geqslant 0$; si x est distinct de 0, on dit que x est *strictement positif* (et on écrit $x > 0$). Tout élément x tel que $-x \geqslant 0$ (resp. $-x > 0$) dit *négatif* (resp. *strictement négatif*) et on écrit $x \leqslant 0$ (resp. $x < 0$).

On peut alors étendre à un anneau ordonné quelconque, A, la notion de *valeur absolue* introduite à propos de Q au n° 35, 9° : x étant un élément de A, on appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, l'élément de A défini par :

$$\begin{cases} \text{si} & x \geqslant 0, \quad |x| = x \\ \text{si} & x < 0, \quad |x| = -x \end{cases}$$

On démontre, comme au n° 35, 9°

$$|xy| = |x|\,|y| \qquad \text{et} \qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

39. *Notion d'Idéal.* — 1° Anneaux-quotients. — Soit A un anneau commutatif. Cherchons s'il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec les deux lois de A. D'après le n° 31, 3°, $\mathcal{R}$ ne sera compatible avec l'addition de A que si elle est de la forme « $a \mathcal{R} b$ signifie $a - b \in I$ », I sous-groupe additif de A.

Cherchons à quelle condition une telle relation $\mathcal{R}$ est en outre compatible avec la multiplication de A. L'élément neutre de l'addition est ici noté 0.

Analyse. — Supposons $\mathcal{R}$ compatible avec la multiplication:

$$\left.\begin{matrix} \forall x \in I, & x \mathcal{R} 0 \\ \forall a \in A, & a \mathcal{R} a \end{matrix}\right\} \implies ax \mathcal{R} 0a, \quad \text{ou encore} \quad ax \mathcal{R} 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad ax \in I.$$

Synthèse. — Supposons que I soit tel que

$$\left.\begin{matrix} \forall x \in I \\ \forall a \in A \end{matrix}\right\} \implies ax \in I,$$

et montrons alors que $\mathcal{R}$ est compatible avec la multiplication de A.

Soit $a \mathcal{R} b \iff a - b \in I \quad \text{et} \quad a' \mathcal{R} b' \iff a' - b' \in I.$

$$\left.\begin{matrix} a - b \in I \\ a' \in A \end{matrix}\right\} \implies aa' - ba' \in I; \qquad \left.\begin{matrix} a' - b' \in I \\ b \in A \end{matrix}\right\} \implies ba' - bb' \in I$$

et par suite $aa' - bb' \in I \iff aa' \mathcal{R} bb'.$

Nous sommes ainsi conduits à poser :

DÉFINITION. — **On appelle idéal tout sous-ensemble I d'un anneau commutatif A jouissant des deux propriétés suivantes :**

a) **I est un sous-groupe additif de A**

b) **Le produit d'un élément quelconque de I et d'un élément quelconque de A est un élément de I**

et à énoncer :

THÉORÈME. — **Etant donné un anneau commutatif A, les relations d'équivalence compatibles avec les lois de structure sont les relations binaires de la forme**

« $a \mathfrak{R} b$ **signifie** $a - b \in I$ », **I étant un idéal de A.**

L'ensemble $A/\mathfrak{R}$, que l'on note aussi A/I, est muni (26,6°) de deux lois internes qui vérifient les axiomes de structure d'anneau; nous dirons qu'il s'agit de l'anneau-quotient de A par $\mathfrak{R}$ (ou par I); si A est unitaire, on constate que l'anneau-quotient est également unitaire.

EXEMPLE. — Soit Z, anneau des entiers relatifs.

A tout entier positif donné, n, on peut associer l'ensemble $n\mathrm{Z}$ formé par les entiers relatifs $n.x$ quand x parcourt Z; on dit qu'il s'agit des *multiples de n*. On vérifie sans peine que $n\mathrm{Z}$ est un idéal de Z.

L'anneau-quotient, que l'on note $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$, est appelé anneau des classes résiduelles modulo n; on peut noter $\bar{a}$ la classe de $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ formée des éléments de Z qui sont équivalents à un élément donné a, de Z; $\bar{a}$ est l'ensemble des entiers $a + nx$ quand x parcourt Z; $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont respectivement l'élément neutre de l'addition et celui de la multiplication dans $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$.

REMARQUE. — Z est un anneau d'intégrité; $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ est un anneau d'intégrité si et seulement si n est premier. En effet :

n non premier : $\exists\, a, b \in \mathrm{Z}$ tels que $a.b = n \Longrightarrow \bar{a}.\bar{b} = \bar{0}$.

n premier : si n divise $a.b$, n divise soit a, soit b. Autrement dit

$$\bar{a}.\bar{b} = \bar{0} \Longrightarrow \text{soit } \bar{a} = \bar{0}, \text{ soit } \bar{b} = \bar{0}.$$

2° Extension à un anneau non commutatif. — *a*) DÉFINITION. — *On appelle idéal à gauche* (resp. *à droite*) *d'un anneau* A *tout sous-ensemble* I *de* A *tel que*

a) I *est un sous-groupe additif de* A,

b) $\forall x \in I,\ \forall a \in A \quad ax \in I$ (resp. $xa \in I$).

Tout sous-ensemble de A qui est simultanément idéal à gauche et idéal à droite de A est dit *idéal bilatère* de A; $\{0\}$ et A sont des idéaux bilatères de A.

En particulier, dans un anneau commutatif tout idéal est bilatère.

b) Une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur A sera compatible avec les lois de structure si elle est compatible avec l'addition, et si elle est compatible, à gauche et à droite, avec la multiplication. En raisonnant comme au 1°, on démontre :

THÉORÈME. — *Etant donné un anneau* A, *les relations d'équivalence compatibles avec les lois de structure sont les relations binaires de la forme :* « $a\mathfrak{R}b$ signifie $a - b \in I$ », I *étant un idéal bilatère de* A.

40. *Axiomes de la structure de corps.* — 1° Définition condensée. — Soit K un anneau et soit 0 l'élément neutre de la première loi (dite *addition*) pour laquelle K est un groupe commutatif, la seconde loi étant dite *multiplication*. Si l'ensemble $\mathrm{K}^* = \mathrm{K} - \{0\}$ est stable pour la multiplication et si la loi induite sur K^* par la multiplication confère à K^* une structure de groupe, on dit alors que K est un corps. L'élément neutre ε de la multiplication induite sur K^* est dit *élément unité* du corps K, 0 est dit *zéro* de K. Un corps renferme donc au moins deux éléments, 0 et ε. En résumé :

DÉFINITION. — **On appelle corps un anneau K tel que $\mathrm{K}^* = \mathrm{K} - \{0\}$ (0 étant l'élément neutre de l'addition) soit un groupe pour la multiplication.**

2° **Définition explicite.** — Un corps est un ensemble K sur lequel existent deux lois de composition internes jouissant des propriétés suivantes :

a) La première loi (dite *addition*) est une loi de groupe commutatif sur K.

b) La seconde loi (dite *multiplication*) est associative et distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition :

$$\forall (a, b, c) \in K^3, \qquad (ab)c = a(bc), \qquad \begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (b+c)a = ba + ca. \end{cases}$$

c) En outre, en posant $K^* = K - \{0\}$,

I) $$\forall (a, b) \in (K^*)^2, \qquad ab \in K^*$$

II) il existe un élément et un seul, ε, de K^* tel que

$$\forall a \in K^*, \qquad a\varepsilon = \varepsilon a = a$$

III) à tout élément a de K^* peut être associé un élément a^{-1} de K^* tel que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \varepsilon$$

a^{-1} est appelé l'inverse de a.

Ces propriétés font de K^* un groupe pour la multiplication; si celle-ci est commutative, on dit que K est un *corps commutatif*.

3° Exemple. L'ensemble Q des nombres rationnels (36, 5°) répond aux axiomes de la structure de corps. Nous dirons dorénavant « corps des nombres rationnels ». La suite de ce cours introduira d'autres corps.

4° **Sous-corps.** — Définition. — **On appelle sous-corps d'un corps K tout sous-ensemble H de K qui est stable pour les deux lois de structure et tel que les lois induites sur H confèrent à H une structure de corps.**

41. ***Propriétés générales d'un corps.*** — Les résultats établis antérieurement sur les groupes et les anneaux s'appliquent à un corps. C'est ainsi qu'on pourra parler de la caractéristique d'un corps (38, 4°), et de corps ordonné (38, 5°); par exemple : Q *est un corps de caractéristique nulle*; Q *est un corps ordonné.*

1° **Nullité d'un produit.** — La valeur du produit $0 \times a$ ou $a \times 0$ n'est pas prévue par les propriétés de la seconde loi, mais elle découle de la propriété de distributivité, comme on l'a vu pour un anneau :

$$\forall a \in K, \qquad 0 \times a = a \times 0 = 0.$$

Inversement, supposons $a \times b = 0$; si a et b étaient tous deux différents de zéro, leur produit, appartenant à K^*, serait différent de zéro; c'est donc que l'un au moins des deux éléments a et b est zéro.

Les résultats précédents se généralisent pour un nombre quelconque de facteurs :

Un produit de facteurs pris dans un corps coïncide avec le zéro de ce corps, si et seulement si l'un des facteurs au moins coïncide avec ce zéro.

2° **Propriété de l'élément unité.** — Appliquons le résultat du 1° à l'élément unité ε du corps :

$$0 \times \varepsilon = \varepsilon \times 0 = 0.$$

Ainsi ε est élément neutre non seulement pour la multiplication induite sur K^*, mais aussi pour la multiplication sur K.

3° **Opposé d'un élément.** — L'opposé de a étant noté $-a$ (n° 30),

$$[\varepsilon + (-\varepsilon)] \times a = 0 \Longrightarrow \varepsilon \times a + (-\varepsilon) \times a = 0$$

et enfin $$-a = (-\varepsilon) \times a.$$

4° **Équation $ax = b$ (resp. $ya = b$) dans un corps.** — Les éléments a et b appartenant au corps K, peut-on trouver dans K un élément x (resp. y) tel que $ax = b$ (resp. $ya = b$)?

I. Si $a \neq 0$, $\quad x = a^{-1}b$ (resp. $y = ba^{-1}$).

II. Si $a = 0$, $\quad b \neq 0$, l'équation proposée n'a pas de solution.

Si $a = 0$, $\quad b = 0$, tout élément de K est solution.

5° **Corps commutatif.** — Si le corps K est commutatif, les équations du 4° ont la même solution $x = y = a^{-1}b = ba^{-1}$; dans la pratique cette solution se note $\frac{b}{a}$. On vérifie aussi les formules suivantes

$$\frac{b}{a} = \frac{bm}{am} (m \neq 0); \qquad \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{ba' + ab'}{aa'}; \qquad \frac{b}{a} \times \frac{b'}{a'} = \frac{bb'}{aa'}.$$

6° **Valeur absolue.** — Nous supposons ici connu le corps des réels (tome II, chapitre I). En généralisant le n° 36, 9°, nous énonçons

DÉFINITION. — **Un corps commutatif K est dit valué s'il existe une application $x \longrightarrow |x|$, dite valeur absolue, de K dans l'ensemble des réels positifs ou nuls telle que :**

I) $$|x| = 0_R \Longleftrightarrow x = 0_K$$

II) $$\forall (x, x') \in K \times K, \begin{cases} |xx'| = |x||x'| \\ |x + x'| \leqslant |x| + |x'|. \end{cases}$$

III)

Par abus de langage, on dit que $|x|$ est la *valeur absolue* de $x \in K$.

Les propriétés II et III se généralisent par récurrence à n éléments de K.

REMARQUE. — L'exercice 13, page 77, donne un exemple de valeur absolue.

7° **Corps des fractions d'un anneau d'intégrité.** — Nous avons vu (n° 33) que si E était un demi-groupe commutatif, on pouvait construire par symétrisation un groupe $\overline{E}$ dans lequel on pouvait immerger E.

Considérons alors un anneau commutatif A sans diviseur de zéro; c'est un groupe pour la loi d'addition, ce n'est pas un groupe pour la loi de multiplication. Mais nous allons, par symétrisation de $A - \{0\}$ relativement

à la loi multiplicative créer un ensemble qui sera un groupe pour la multiplication.

I. *Régularité de la multiplication dans l'anneau A.* — Montrons d'abord que la multiplication dans A est une opération régulière pour tout élément autre que l'élément neutre, 0, de l'addition. Toutes les lettres latines minuscules introduites dans la suite, a, b, ... affectées ou non d'indices, désigneront des éléments de l'anneau A.

Supposons $ac = bc \qquad c \neq 0.$

ou $ac - bc = 0;$

par distributivité $(a - b)c = 0.$

Puisque A est sans diviseur de zéro, l'égalité précédente où c est différent de zéro exige que $a - b$ soit zéro, donc que $a = b$.

En définitive $\left.\begin{matrix} ac = bc \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a = b.$

Comme la multiplication dans A est supposée commutative et associative, on se trouve placé dans les conditions du n° 33, à condition d'appliquer les résultats obtenus à l'ensemble A^* déduit de A par suppression de l'élément neutre de l'addition

$$A^* = A - \{0\}.$$

II. *Création d'un ensemble K par symétrisation.* — Dès lors la théorie du n° 33 peut s'appliquer sans aucun changement, en supposant que les lettres a, b, ... désignent maintenant des éléments de A au lieu de désigner des entiers relatifs.

On crée K^* par symétrisation de A^* pour la loi de multiplication.

On adjoint à K^* l'élément neutre de l'addition dans A, d'où un ensemble K.

On définit dans K une loi notée additivement qui confère à K une structure de groupe commutatif et l'on vérifie que la multiplication est distributive par rapport à l'addition

III. *Corps des fractions d'un anneau d'intégrité.* — On vérifie enfin que l'ensemble K satisfait à tous les axiomes de la structure de corps.

On dit que l'ensemble K des fractions $\frac{a_1}{a_2}$, où a_1 et a_2 appartiennent à A ($a_2 \neq 0$), est le « corps des fractions » de l'anneau d'intégrité A.

42. *Homomorphismes d'anneaux et de corps.* — 1° Soient A et A' deux anneaux (resp. corps) dans lesquels les lois de groupe commutatif sont notées additivement, les secondes lois étant notées multiplicativement. Nous désignerons par e et e' les éléments neutres dans les lois additives :

$$\forall x \in A, \quad ex = e; \qquad \forall x' \in A', \quad e'x' = e'.$$

De l'étude générale des homomorphismes (n° 23), retenons

DÉFINITION. — **Une application f de A dans A' est un homomorphisme**

d'anneaux (resp. **de corps**) **si**

$$\forall x, y \in A \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (1) \\ f(xy) = f(x)\,f(y) & (2) \end{cases}$$

Comme au n° **32**, on dit que $f(A)$ (ou $\operatorname{Im} f$) est l'image de f, et que $f^{-1}(e')$ (ou $\operatorname{Ker} f$) est le noyau de f.

D'après (1), f est un homomorphisme du groupe additif A dans le groupe additif A'; l'étude du n° **32** s'applique, nous allons la compléter.

THÉORÈME I. — **L'image de f est un sous-anneau de A'.**

$\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de A' (**32**); $\operatorname{Im} f$ est une partie de A' stable pour la seconde loi (**23**, 6°). On utilise alors le n° **37** (2°).

THÉORÈME II : $e' = f(e)$; $\quad \forall x \in A \quad f(-x) = -f(x)$ (**cf. n° 32**)

THÉORÈME III. — **Le noyau de f est un idéal bilatère de** A.

Ker f est un sous-groupe (nécessairement distingué) du groupe commutatif A (**32**); (a, x) étant un élément quelconque de $A \times \operatorname{Ker} f$, on a en outre

$$\begin{cases} f(ax) = f(a)\,f(x) = f(a)\,e' = e' & \text{et} \quad ax \in \operatorname{Ker} f \\ f(xa) = f(x)\,f(a) = e'f(a) = e' & \text{et} \quad xa \in \operatorname{Ker} f. \end{cases}$$

THÉORÈME IV. f **est injective si et seulement si** $\operatorname{Ker} f = \{ e \}$, (**cf. n° 32.**)

2° THÉORÈME. — **Les seuls idéaux d'un corps** K, **considéré comme anneau, sont** $\{ e \}$ **et** K.

Soit I un idéal de K (à droite pour fixer les idées) qui n'est pas réduit à l'élément nul $\{ e \}$. Il existe donc dans I un élément non nul, a. Soit a^{-1} l'inverse de a dans K. D'après la définition d'un idéal, on a : $aa^{-1} \in I$, par suite l'élément unité ε de K appartient à I. Il en résulte :

$\forall x \in K$, $\varepsilon x \in I$, c'est-à-dire $x \in I$; en d'autres termes, $I = K$.

3° Il résulte du 2° et du théorème III du 1° que le noyau d'un homomorphisme f d'un corps K dans un corps K' est nécessairement $\{ e \}$ ou K.

I) Si $\operatorname{Ker} f = K$, $\forall x \in K$, $f(x) = e'$, et $\operatorname{Im} f = \{ e' \}$

II) Si $\operatorname{Ker} f = \{ e \}$, l'application f est injective (théorème IV du 1°). Dans la factorisation canonique de f (**18**, 8° et **32**, 2°)

$$K \xrightarrow{\varphi} K/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\psi} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i} K',$$

la surjection canonique φ de K sur $K/\operatorname{Ker} f$ est une bijection; comme ψ est une bijection, il en est de même de $\psi \circ \varphi$.

Finalement, l'image de f est isomorphe à K, elle a donc une structure de corps : $\operatorname{Im} f$ *est un sous-corps de* K', *isomorphe à* K.

En particulier, si f est surjective, $\operatorname{Im} f = K'$; il en résulte que $\operatorname{Im} f$ contient non seulement e', mais aussi l'élément unité ε' de K', c'est l'hypothèse II qui est réalisée, et on peut énoncer :

THÉORÈME. — **Si un homomorphisme de corps est surjectif, c'est un isomorphisme.**

EXERCICES

1. — Soit une opération $*$ partout définie dans un ensemble E. On dit que e est élément neutre à droite si $\forall x \in E$, $x * e = x$; on dit que x' est inverse à droite de x pour e si $x * x' = e$.

Si l'opération $*$ est associative, admet un élément neutre à droite, e, et si tout élément x de E admet un inverse à droite pour e, démontrer que E est un groupe pour $*$.

2. — Dans un anneau A non commutatif, on définit une opération interne, $*$, par

$$x * y = xy - yx.$$

a) Comparer $x * y$ et $y * x$.

b) Démontrer que l'opération est distributive par rapport à l'addition dans A.

c) Démontrer : $x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$

$$y * (x * z) = x * (y * z) - (x * y) * z.$$

3. — Soit A un anneau commutatif dans lequel la multiplication possède un élément neutre noté 1. On appelle unitaire tout élément X de A tel qu'il existe un élément X′ vérifiant $XX' = 1$.

a) Montrer que l'ensemble des éléments unitaires de A forme un groupe multiplicatif.

**b*) Étudier les éléments unitaires dans l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle.

4. — Démontrer qu'il existe des corps contenant deux, ou trois éléments : on désignera par 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et la multiplication, on dressera les tables de ces opérations et on examinera si la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Étudier de même l'existence de corps contenant quatre éléments.

5. — On considère l'anneau Z/5Z des classes résiduelles modulo 5 (cf. n° **39**). On désigne ces classes d'équivalence par $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$.

Dresser les tables d'addition et de multiplication dans Z/5Z. Montrer que Z/5Z est un corps commutatif.

Résoudre, dans Z/5Z, les équations

$$\begin{cases} \bar{1}\,x + \bar{2}\,y = \bar{3} \\ \bar{2}\,x + \bar{3}\,y = \bar{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 - \bar{4}\,x - \bar{2} = \bar{0}.$$

Démontrer que, dans Z/5Z, $(a + b)^5 = a^5 + b^5$.

6. — On appelle anneau de Boole, un anneau A dans lequel (les deux lois étant notées comme l'addition et la multiplication) on a

$$x^2 = x, \qquad \forall x \in A.$$

tout élément est dit *idempotent*).

a) Montrer qu'un tel anneau est commutatif.

b) Vérifier que, 0 désignant l'élément neutre de l'addition, on a

$$x + x = 0 \quad \text{et} \quad xy\,(x + y) = 0, \qquad \forall x \in A \quad \text{et} \quad \forall y \in A.$$

c) Montrer que la relation $xy = x$ est une relation d'ordre sur A.

d) On suppose que A n'admet pas de diviseur de 0. Montrer que, ou bien A est réduit à l'élément 0, ou bien A est un corps.

7. — On a vu au n° **39** que, n étant un entier naturel, l'ensemble nZ des entiers relatifs nx ($x \in$ Z) est un idéal de Z. On demande de démontrer, inversement, que tout idéal I de Z

est formé des multiples d'un entier naturel. En écartant le cas où I contient 0, et par suite ne contient que 0, I contient des entiers non nuls, donc des entiers positifs; soit a le plus petit entier positif de I, b un élément quelconque de I, on considérera alors la division euclidienne de b par a.

8. — Montrer que, si n est premier, l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ des classes résiduelles modulo n est un corps : on a vu (39) que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un anneau d'intégrité unitaire; montrons que tout élément $\bar{a} \neq \bar{0}$ est symétrisable dans la multiplication; en effet, quand $\bar{x}$ prend les n valeurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\bar{a}.\bar{x}$ prend n valeurs; ces valeurs sont distinctes car

$$\bar{a}.\bar{x} = \bar{a}.\bar{y} \iff \bar{a}.(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0} \implies \bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{y};$$

l'ensemble des $\bar{a}.\bar{x}$ est donc $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ lui-même; il contient une fois, et une fois seulement, l'élément $\bar{1}$.

Plus généralement, démontrer que tout anneau d'intégrité qui admet un nombre fini d'éléments est un corps.

9. — Dans un plan euclidien on désigne par H l'hyperbole équilatère dont les sommets sont deux points donnés E et E'. Soit $*$ la loi interne déterminée sur H par : « étant donnés les points M et M' de H, la parallèle menée de E à la droite MM' — ou à la tangente en M à H si M' = M — recoupe H en M $*$ M' ».

a) Montrer que $*$ est une loi de groupe abélien. Condition pour que M $*$ M' = E'.

b) Montrer que AB et CD sont des cordes perpendiculaires de H si, et seulement si, A $*$ B $*$ C $*$ D = E'. En déduire que l'orthocentre du triangle formé par trois points de H est un point de H et que, si AB et AC sont des cordes perpendiculaires de H, la droite BC est perpendiculaire à la tangente en A à H.

10. — On appelle centre d'un groupe G la partie C de G formée par les éléments qui commutent avec tout élément de G. Montrer que C est un sous-groupe distingué de G.

11*. — *Idéal maximal.* — Un idéal M d'un anneau commutatif A est dit maximal si M $\neq$ A et si M et A sont les seuls idéaux de A qui contiennent M.

a) Si I est un idéal de l'anneau commutatif A tel que A/I est un corps, alors I est un idéal maximal.

b) Si M est un idéal maximal de l'anneau A commutatif et unitaire, alors A/M est un corps.

12*. — *Idéal premier.* — Un idéal P d'un anneau commutatif A est dit premier si

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} ab \in \mathrm{P} \\ b \notin \mathrm{P} \end{array}\right\} \implies a \in \mathrm{P}.$$

a) Montrer que (1) équivaut logiquement à : l'anneau-quotient de A/P est intègre.

b) Montrer que tout idéal maximal d'un anneau commutatif et unitaire est premier.

13*. — L'ensemble Q étant considéré comme sous-ensemble de R, la valeur absolue introduite au n° 36, 9° répond à la définition posée au n° 41, 5°. Il existe cependant d'autres valeurs absolues sur Q; en voici un exemple.

Tout rationnel, non nul, r, admet un et un seul représentant irréductible

$$\frac{p}{q} \quad (p \in \mathbf{Z}^*, \quad q \in \mathbf{N}^*).$$

Il existe un et un seul entier relatif m tel que

$$\frac{p}{q} = 2^m \frac{p'}{q'}, \qquad p' \text{ et } q' \text{ impairs.}$$

On pose : $\quad |\, r \,| = 2^{-m} \quad$ et $\quad |\, 0 \,| = 0.$

Montrer que l'on définit ainsi une valeur absolue sur Q.

CHAPITRE III

ANALYSE COMBINATOIRE

I. ARRANGEMENTS. PERMUTATIONS.

43. *Arrangement.* — 1° DÉFINITION. — **Étant donné un ensemble E de m éléments distincts, et un entier naturel p inférieur ou égal à m, on appelle arrangement p à p de ces m éléments tout sous-ensemble rangé de E contenant p éléments.**

D'après cette définition, deux tels arrangements α et β sont distincts si l'une au moins des circonstances suivantes est réalisée :

1° α et β ne contiennent pas les mêmes éléments;

2° α et β contenant les mêmes éléments, ceux-ci sont rangés de manières différentes.

Par exemple, considérons l'ensemble E des 5 chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$$2, 3, 4; \qquad 4, 3, 2; \qquad 1, 4, 5$$

sont trois arrangements 3 à 3 de ces 5 chiffres; les deux premiers diffèrent seulement par l'ordre des chiffres.

Nous nous proposons de calculer le nombre des arrangements de m éléments p à p, nombre que nous désignerons par A_m^p et de donner une règle pour former le tableau T_m^p de ces arrangements.

2° **Calcul de** A_m^p. — Supposons formé le tableau T_m^{p-1} des arrangements de m éléments donnés $p-1$ à $p-1$. A la suite de chacun de ces arrangements, plaçons successivement les $m-(p-1)$ éléments qu'il ne contient pas. Tout arrangement du tableau T_m^{p-1} donne ainsi $m-p+1$ arrangements p à p que nous plaçons dans un tableau T'.

Démontrons que T' est le tableau T_m^p.

a) Tous les arrangements du tableau T' *sont distincts.* — Pour le montrer, prenons-en deux quelconques. S'ils proviennent du même arrangement du tableau T_m^{p-1}, ils diffèrent par le dernier objet et s'ils proviennent de deux arrangements distincts du tableau T_m^{p-1}, ils ne peuvent être identiques, car ils le seraient encore après suppression du dernier objet, ce qui est absurde.

b) Le tableau T' *contient tous les arrangements des m objets donnés p à p.* — En effet, imaginons l'un quelconque de ces arrangements. Si l'on supprimait

le dernier élément de cet arrangement, on obtiendrait un arrangement α des m éléments donnés $p-1$ à $p-1$, arrangement qui figure nécessairement dans le tableau T_m^{p-1}. Le tableau T′ contient par suite tous les arrangements que l'on peut déduire de α en plaçant à la suite de cet arrangement successivement ceux des objets donnés qu'il ne contient pas, en particulier T′ renferme l'arrangement imaginé.

Comme le tableau T′ ou T_m^p renferme

$$A_m^{p-1} \times (m - p + 1)$$

arrangements p à p, on obtient la formule de récurrence

$$A_m^p = (m - p + 1) \times A_m^{p-1}. \qquad (1)$$

Nous présenterons le calcul de A_m^p en remplaçant successivement p dans la formule (1) par $p-1$, $p-2$, $p-3$, . . ., 2 ce qui donne les égalités

$$\begin{cases} A_m^{p-1} = (m - p + 2)A_m^{p-2} \\ A_m^{p-2} = (m - p + 3)A_m^{p-3} \\ A_m^{p-3} = (m - p + 4)A_m^{p-4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m^2 = (m-1)A_m^1 \end{cases} \qquad (2)$$

Écrivons enfin

$$A_m^1 = m. \qquad (3)$$

Il suffit de multiplier membre à membre les égalités (1), (2) et (3) et de supprimer les facteurs communs aux deux membres de l'égalité obtenue pour trouver

$$\boxed{A_m^p = m(m-1)(m-2) \ldots (m-p+1).} \qquad (4)$$

D'après cette formule, **le nombre des arrangements de m éléments p à p est le produit de p entiers consécutifs allant en décroissant à partir de m.**

3° **Formation du tableau des arrangements.** — La marche à suivre résulte du raisonnement que nous venons de faire. Pour former le tableau des arrangements des six lettres *a, b, c, d, e, f* quatre à quatre on forme successivement les tableaux T_6^1, T_6^2, T_6^3 des arrangements de ces lettres une à une, deux à deux, trois à trois et on en déduit le tableau demandé T_6^4 :

T_6^1 (*a, b, c, d, e, f*)

T_6^2 (*ab, ac, ad, ae, af, ba, bc, bd, be, bf, ca, cb, cd, ce, cf,* . . . . . , *fa, fb, fc, fd, fe*)

T_6^3 (*abc, abd, abe, abf,* . . . . . , *fea, feb, fec, fed*)

T_6^4 (*abcd, abce, abcf,* . . . . . , *feda, fedb, fedc*).

T_6^1 contient 6 arrangements; T_6^2 en contient $6 \times 5 = 30$; T_6^3, $6 \times 5 \times 4 = 120$ et T_6^4 en contient $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

44. ***Permutation.*** — 1° DÉFINITION. — **Étant donnés m éléments distincts, on appelle permutation de ces m éléments tout ensemble rangé comprenant ces m éléments.**

Un ensemble non rangé formé de m éléments distincts donne naissance à des permutations dont le nombre est désigné par P_m, deux quelconques d'entre elles ne diffèrent que par l'ordre du rangement.

Par exemple *cba*, *bca* sont deux permutations des 3 lettres *a*, *b*, *c*.

2° **Calcul de P_m, à partir des arrangements.** — Les permutations de m éléments sont les arrangements m à m de ces éléments, par suite :

$$P_m = A_m$$

ou (1) $P_m = m(m-1) \ldots 2.1$ ou $P_m = 1.2.3. \ldots (m-1)m.$

P_m est égal au produit des m premiers entiers naturels. Ce produit s'appelle *factorielle* m et se représente par la notation $m!$

D'après la formule (1)

$P_2 = 2$, $P_3 = 6$, $P_4 = 24$, $P_5 = 120$, $P_6 = 720$, $P_7 = 5\,040$, $P_8 = 40\,320$, $P_9 = 362\,880$, $P_{10} = 3\,628\,800$.

Pour donner une idée de la rapidité avec laquelle P_m augmente quand m croît, disons que P_{40} s'écrit avec 47 chiffres dans le système décimal et P_{100} avec 132 chiffres.

3° **Calcul direct de P_m.** — On peut distinguer les permutations ϖ d'éléments numérotés 1, 2, ..., m suivant qu'elles commencent par l'un des éléments 1, 2, ..., m. Pour évaluer le nombre de permutations ϖ commençant par 1, enlevons 1 à chacune de ces permutations; il reste chaque fois une permutation ϖ' des $m-1$ éléments 2, 3, ..., m; il existe P_{m-1} permutations ϖ'. Inversement, en plaçant l'élément 1 en avant d'une permutation ϖ', on reconstitue une permutation ϖ débutant par 1.

Comme on peut recommencer pour chaque élément, on obtient la formule de récurrence

$$P_m = mP_{m-1}. \qquad (1)$$

En remplaçant dans cette formule m successivement par $m-1, m-2, \ldots, 2$ et observant que $P_1 = 1$, on obtient

$$\begin{cases} P_{m-1} = (m-1)P_{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_2 = 2P_1 \\ P_1 = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Le produit membre à membre des égalités (1) et (2) redonne $P_m = m!$

II. SUBSTITUTIONS

45. *Substitutions sur un ensemble de m éléments.* — 1° DÉFINITION. — Étant donné un ensemble E formé de m éléments deux à deux distincts, on appelle substitution toute application de E sur lui-même.

La définition précédente est celle du programme; certains auteurs disent *permutation* au lieu de *substitution*; ce que nous appelons permutation n'est pour eux qu'un arrangement particulier.

Une telle application est *bijective.* En effet d'une part elle est surjective par définition, d'autre part, elle est injective car si deux éléments de E avaient la même image il y aurait un élément de E sans antécédent.

Nous noterons une substitution s en écrivant sur une première ligne, et dans un ordre indifférent, les éléments de l'ensemble E sur lequel elle opère et sur une seconde ligne les images par s des éléments de la première ligne. C'est ainsi que

$$\begin{pmatrix} \times & - & ? & + & 0 \\ ? & 0 & + & - & \times \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} - & + & \times & 0 & ? \\ 0 & - & ? & \times & + \end{pmatrix}$$

représentent la substitution s pour laquelle $E = \{ \times, -, ?, +, 0 \}$ et

$$s(\times) = ?; \quad s(-) = 0; \quad s(?) = +; \quad s(+) = -; \quad s(0) = \times.$$

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La composition des applications munit l'ensemble $\mathfrak{S}$ (E) des substitutions d'un ensemble fini E d'une structure de groupe; on dit que $\mathfrak{S}$ (E) est le groupe symétrique de** E.

Le produit de deux bijections étant une bijection, la composition des applications (notée $\circ$ au n° 18) est une opération interne sur $\mathfrak{S}$ (E).

D'autre part :

a) la loi $\circ$ est associative (cf. n° 21);

b) elle possède un élément neutre, l'application identique de E sur E;

c) comme toute application bijective de E sur E, une substitution admet une application réciproque, qui est elle-même une application bijective de E sur E et, par suite, une substitution.

La structure de groupe en résulte.

REMARQUE. — Pour $m > 2$, le groupe $\mathfrak{S}$ (E) n'est pas commutatif. C'est ainsi que si, sur $E = \{ a, b, c \}$ nous définissons deux substitutions par

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix},$$

nous avons

$$s' \circ s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s \circ s' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

2° THÉORÈME. — **Les groupes symétriques de deux ensembles de m éléments sont des groupes isomorphes.**

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ de l'ensemble $N_m = \{ 1, 2, \ldots, m \}$ et du groupe symétrique $\mathfrak{S}$ (E) d'un ensemble quelconque, E, de m éléments deux à deux distincts.

N_m et E ayant le même nombre d'éléments, il existe des bijections de N_m sur E. Choisissons l'une d'elles, que nous désignons par φ.

A la substitution générique $s \in \mathfrak{S}_m$ on peut associer, par l'intermédiaire de φ, une substitution $\sigma \in \mathfrak{S}$ (E), telle que

$$\sigma = \varphi \circ s \circ \varphi^{-1} \iff s = \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$$

On constate ainsi l'existence d'une bijection ψ de $\mathfrak{S}_m$ sur $\mathfrak{S}(E)$

$$\sigma = \psi(s)$$

D'autre part nous avons

$$\psi(s' \circ s) = \psi \circ s' \circ s \circ \varphi^{-1} \quad \text{ou} \quad (\varphi \circ s' \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ s \circ \varphi^{-1})$$

ce qui s'écrit

$$\psi(s' \circ s) = \psi(s') \circ \psi(s),$$

et montre que ψ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_m$ sur $\mathfrak{S}(E)$, chacun de ces ensembles étant muni de la loi « composition des applications » qui le munit de la structure de groupe; ψ est ainsi un isomorphisme de groupes.

APPLICATION. — Au lieu d'étudier le groupe symétrique $\mathfrak{S}(E)$ pour un ensemble quelconque E de m éléments, nous étudierons, grâce à l'isomorphisme précédent, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ de l'ensemble N_m; nous dirons que $\mathfrak{S}_m$ est *« le groupe symétrique d'ordre m »*.

Toute proposition relative à $\mathfrak{S}_m$ donnera, par l'isomorphisme précédent, une proposition relative à $\mathfrak{S}(E)$.

D'après le 1°, toute substitution $s \in \mathfrak{S}_m$ peut s'écrire (en profitant de ce que N_m peut être ordonné)

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ s(1) & s(2) & \dots & s(m) \end{pmatrix}$$

Il en résulte que, ϖ désignant la permutation de N_m

$$\varpi = \{\, s(1), s(2), \dots, s(m) \,\}$$

la correspondance $s \longrightarrow \varpi$ détermine une bijection de $\mathfrak{S}_m$ sur l'ensemble des permutations de N_m. Il en résulte que $\mathfrak{S}_m$ a $m!$ éléments.

REMARQUE. — Dans la démonstration du théorème précédent, on peut noter a_i, l'élément de E associé par φ à l'élément i de N_m

$$a_i = \varphi(i)$$

La relation ψ entre les substitutions s et σ qui ont été envisagées plus haut peut s'expliciter de la façon suivante :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ s(1) & s(2) & \dots & s(m) \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_{s(1)} & a_{s(2)} & \dots & a_{s(m)} \end{pmatrix}$$

3° Théorème de Cayley. — Tout groupe fini d'ordre m est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique d'ordre m.

Soit G un groupe d'ordre m, c'est-à-dire un ensemble $G = \{\, a, b \dots, l \,\}$ de m éléments sur lequel a été définie une loi interne notée $\cdot$ qui vérifie les axiomes de structure de groupe.

Considérons un élément quelconque, x, de G. L'ensemble $\{\, x.a, x.b, \dots x.l \,\}$ est formé d'éléments de G deux à deux distincts : en effet, x étant régulier dans la loi de groupe, $x.y = x.z$ exige $y = z$. Il en résulte qu'en écrivant

$$s = \begin{pmatrix} a & b & \dots & l \\ x.a & x.b & \dots & x.l \end{pmatrix}$$

nous définissons une substitution $s \in \mathfrak{S}(G)$.

La correspondance $x \longrightarrow s$ détermine une application, $s = f(x)$, de G dans $\mathfrak{S}(G)$.

Cette application est injective; en effet $f(x) = f(y)$ signifie que $x.r = y.r$ $[r = a, b, \ldots, l]$, donc exige $x = y$. Par suite f est une bijection de G sur f (G); posons $\Sigma = f(G)$.

Or $f(x)$ transforment $\{ a, b, \ldots, l \}$ en $\{ x.a, x.b, \ldots, x.l \}$, $f(x')$ transforme ce dernier ensemble en $\{ x'.x.a, x'.x.b, \ldots, x'.x.l \}$ c'est dire que $f(x') \circ f(x) = f(x'.x)$.

On montre ainsi que f est un isomorphisme de G (.) sur Σ (o) et que la loi o est une loi de groupe sur Σ, ou encore que Σ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}$ (G).

Comme $\mathfrak{S}$ (G) est isomorphe à $\mathfrak{S}_m$, Σ est isomorphe à un sous-groupe Θ de $\mathfrak{S}_m$ et finalement le groupe G est isomorphe à Θ, sous-groupe du groupe symétrique d'ordre m.

46. *Étude du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_m$. — 1° THÉORÈME. — Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ contient $m!$ éléments.

Cette proposition a été démontrée au n° 45, 2°.

2° **Transpositions.** — DÉFINITION. — **On appelle transposition une substitution $\tau \in \mathfrak{S}_m$ qui, à chaque élément de $N_m = \{ 1, 2, \ldots, m \}$ fait correspondre lui-même, à l'exception de deux éléments a et b, qu'elle échange l'un avec l'autre.**

Une transposition est notée

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & a & \ldots & b & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & b & \ldots & a & \ldots & m \end{pmatrix}$$

a et b désignant les deux entiers qui s'échangent

$$\tau(a) = b, \quad \tau(b) = a, \quad \tau(\lambda) = \lambda \quad \text{si} \quad \lambda \notin \{ a, b \}.$$

Il en résulte que $\tau \circ \tau$, ou τ^2, est l'application identique de N_m sur N_m.

THÉORÈME. — **Toute substitution peut être considérée comme un produit de transpositions.**

Démontrons cette proposition par récurrence.

I. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ contient deux éléments

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

τ est une transposition et $u = \tau^2$.

II. Supposons la propriété vraie pour toute substitution de $\mathfrak{S}_{m-1}$ et soit $s \in \mathfrak{S}_m$ avec

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \alpha & \beta & \ldots & \mu \end{pmatrix}$$

α) Si $\mu = m$, on peut écrire

$$s(m) = m; \qquad s(i) = \hat{s}(i) \qquad (i \neq m)$$

en désignant par $\hat{s}$ la restriction de s à l'ensemble $N_{m-1} = \{ 1, 2, \ldots, m-1 \}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\hat{s}$, qui est un élément de $\mathfrak{S}_{m-1}$ est un produit de transpositions; il en est de même pour s.

β) Si $\mu \neq m$, on a

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu & \dots & m \\ \alpha & \beta & \dots & \varkappa & \dots & \mu \end{pmatrix}$$

et on constate : $s = s' \circ \tau$, avec

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu & \dots & m \\ 1 & 2 & \dots & m & \dots & \mu \end{pmatrix}; \qquad s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu & \dots & m \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \varkappa \end{pmatrix}$$

On est ramené au cas α) où l'un des éléments de N_m se correspond à lui-même (on a vu au n° 45, 1° que l'ordre des éléments de l'ensemble considéré est indifférent).

Soit par exemple $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Nous obtenons

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

47. *Substitutions circulaires.* — DÉFINITION. — **On appelle substitution circulaire sur l'ensemble $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ la substitution $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ déterminée par**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ 2 & 3 & \dots & m & 1 \end{pmatrix}$$

σ remplace chaque élément de N_m, considéré ici comme ordonné, par le suivant, et le dernier par le premier.

En itérant cette substitution on obtient

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ 3 & 4 & & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ 4 & 5 & \dots & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour $1 \leqslant p \leqslant m$, $\sigma^p(m) = p$; en particulier $\sigma^m = u$, u désignant la substitution identique. Ensuite on obtient $\sigma^{m+1} = \sigma, \dots$.

Il en résulte que les substitutions

$$\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{m-1}, \sigma^m = u$$

sont deux à deux distinctes et qu'elles forment un sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$; un tel groupe, engendré par les puissances successives d'un élément du groupe (noté multiplicativement), est appelé *groupe cyclique.*

Naturellement nous aurions pu appeler substitution circulaire la substitution

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ m & 1 & \dots & m-2 & m-1 \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que σ^{-1} ou σ^{m-1}; nous aurions obtenu le même groupe cyclique.

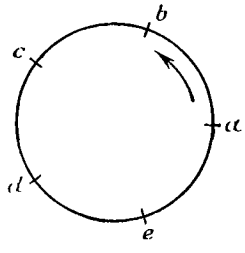


FIG. 5.

REMARQUE. — L'isomorphisme signalé au n° 45, 2° permet de définir une substitution circulaire sur tout ensemble E de m éléments. Pour cela il faut ordonner E, c'est-à-dire définir une bijection de E sur N_m;

cela revient à imaginer que l'on dispose les éléments de E sur un cercle orienté (fig. 5), dans un ordre donné a, b, c, d, e. On a ainsi

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}$$

48. ***Étude du groupe symétrique*** $\mathfrak{S}_3$. — 1° Donnons des noms particuliers aux 6 substitutions du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

$$\underset{u}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{s}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{s'}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\tau_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{\tau_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\tau_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

τ_1, τ_2, τ_3 sont des transpositions; s est une substitution circulaire, et s' s'obtient en itérant s : $s' = s \circ s$ ou s^2; u est la substitution identique.

La « table de Pythagore » pour le produit de ces substitutions est la suivante (le premier facteur se lit sur la ligne du haut, le second facteur se lit sur la colonne de gauche; on n'oubliera pas que les facteurs se notent dans l'ordre de droite à gauche).

premier facteur (à droite)

second facteur (à gauche)	u	s	s'	τ_1	τ_2	τ_3
u	u	s	s'	τ_1	τ_2	τ_3
s	s	s'	u	τ_2	τ_3	τ_1
s'	s'	u	s	τ_3	τ_1	τ_2
τ_1	τ_1	τ_3	τ_2	u	s'	s
τ_2	τ_2	τ_1	τ_3	s	u	s'
τ_3	τ_3	τ_2	τ_1	s'	s	u

Ce tableau permet d'effectuer aisément des produits de substitutions : par exemple

$$s^2 = s' \qquad s'^2 = s \qquad \text{d'où} \qquad s^3 = s \circ s' = u; \qquad s'^3 = u$$
$$s \circ \tau = \tau \circ s' \quad \text{et} \quad \tau \circ s = s' \circ \tau$$

quel que soit l'indice de τ.

2° **Sous-groupes.** — Les 9 cases situées à l'angle supérieur gauche du tableau montrent que les produits effectués sur deux des substitutions u, s, s' donnent un résultat appartenant au même sous-ensemble de $\mathfrak{S}_3$; on en déduit que $\{ u, s, s' \}$ constitue un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$; il s'agit du groupe cyclique d'ordre 3.

De même $\{ u, \tau_1 \}$; $\{ u, \tau_2 \}$; $\{ u, \tau_3 \}$ constituent des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.

3° **Application au triangle équilatéral.** — Soit ABC un triangle équilatéral donné, dans un plan euclidien orienté $\mathcal{E}$. A toute isométrie qui applique ce triangle sur lui-même on peut associer une substitution de l'ensemble $\{$ A, B, C $\}$ ou encore un élément de $\mathfrak{S}_3$ et réciproquement. C'est ainsi que (fig. 6) :

u correspond à la transformation identique;

s correspond à la rotation de centre ω, centre de gravité du triangle, qui transforme A en B, B en C, C en A.

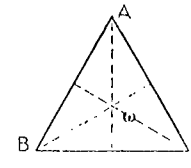


FIG. 6.

s' correspond à la rotation inverse;

τ_1, τ_2, τ_3 correspondent respectivement aux symétries par rapport aux hauteurs issues des sommets A, B, C.

On peut dire que les isométries de $\mathcal{E}$ qui conservent dans son ensemble le triangle équilatéral ABC constituent un groupe isomorphe à $\mathcal{G}_3$.

49. *Inversions dans une permutation des m premiers entiers naturels.* — 1° DÉFINITION. — **Étant donnée une permutation ϖ des m premiers entiers naturels, on dit qu'un élément i de ϖ présente une inversion avec un élément j de ϖ si j suit i et si i est supérieur à j.**

Par exemple, soit $\varpi = \{ 2\ 4\ 5\ 1\ 3 \}$; pour trouver le nombre total d'inversions que présente ϖ, on part de l'élément le plus à gauche :

2 présente une inversion avec 1 : 1
4 présente une inversion avec 1 et avec 3 : 2
5 présente une inversion avec 1 et avec 3 : 2
1 ne présente jamais d'inversion
ϖ contient donc 5 inversions.

2° **Parité d'une permutation.** — Soit I le nombre d'inversions de la permutation ϖ :

si I est nul ou pair, on dit que la permutation est *paire*;
si I est impair, on dit que la permutation est *impaire*.

50. *Signature d'une substitution.* — 1° A une substitution s de l'ensemble N_m des m premiers entiers naturels ($s \in \mathcal{G}_m$), nous avons su associer bijectivement la permutation des m premiers entiers naturels

$$\varpi = \{ s(1), s(2), \ldots, s(m) \}.$$

On note $I(s)$ le nombre des inversions de cette permutations ϖ, et l'on énonce alors :

DÉFINITION I. — **On appelle signature de la substitution s le nombre**

$$\varepsilon(s) = (-1)^{I(s)}$$

DÉFINITION II. — **La substitution s est dite paire ou impaire suivant que sa signature est $+1$ ou -1.**

Autrement dit, la parité de la substitution s est celle de la permutation

$$\varpi = \{ s(1), s(2), \ldots, s(m) \}$$

2° THÉORÈME. — **Une transposition est une substitution impaire.**

Une transposition $\tau \in \mathcal{G}_m$ s'écrit, a et b désignant deux entiers naturels, $a < b \leqslant m$:

$$\tau = \begin{pmatrix} A & a & C & b & B \\ A & b & C & a & B \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec : $A = \{1, \ldots, a-1\}$, $C = \{a+1, \ldots, b-1\}$, $B = \{b+1, \ldots, m\}$.

I (τ) est, par définition le nombre des inversions de la permutation qui constitue la seconde ligne de (1). Pour les compter, cherchons combien chaque élément de cette permutation présente d'inversions avec ceux qui le suivent (cf. n° 49).

Les éléments de A ne donnent lieu à aucune inversion; b donne une inversion avec chaque élément de C (C renferme γ éléments, avec $\gamma = b - a - 1$);

b donne une inversion avec a;

b ne donne aucune inversion avec les éléments de B;

chacun des γ éléments de C présente une inversion avec a, mais n'en présente pas avec les éléments de B;

enfin ni a, ni les éléments de B ne fournissent d'inversion.

En résumé $I(\tau) = 2\gamma + 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$.

3° **Évaluation de la signature d'une substitution.** — Reprenons la permutation ϖ du 1° associée à la substitution s. Les éléments $s(i)$ et $s(j)$ de ϖ présentent une inversion et seulement si la différence $s(i) - s(j)$ a le signe contraire de celui de $i - j$, c'est-à-dire si

$$\frac{s(i) - s(j)}{i - j} < 0.$$

Par suite le signe de $(-1)^{I(s)}$ est celui du produit

$$\Pi \frac{s(i) - s(j)}{i - j}$$

étendu à tous les couples d'entiers naturels i et j distincts, au plus égaux à m.

(On vérifie que l'on peut d'ailleurs s'astreindre à prendre $i < j$.)

4° **Signature d'un produit de substitutions.**

THÉORÈME. — **La signature d'un produit de substitutions est le produit des signatures de ces substitutions.**

Soit s_1 et s_2 deux substitutions de $\mathfrak{S}_m$, et soit $s^* = s_2 \circ s_1$ le produit de s_1 par s_2.

$\varepsilon(s^*)$ a le signe de $\Pi \dfrac{s^*(i) - s^*(j)}{i - j}$

Or le produit précédent peut s'écrire

$$\Pi \frac{s_2[s_1(i)] - s_2[s_1(j)]}{s_1(i) - s_1(j)} \times \Pi \frac{s_1(i) - s_1(j)}{i - j}$$

Le second produit a le signe de $\varepsilon(s_1)$.

Le premier produit s'écrit, en posant $i' = s_1(i)$, $j' = s_1(j)$,

$$\Pi \frac{s_2(i') - s_2(j')}{i' - j'};$$

les entiers i' et j' sont distincts, comme étant les transformés par la bijection s

des entiers distincts i et j; on en déduit que le premier produit a le signe de $\varepsilon(s_2)$. Finalement

$$\varepsilon(s_2 \circ s_1) = \varepsilon(s_2)\,\varepsilon(s_1)$$

EXEMPLE. — Soit u la substitution identique, et s une substitution quelconque de $\mathfrak{S}_m$.

$$s^{-1} \circ s = u \qquad \text{donne} \quad \varepsilon(s^{-1})\,\varepsilon(s) = \varepsilon(u) \text{ c'est-à-dire } 1$$

$\varepsilon(s^{-1})$ et $\varepsilon(s)$ ont même valeur; deux substitutions réciproques ont la même signature.

COROLLAIRE. — Nous savons que toute substitution s est le produit de N transpositions. D'après les théorèmes du 2° et du 4°,

$$\varepsilon(s) = (-1)^N \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon(s) = (-1)^{I(s)}$$

On observera que le nombre N n'est pas déterminé de façon unique puisqu'il existe plusieurs façons de décomposer une substitution en produit de transpositions, mais la parité de N est bien déterminée : N a la même parité que le nombre I (s) des inversions de la permutation

$$\{\, s(1), s(2), \ldots, s(m) \,\}$$

Les substitutions que nous avons appelées paires (resp. impaires) peuvent être considérées comme le produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions.

51. ***Groupe alterné.*** — Nous venons de voir que les éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ peuvent être partagés en substitutions paires et substitutions impaires. D'après le théorème du n° 50, 4°, le produit de deux substitutions de même parité est une substitution paire. On en déduit :

THÉORÈME. — **Les substitutions paires de $\mathfrak{S}_m$ en constituent un sous-groupe, qui est dit groupe alterné.**

Ce sous-groupe contient $\frac{m!}{2}$ éléments. En effet à toute substitution paire s on peut associer biunivoquement la substitution impaire $\tau \circ s$, τ désignant la transposition qui échange 1 et 2.

EXEMPLE. — Le sous-groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ étudié au n° 48 admet pour sous-groupe alterné l'ensemble des substitutions que nous avons notées u, s, s'.

REMARQUE. — Naturellement les substitutions impaires de $\mathfrak{S}_m$ n'en constituent pas un sous-groupe, puisque le produit de deux d'entre elles n'est pas une substitution impaire.

III. COMBINAISONS. FORMULE DU BINÔME

52. ***Combinaison.*** — 1° DÉFINITION. — **Étant donné un ensemble E de m éléments distincts, et un entier naturel p inférieur ou égal à m, on appelle combinaison p à p de ces m éléments tout sous-ensemble de E contenant p éléments.**

D'après cette définition, deux combinaisons γ et δ sont distinctes si, et

seulement si, elles ne contiennent pas les mêmes éléments.

Si on représente les éléments de E par des lettres, on pourra représenter une combinaison γ en plaçant ces lettres dans l'ordre alphabétique, ce que nous supposerons dans la suite.

Nous nous proposons de calculer le nombre des combinaisons de m éléments p à p, nombre que nous désignerons par C_m^p ou encore $\binom{m}{p}$.

2° **Calcul de C_m^p.** — Supposons formé le tableau T des combinaisons de m éléments p à p. Sur toute combinaison γ du tableau T effectuons les $p!$ permutations possibles, et plaçons les ensembles rangés ainsi obtenus dans un tableau T'.

1° *Tous les éléments du tableau* T' *sont des arrangements des m éléments p à p.*

2° *Tous les arrangements du tableau* T' *sont distincts.* — Pour le montrer, prenons-en deux. S'ils proviennent de la même combinaison du tableau T, ils diffèrent par l'ordre des éléments et s'ils proviennent de deux combinaisons distinctes, ils diffèrent par la nature des éléments.

3° *Le tableau* T' *contient tous les arrangements des m éléments p à p.* — En effet, si on imagine un arrangement des m éléments p à p, abstraction faite de l'ordre des éléments, c'est une combinaison. Cette combinaison appartient au tableau T et comme on a placé les éléments de cette combinaison les uns à la suite des autres de toutes les façons possibles, on a certainement obtenu en particulier l'arrangement imaginé.

Ce raisonnement nous apprend que

$$A_m^p = C_m^p \times P_p$$

et par suite que

$$\boxed{C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p}} \qquad (1)$$

Le nombre des combinaisons de m éléments p à p est le quotient du produit de p nombres entiers consécutifs allant en décroissant à partir de m par le produit des p premiers entiers naturels.

REMARQUE. — Le nombre C_m^p étant manifestement entier, nous obtenons incidemment une proposition d'arithmétique : *Le produit de p entiers consécutifs est divisible par le produit des p premiers entiers.*

3° **Relations fondamentales entre les nombres C_m^p.** — *a*) Multiplions par $(m-p)!$ les deux termes de la fraction à laquelle est égal C_m^p; nous trouvons

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!} \qquad (2)$$

La formule précédente suppose $p < m$; elle subsiste pour $p = m$ si l'on convient de poser $0! = 1$, et redonne $C_m^m = 1$.

b) Le second membre de la formule précédente conserve la même valeur quand on y remplace p par $m - p$; on en conclut que

$$C_m^p = C_m^{m-p}. \tag{3}$$

Cette relation peut aussi s'obtenir en observant qu'à toute combinaison de m éléments p à p on peut associer biunivoquement la combinaison des mêmes éléments, $m - p$ à $m - p$, formée de ceux des éléments que ne contient pas la première.

c) Comparons deux nombres consécutifs de même indice inférieur m,

$$C_m^{p-1} \quad \text{et} \quad C_m^p;$$

les deux termes de la fraction C_m^p s'obtiennent en multipliant respectivement ceux de la fraction C_m^{p-1} par $m - p + 1$ et p :

$$C_m^p = \frac{m - p + 1}{p} \cdot C_m^{p-1}. \tag{4}$$

Cette formule permet parfois d'utiliser la valeur numérique déjà obtenue de C_m^{p-1} pour en déduire celle de C_m^p.

d) Dans le tableau T des combinaisons de m éléments p à p, considérons celles qui contiennent un élément donné, a; on les obtient en adjoignant à a une combinaison quelconque, $p - 1$ à $p - 1$, des $m - 1$ éléments autres que a; il en existe donc C_{m-1}^{p-1}. Les autres combinaisons du tableau T sont les combinaisons p à p des $m - 1$ éléments autres que a, leur nombre est C_{m-1}^p. Il résulte de là que

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}. \tag{5}$$

La formule (5) est encore valable pour $p = 1$, si l'on convient de poser

$$C_m = 1, \qquad \text{quel que soit } m.$$

53. ***Triangle de Pascal.*** — 1° Plaçons les nombres C_m^p dans un tableau composé de lignes (numérotées 1, 2, ... m, ...) et de colonnes (numérotées 1, 2, ..., p ...) de façon que C_m^p soit à la ligne m et à la colonne p ($p \leqslant m$).

Numéro des colonnes.

Numéro des lignes.	0	1	2	3	4	5	...	$p-1$	p ...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
...	...								
$m-1$	1	C_{m-1}^1	...					C_{m-1}^{p-1}	C_{m-1}^p ..
m	1	C_m^1	..						C_m^p ..

Comme on a posé $C_m^0 = 1$, on complète le tableau ainsi formé avec une colonne numérotée 0 et composée uniquement de 1, et l'on fait commencer cette colonne à une ligne numérotée 0 et comprenant le seul nombre 1, de façon que le tableau ainsi complété ait une forme triangulaire.

Ce tableau est appelé le triangle arithmétique de Pascal.

Sur sa diagonale principale se trouvent les nombres $C_p^p = 1$.

La formule

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$$

montre que chaque élément du triangle de Pascal (non situé dans la colonne de numéro 0) est la somme de celui qui le précède dans la colonne, et de celui qui précède ce dernier dans sa propre ligne.

On peut ainsi former le triangle de Pascal à partir de la colonne numérotée 0.

2° **Sens de variation des nombres C_m^p quand p varie de 1 à m.**

Nous avons vu que l'on forme C_m^p à partir de C_m^{p-1} en multipliant ce dernier nombre par

$$\rho = \frac{m - p + 1}{p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{m+1}{p} - 1.$$

Lorsque p prend les valeurs $1, 2, \ldots, m$, le rapport ρ décroît de m à $\frac{1}{m}$.

$$\rho > 1 \quad \text{tant que} \quad \frac{m+1}{p} > 2 \qquad \text{ou} \qquad p < \frac{m+1}{2}.$$

Distinguons deux cas suivant la parité de m :

1° m est pair, soit $m = 2\mu$; le plus grand entier inférieur à $\frac{2\mu + 1}{2}$ est μ. Tant que $p \leqslant \mu$, $C_{2\mu}^p > C_{2\mu}^{p-1}$; il y a donc, dans la ligne de numéro 2μ du triangle de Pascal un nombre supérieur à tous les autres, $C_{2\mu}^{\mu}$; c'est celui qui est au milieu de cette ligne; il est précédé et suivi de μ nombres;

2° m est impair, soit $m = 2\mu + 1$. Tant que $p < \mu + 1$, $C_{2\mu+1}^p > C_{2\mu+1}^{p-1}$; pour $p = \mu + 1$, les deux nombres

$$C_{2\mu+1}^{\mu} \qquad \text{et} \qquad C_{2\mu+1}^{\mu+1} \quad \text{sont égaux.}$$

Ce sont ceux qui sont au milieu de la ligne de numéro $2\mu + 1$ du triangle de Pascal; ils sont précédés et suivis de μ nombres.

54. *Binôme de Newton.* — 1° **Forme réduite et ordonnée du polynôme** $(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$. — Nous supposons que les éléments $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ appartiennent à un *anneau commutatif* A, et nous considérons le produit

$$P = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n).$$

Nous allons développer le produit P et l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

P est la somme des produits que l'on peut former en prenant pour facteurs un terme de chacun des n facteurs binômes. Un seul de ces produits est de degré n par rapport à x, c'est celui que l'on obtient en prenant x dans chacun

des facteurs, le coefficient de x^n est donc l'unité et l'on peut écrire

$$P = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots + \sigma_p x^{n-p} + \ldots + \sigma_{n-1} x + \sigma_n, \quad (1)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ étant les autres coefficients cherchés.

Ceux des produits considérés qui contiennent x^{n-1} s'obtiennent en prenant le terme indépendant de x dans l'un des facteurs binômes et x dans les $n - 1$ autres ce sont $a_1 x^{n-1}$, $a_2 x^{n-1}$, $\ldots$, $a_n x^{n-1}$, et

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

En désignant la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ par la notation Σa_1 on peut écrire $\sigma_1 = \Sigma a_1$.

D'une façon générale, pour trouver dans le développement de P un terme contenant x^{n-p}, il faut prendre le terme indépendant de x dans p des facteurs binômes et x dans les $n - p$ autres; à tout terme contenant x^{n-p} correspond ainsi un produit de p des facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Réciproquement, tout produit de p des facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est le coefficient de x^{n-p} dans un terme du développement de P : *Le coefficient σ_p de x^{n-p} est la somme de tous les produits que l'on peut former en prenant comme facteurs p des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

On désigne quelquefois par $\Sigma a_1 a_2$, $\Sigma a_1 a_2 a_3$, $\ldots$, $\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ les sommes $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}$ des produits deux à deux, trois à trois, etc., $n - 1$ à $n - 1$ des facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$; quant au coefficient σ_n, c'est le produit $a_1 a_2 \ldots a_n$.

A tout produit de p des facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ correspond une combinaison de ces n facteurs p à p et réciproquement : *Le nombre des produits qui composent σ_p est C_n^p.*

2° **Forme réduite et ordonnée du polynôme** $(x + a)^n$. — Dans la formule (1), remplaçons $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par un élément a de l'anneau commutatif A. Chacun des C_n^p produits qui composent σ_p devient a^p, et σ_p devient $C_n^p a^p$. (On a vu au n° 31, 7° que la somme de n éléments égaux à a d'un groupe additif se notait na.)

D'autre part P devient $(x + a)^n$. Finalement :

$$\boxed{(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^p a^p x^{n-p} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n.}$$

D'ailleurs $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$.

Ce développement contient $n + 1$ termes, il y en a p avant $C_n^p a^p x^{n-p}$ et $n - p$ après. En remplaçant $C_n^1, C_n^2, \ldots$ par les expressions connues, on peut encore écrire la *formule du binôme de Newton* :

$$\boxed{(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} a^p x^{n-p} + \ldots + \frac{n!}{n!} a^n.}$$

En particulier $\boxed{(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + a^3}$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

REMARQUE. — En regardant dans ces développements a et x comme deux variables, les termes extrêmes ainsi que les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux. Ce fait est général. Dans le développement ordonné de $(x + a)^n$ le terme qui en a p avant lui a pour coefficient C_n^p, celui qui en a p après lui a pour coefficient C_n^{n-p} et $C_n^p = C_n^{n-p}$.

3° **Méthode directe pour établir la formule du binôme de Newton.** — On peut raisonner par récurrence; les coefficients de $x + a$ sont 1 et 1, ceux de $(x+a)^2$ sont 1, 2, 1; ce sont les nombres situés dans les lignes 1 et 2 du triangle de Pascal (n° 53).

Supposons écrit le développement de $(x + a)^{n-1}$ ordonné suivant les puissances décroissantes de x, soit :

$$(x + a)^{n-1} = x^{n-1} + A_1ax^{n-2} + A_2a^2x^{n-3} + \ldots + A_{p-1}a^{p-1}x^{n-p} + A_pa^px^{n-p-1} + \ldots + A_{n-1}a^{n-1}.$$

Il est inutile, pour la suite, de savoir que les coefficients sont des nombres de combinaisons.

En multipliant par $x + a$ le polynôme écrit au second membre on trouve

$$(x + a)^n = x^n + (A_1 + 1)ax^{n-1} + (A_2 + A_1)a^2x^{n-2} + \ldots + (A_p + A_{p-1})a^px^{n-p} + \ldots + A_{n-1}a^n.$$

Le coefficient d'un terme quelconque du développement de $(x + a)^n$ est égal au coefficient du terme de même rang du développement de $(x + a)^{n-1}$ augmenté du coefficient du terme précédent dans le même développement.

On retrouve la loi de formation des nombres du triangle de Pascal, et l'on montre ainsi que les coefficients du développement de $(x + a)^n$ sont ceux de la ligne de numéro n dans le triangle de Pascal.

55. *Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.* — Soit

$$a, b, c, \ldots, h, k, l$$

une progression arithmétique de n termes appartenant à un anneau commutatif; si r est la raison de cette progression

$$b = a + r, \quad c = b + r, \ldots, \quad l = k + r.$$

Nous nous proposons de montrer comment l'on peut calculer, au moyen des termes extrêmes et de la raison, les sommes des puissances semblables des termes, c'est-à-dire les sommes telles que

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots + l^\alpha \qquad (\alpha \in N).$$

A cet effet, dans le développement de $(x + r)^{m+1}$ par la formule du binôme,

$$(x + r)^{m+1} = x^{m+1} + C^1_{m+1} r x^m + C^2_{m+1} r^2 x^{m-1} + \ldots + C^p_{m+1} r^p x^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}$$

remplaçons successivement x par les différents termes de la progression. Nous obtenons les égalités

$$\begin{cases} (a + r)^{m+1} = a^{m+1} + C^1_{m+1} r a^m + C^2_{m+1} r^2 a^{m-1} + \ldots + C^p_{m+1} r^p a^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1} \\ (b + r)^{m+1} = b^{m+1} + C^1_{m+1} r b^m + C^2_{m+1} r^2 b^{m-1} + \ldots + C^p_{m+1} r^p b^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l + r)^{m+1} = l^{m+1} + C^1_{m+1} r l^m + C^2_{m+1} r^2 l^{m-1} + \ldots + C^p_{m+1} r^p l^{m+1-p} + \ldots + r^{m+1}. \end{cases}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre en observant que les termes $(a + r)^{m+1}$, $(b + r)^{m+1}$, ..., $(k + r)^{m+1}$ des premiers membres se réduisent respectivement avec les termes b^{m+1}, ..., l^{m+1} des seconds. Dans le second membre de l'égalité obtenue le coefficient de $C^1_{m+1} r$ est la somme S_m, plus généralement le coefficient de $C^p_{m+1} r^p$ est S_{m-p+1}; cette égalité s'écrit

$$(l + r)^{m+1} = a^{m+1} + C^1_{m+1} r S_m + C^2_{m+1} r^2 S_{m-1} + \ldots + C^p_{m+1} r^p S_{m-p+1} + \ldots + n r^{m+1}.$$

Les égalités qui correspondent à $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., permettent de calculer de proche en proche S_1, S_2, S_3, etc.

Cas particulier. — Appliquons cette méthode à la progression arithmétique formée par la suite des n premiers entiers naturels : 1, 2, 3, ..., n.

1° *Somme des n premiers entiers.* — En partant de l'égalité

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

et raisonnant comme plus haut on trouve que

$$(n + 1)^2 = 1 + 2 S_1 + n.$$

On retrouve ainsi la formule connue

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.}$$

2° *Somme des carrés des n premiers entiers.* — De l'égalité

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

résulte, comme nous l'avons montré, que

$$(n + 1)^3 = 1 + 3 S_2 + 3 S_1 + n.$$

En remplaçant S_1 par la valeur trouvée on obtient

$$3 S_2 = (n + 1)\left[(n + 1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right],$$

et finalement,

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.}$$

3° *Somme des cubes des n premiers entiers.* — En raisonnant de même, l'égalité

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

donne la suivante :

$$(n + 1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

En remplaçant S_1 et S_2 par les valeurs déjà calculées on obtient successivement

$$4S_3 = (n + 1)[(n + 1)^3 - n(2n + 1) - 2n - 1],$$
$$4S_3 = (n + 1)[(n + 1)^3 - (2n + 1)(n + 1)],$$
$$4S_3 = (n + 1)^2 n^2,$$

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

On peut observer que la somme des cubes des n premiers entiers est égale au carré de leur somme.

56. ***Généralisation de la formule du binôme.*** — 1° Dans un anneau commutatif, nous étudions le produit

$$P = (a + b + \ldots + k + l)^n \quad \text{ou} \quad P = Q_1 Q_2 \ldots Q_n,$$

avec $$Q_i = a + b + \ldots + k + l.$$

P est la somme des produits que l'on peut former en prenant pour facteurs un et un seul terme de chacune des sommes Q_i. Chacun de ces produits est de la forme $a^\alpha b^\beta \ldots k^\chi l^\lambda$, si bien que

$$P = \sum A_{\alpha,\beta,\ldots,\chi,\lambda} a^\alpha b^\beta \ldots k^\chi l^\lambda,$$

la somme Σ étant étendue à tous les n-uples $(\alpha, \beta, \ldots, \chi, \lambda)$ d'entiers positifs ou nuls, de somme n.

Un de ces n-uples étant donné, le coefficient correspondant, $A_{\alpha,\beta,\ldots,\chi,\lambda}$, est le nombre de façons d'obtenir α fois l'élément a, ..., λ fois l'élément l en prélevant un et un seul élément dans chacune des n sommes Q_i.

Commençons par prélever les a : il y a C_n^α façons de procéder, chacune d'elles concernant α des sommes Q_i.

Prélevons ensuite les b : il y a $C_{n-\alpha}^\beta$ façons de procéder ...

Prélevons enfin les l : il a $C_{n-\alpha-\beta-\ldots-\chi}^\lambda$ (et d'ailleurs une seule), façon de procéder. Ainsi :

$$A_{\alpha,\beta,\ldots,\chi,\lambda} = C_n^\alpha \times C_{n-\alpha}^\beta \times \ldots \times C_{n-\alpha-\beta-\ldots-\chi}^\lambda,$$

ce qui s'explicite sous la forme :

$$\frac{n!}{(n-\alpha)!\alpha!} \times \frac{(n-\alpha)!}{(n-\alpha-\beta)!\beta!} \times \ldots \times \frac{(n-\alpha-\beta\ldots-\chi)!}{(n-\alpha-\beta-\ldots-\chi-\lambda)!\lambda!}$$

ou

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\chi!\lambda!}.$$

En conclusion :

$$(a + b + \ldots + k + l)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta! \ldots \chi!\lambda!} a^\alpha b^\beta \ldots k^\chi l^\lambda$$

2° En particulier, pour $n = 2$ et $n = 3$ on obtient

$$(a + b + \ldots + k + l)^2 = \sum a^2 + 2 \sum ab$$

$$(a + b + \ldots + k + l)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 \sum abc.$$

EXERCICES

1. — On donne dans un plan n points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. En joignant ces points deux à deux, on obtient les droites dont on suppose que deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles. Ces droites ont en commun les n points donnés et d'autres points dont on demande le nombre.

Résoudre le même problème dans l'espace, les droites étant remplacées par des plans.

2. — Compter les points d'intersection des diagonales d'un polygone plan de n côtés regardées comme des droites indéfinies. Dans l'hypothèse où le polygone est convexe combien de ces points sont intérieurs au polygone?

3. — *a*) On trace dans un plan n droites de directions différentes dont trois quelconques ne concourent pas; en combien de régions décomposent-elles le plan? *b*) En combien de régions l'espace est-il décomposé par n plans dont deux quelconques ne sont pas parallèles et dont quatre quelconques ne passent pas par un même point?

4. — De combien de manières peut-on décomposer un polygone convexe de n côtés en triangles au moyen de diagonales? (En désignant ce nombre par Δ_n on évaluera Δ_{n+1} en considérant les décompositions auxquelles appartiennent divers triangles qui ont pour côté un côté déterminé du polygone, et Δ_n en considérant les décompositions auxquelles appartiennent les diagonales issues d'un sommet déterminé. La comparaison des résultats obtenus donne la formule de récurrence $\Delta_{n+1} = \frac{4n - 6}{n} \Delta_n$).

5. — Trouver dans le développement de $(a + b)^m$ (a, b, $m \in \mathrm{N}$) le terme le plus grand.

6. — Calculer la somme des coefficients du binôme de Newton, leurs sommes de deux en deux, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs produits deux à deux.

7. — On considère les entiers naturels x et y tels que $x + y = p$, p étant donné; calculer $\sum x^2 y^2$.

8. — On considère les entiers naturels x, y, z tels que $x + y + z = p$, p étant donné; calculer $\sum xyz$.

9. — Sur les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, on marque les points A, B, C tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = n$, n étant un entier naturel. Combien y a-t-il de points *intérieurs* au tétraèdre OABC et dont les coordonnées sont des nombres entiers?

10. — Dans un plan rapporté à un repère cartésien Ox, Oy, on trace un quadrillage formé par les parallèles à Ox et à Oy dont les abscisses dont des entiers naturels. Soit A le point de coordonnées p, q. Un mobile part de O et se déplace en suivant les traits du quadrillage, et de manière que son abscisse et son ordonnée ne diminuent pas. De combien de manière peut-il atteindre le point A? Résoudre le même problème dans l'espace à trois dimensions.

11. — *On appelle combinaisons avec répétitions de m éléments p à p tous les ensembles que l'on peut former en prenant p des éléments, chacun pouvant être répété jusqu'à p fois.*

On calcule le nombre Γ_m^p des combinaisons avec répétitions de m éléments p à p en comptant de deux façons différentes le nombre de fois qu'un élément déterminé figure dans le tableau de ces combinaisons $\left(\frac{p}{m}\Gamma_m^p = \Gamma_m^{p-1} + \frac{p-1}{m}\Gamma_m^{p-1}\right)$.

On trouve ainsi

$$\Gamma_m^p = C_{m+p-1}^p.$$

Le nombre des termes du polynôme homogène le plus général de degré p à m indéterminées est Γ_m^p. En conclure la relation

$$\Gamma_{m+1}^p = \Gamma_m^p + \Gamma_m^{p-1} + \ldots + \Gamma_m^1 + 1.$$

Combien existe-t-il de termes dans un polynôme de degré p à m indéterminées.

12. — Combien peut-on former de nombres avec des chiffres différents dans un système de numération à base n?

13. — La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, lorsque tous les cas peuvent être regardés comme également possibles.

Par exemple, soit un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6; la probabilité pour que sorte un numéro donné est $\frac{1}{6}$.

a) Une loterie a 90 numéros; on suppose que 5 numéros sortent à chaque tirage; évaluer la probabilité pour que, parmi ces numéros, il y en ait 2, 3, ou 4 désignés à l'avance?

b) Quelle est la probabilité pour qu'une donnée de 13 cartes, faite avec un jeu de 52 cartes, contienne les quatre rois?

c) On prend au hasard 2 n nombres dans la suite 1, 2, 3, ... 2 N. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait parmi eux n nombres pairs?

d) En empilant n^3 petits cubes, peints en blancs, on forme un grand cube qu'on peint en rouge, qu'on démolit, et qu'on fait reconstruire par un aveugle; quelle est la probabilité pour que le nouveau grand cube ainsi obtenu se présente sous son aspect initial? Applications numériques : $n = 2$ et $n = 3$.

14. — Démontrer les formules

$$C_n^p C_p^k = C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^{n-p+k} C_{n-p+k}^k.$$

a) en distinguant dans chacune des combinaisons de n éléments p à p, soit k, soit $p-k$ éléments;

b) à partir du développement de $[(x+1)-x]^n$.

15. — Démontrer la formule

$$C_{m+1}^{p+1} = C_m^p + C_{m-1}^p + \ldots + C_p^p$$

et en déduire le calcul de

$$\sum_{k=0}^{m} (k+1)(k+2)\ldots(k+p-1).$$

16. — Établir des formules sommatoires pour les sommes suivantes :

$$C_n^1 + 2\,C_n^2 + 3\,C_n^3 + \ldots + n\,C_n^n$$

$$1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

$$-1^k C_n^1 + 2^k C_n^2 - 3^k C_n^3 + \ldots + (-1)^n n^k C_n^n$$

(k pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, ..., n).

CHAPITRE IV

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES VECTEURS

La plupart des êtres mathématiques et des définitions que nous rencontrerons dans ce chapitre sont déjà connus des lecteurs. On peut leur donner diverses présentations. Dans le premier sous-chapitre nous rappellerons les plus importantes, sans chercher à les déduire d'une axiomatique unique. Une telle axiomatique, adaptée aux programmes du type A', sera présentée au tome III.

Ce chapitre s'adresse donc uniquement aux élèves des classes préparatoires de première année. Nous supposons que le lecteur connaît, non seulement les nombres rationnels (n° 36), mais aussi les nombres réels (II, n° 4).

I. RAPPEL DES DÉFINITIONS

57. *Bipoints. Segments orientés.* — 1° **Définitions.** On appelle *bipoint* tout couple ponctuel rangé; dans le bipoint (A, B), A est l'*origine*, B est l'extrémité. On appelle *segment* [AB] l'ensemble ponctuel formé par les points A, B et tous les points de la droite AB situés entre A et B; un segment non nul [AB] se note aussi [BA], sans idée d'ordre pour A et B.

Si l'on distingue les deux bornes d'un segment, on obtient un *segment orienté*, noté $[\overrightarrow{AB}]$, qui correspond biunivoquement au bipoint (A, B) ayant même origine et même extrémité.

2° **Equipollence.** — *a) Première présentation.* — On convient de considérer comme *équipollents* deux bipoints (A, B) et (C, D) lorsque le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, ou, plus généralement, lorsqu'il existe un bipoint (E, F) tel que les quadrilatères ABFE, CDFE soient des parallélogrammes.

Dans l'ensemble des bipoints de l'espace, l'équipollence qui vient d'être définie est une relation d'équivalence.

b) Seconde présentation. — Admettons que l'on sache mesurer la longueur d'un segment [AB]. On convient de considérer comme *équipollents* les segments orientés $[\overrightarrow{AB}]$ et $[\overrightarrow{CD}]$ lorsqu'ils sont parallèles, de même sens, et qu'ils ont même longueur.

Dans l'ensemble des segments orientés de l'espace, l'équipollence qui vient d'être définie est une relation d'équivalence.

Les deux premiers cas d'égalité des triangles étant acquis, on peut démontrer que si $[\overrightarrow{AB}]$ et $[\overrightarrow{CD}]$ sont équipollents, sans avoir le même support, la figure ABDC est un parallélogramme, et inversement. On fait ainsi la jonction entre les deux présentations précédentes de l'équipollence.

58. ***Vecteurs.*** — 1° **Définition.** — Tous les bipoints équipollents à un bipoint donné constituent une classe d'équivalence pour la relation d'équipollence; cette classe d'équivalence est appelée *vecteur*. En résumé,

A toute classe de bipoints équipollents correspond, par définition, un « vecteur » dont chacun des bipoints équipollents est un représentant.

On peut, dans cette définition, remplacer « bipoint » par « segment orienté ». Dans l'un et l'autre cas, on représente par $\overrightarrow{AB}$ le «vecteur » dont le bipoint (A, B) — ou le segment orienté $[\overrightarrow{AB}]$ — est un représentant.

Lorsque les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents, ils représentent le même vecteur, on notera donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. La relation précédente exprime indifféremment l'équipollence des bipoints (A, B) et (C, D) et l'égalité des vecteurs représentés par ces bipoints.

Un vecteur peut se noter $\vec{u}$; la notation $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ signifie alors que le bipoint (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$. La longueur AB est dite *module* (ou *intensité*) du vecteur; le module se note $\|\vec{u}\|$.

Lorsqu'un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ a son origine A et son extrémité B confondues, on dit que ce vecteur est le vecteur nul; on le note $\vec{0}$; $\|\vec{0}\| = 0$; le support d'un représentant quelconque est considéré comme indéterminé.

2° **Terminologie.** — *a*) Lorsqu'on veut insister sur le fait qu'un vecteur peut être représenté par un bipoint d'origine quelconque, on dit que le vecteur est *libre*; l'un quelconque de ses représentants peut être appelé vecteur *lié*.

Dans les figures destinées à illustrer la théorie des vecteurs libres, on aura souvent intérêt à représenter ceux-ci par des vecteurs liés ayant une même origine donnée.

b) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* lorsque leurs représentants de même origine ont leurs supports confondus.

Le vecteur nul forme, avec tout autre vecteur, un système de deux vecteurs colinéaires.

c) Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont dits *coplanaires* si leurs représentants de même origine ont leurs supports dans un même plan.

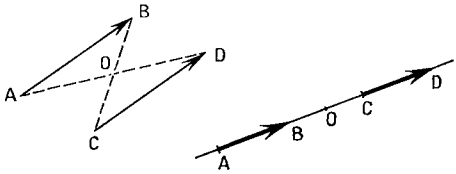


Fig. 7.

Le vecteur nul forme, avec deux autres vecteurs quelconques, un système de trois vecteurs coplanaires.

3° **Condition d'égalité de deux vecteurs.** — Que les points A, B, C, D soient, ou non, alignés, on démontre dans les éléments l'équivalence logique

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

En appelant *extrêmes* les points A et D, *moyens* les points B et C, on peut écrire l'équivalence logique

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ les points extrêmes et les points moyens ont le même milieu (fig. 7).

et comme le milieu d'un segment est indépendant de l'ordre dans lequel on envisage les deux bornes, on peut écrire aussi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \iff \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$$

autrement dit, dans une équipollence, on peut transposer, séparément ou simultanément, les points extrêmes et les points moyens.

4° **Vecteurs opposés.** — On dit que deux vecteurs sont opposés si l'un ayant pour représentant (A, B) l'autre a pour représentant (B, A). On écrit indifféremment (fig. 8)

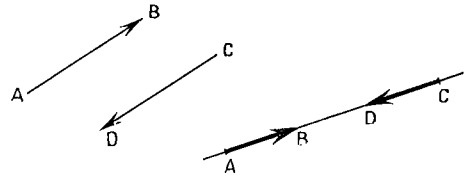


Fig. 8.

$$\overrightarrow{CD} = \text{opp } \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = \text{opp } \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}.$$

II. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES VECTEURS LIBRES

Les vecteurs dont il va s'agir maintenant sont des vecteurs *libres*, et on pourra donc — sauf s'il y a à craindre quelque ambiguïté — supprimer le qualificatif.

59. *Addition.* — 1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donné un couple rangé de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, si on construit un représentant $\overrightarrow{OA}$ de $\vec{a}$, et le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{b}$, le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est équipollent à un vecteur fixe quel que soit O; il détermine un vecteur libre $\vec{c}$ appelé somme du vecteur $\vec{a}$ et du vecteur $\vec{b}$.**

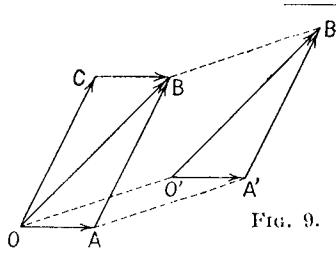


Fig. 9.

On écrit (fig. 9) :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

En effet, effectuons les mêmes constructions à partir d'un autre point O', et soient A' et B' les points ainsi obtenus; nous avons les équivalences logiques :

$$(\vec{a} =)\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} \iff \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'}$$
$$(\vec{b} =)\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Par suite

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'} \iff \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}.$$

L'opération ainsi définie, appelée addition, est une opération interne dans l'ensemble des vecteurs libres.

Dans la suite, nous conviendrons que la notation $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ représente la somme des vecteurs libres dont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des représentants.

2° **Propriétés fondamentales de l'addition.** — a) *L'addition est commutative.* — En effet, soit $\overrightarrow{OC}$ le représentant de $\vec{b}$, d'origine O (fig. 9). L'équivalence

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$$

montre que $\overrightarrow{CB}$ est un représentant de $\vec{a}$; il en résulte que $\overrightarrow{OB}$, qui détermine déjà $\vec{a} + \vec{b}$, détermine aussi $\vec{b} + \vec{a}$.

b) *L'addition est associative.* Construisons les représentants $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (fig. 10). On peut écrire :

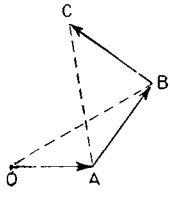


Fig. 10.

$$\overrightarrow{OC} = \begin{cases} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right), \end{cases}$$

ce qui montre que $\overrightarrow{OC}$ est, à la fois, un représentant de

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} \quad \text{et de} \quad \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$$

D'où :

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$$

Il résulte des propriétés *a*) et *b*) que, dans une addition vectorielle, on peut permuter les termes de façon quelconque et remplacer plusieurs d'entre eux par leur somme.

c) *L'addition possède un élément neutre :* le vecteur $\vec{0}$.

d) *A tout vecteur* $\vec{V}$, *on peut associer le vecteur* opp $\vec{V}$ *tel que* $\vec{V} + \text{opp}\ \vec{V} = \vec{0}$.

3° **Autres propriétés de l'addition.** — D'après ce qui précède, l'addition est une loi de *groupe abélien* dans l'ensemble des vecteurs libres. Les propriétés suivantes en résultent (30) :

a) $\text{opp}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{opp}\,\vec{a} + \text{opp}\,\vec{b}$;

b) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{a}+\vec{c} \iff \vec{b} = \vec{c}$

(loi de simplification par suppression d'un même terme aux deux membres d'une égalité vectorielle).

c) Étant donnés deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, il existe un vecteur $\vec{x}$ et un seul, tel que

$$\vec{b}+\vec{x} = \vec{a}$$

$\vec{x}$ est l'excès de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ et est noté $\vec{a}-\vec{b}$, de sorte que

$$\vec{b}+\vec{x} = \vec{a} \iff \vec{x} = \vec{a} + \text{opp}\,\vec{b} \iff \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}.$$

L'opposé du vecteur $\vec{b}$ peut se noter $-\vec{b}$.

Soit $\overrightarrow{OA}$ un représentant de $\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $-b$ (fig. 11); $\overrightarrow{OC}$ est un représentant de $\vec{a}-\vec{b}$; un représentant de $\vec{b}$ étant $\overrightarrow{OB}$, $\vec{a}-\vec{b}$ est aussi représenté par $\overrightarrow{BA}$. On déduit de là que

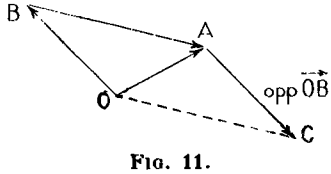


Fig. 11.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

d) On peut définir une somme algébrique de vecteurs libres :

$$\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} - \vec{e} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + (-\vec{d}) + (-\vec{e}).$$

Le principe de suppression des parenthèses s'applique à de telles sommes.

e) Si dans une égalité entre deux sommes algébriques de vecteurs, on fait passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son *signe extérieur* on obtient une nouvelle égalité vectorielle.

60. *Produit d'un vecteur par un nombre réel.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle produit du vecteur libre $\vec{V}$ par le nombre réel $k \neq 0$ le vecteur libre $\vec{V}'$ déterminé de la manière suivante : *a*) il est colinéaire à $\vec{V}$; *b*) si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont des représentants de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, $OM' = OM \times |k|$; *c*) $\vec{V}'$ est de même sens que $\vec{V}$, ou de sens contraire, suivant que k est positif ou négatif.** On écrit

$$\vec{V}' = k.\vec{V} \quad \text{ou} \quad k\vec{V}, \quad \text{ou encore} \quad \vec{V}' = \vec{V}.k \quad \text{ou} \quad \vec{V}k$$

(La question de la commutativité ne se pose pas puisque $\vec{V}$ et k sont pris dans des ensembles différents).

De cette définition, il résulte

α) Le module de $\vec{V}'$ est le produit du module de $\vec{V}$ par la valeur absolue de k.

$$\beta)\quad 1.\vec{V} = \vec{V};\quad (-1)\,\vec{V} = \text{opp}\,\vec{V};\quad k.\vec{0} = \vec{0}.$$

De plus, on pose, par définition

$$0.\vec{V} = \vec{0}.$$

Enfin, on convient que la notation $k\,\overrightarrow{AB}$ représente le produit de k par le vecteur libre dont un représentant est $\overrightarrow{AB}$.

On a défini une opération externe sur l'ensemble des vecteurs libres, les *opérateurs* étant les nombres réels, appelés, à cette occasion, *scalaires*, par opposition au mot *vecteur*.

REMARQUE. — D'après les définitions données plus haut, quel que soit le nombre k

$$\left\| k\vec{a} \right\| = |k| \left\| \vec{a} \right\|$$

Il en résulte que

$$k\vec{a} = \vec{0} \implies k = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \vec{0},$$

les deux conclusions pouvant être réalisées simultanément.

2° Rapport de deux vecteurs colinéaires. — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont deux vecteurs colinéaires et si $\vec{V} \neq \vec{0}$, il existe un nombre réel k, et un seul, tel que $\vec{V}' = k\vec{V}$; k est appelé le rapport du vecteur $\vec{V}'$ au vecteur $\vec{V}$.**

Si $\vec{V}' \neq \vec{0}$, l'étude du 1° donne immédiatement la valeur absolue et le signe de k.

Si $\vec{V}' = \vec{0}$, $\quad k = 0$.

Application. — Si $\vec{V}$ est colinéaire un vecteur unitaire $\vec{u}$ d'un axe $\vec{\Delta}$, le rapport de $\vec{V}$ à $\vec{u}$ n'est autre que la mesure algébrique de $\vec{V}$ sur l'axe $\vec{\Delta}$.

3° Condition pour que deux vecteurs soient colinéaires. — THÉORÈME. — **Pour que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ soient colinéaires, il faut et il suffit qu'il existe au moins un système de nombres λ, λ', non simultanément nuls, et réalisant l'égalité vectorielle :**

$$(1)\qquad \lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V}' = \vec{0}.$$

a) La condition est nécessaire. — Supposons en effet $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ colinéaires.

I. Supposons l'un des vecteurs, $\vec{V}$, non nul; il existe, d'après le 2°, un nombre réel k tel que

$$\vec{V}' = k\vec{V} \quad \text{ou} \quad k\vec{V} + (-1)\vec{V}' = \vec{0}.$$

On obtient bien une égalité de la forme (1) avec $\lambda = k$, $\lambda' = -1\ (\neq 0)$.

II. Si les deux vecteurs sont nuls (et par suite colinéaires), l'égalité (1) est satisfaite pour tout couple de réels (λ, λ').

b) La condition est suffisante. Supposons réalisée l'égalité (1), et, par exemple $\lambda' \neq 0$.

(1) entraîne $$\vec{V}' = -\frac{\lambda}{\lambda'}\vec{V},$$

ce qui exprime que $\vec{V}'$ est colinéaire à $\vec{V}$, soit que $\vec{V} \neq \vec{0}$, soit que $\vec{V} = \vec{0}$.

4° Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. — a) *Distributivité par rapport à l'addition des nombres réels.* — Posons $\vec{S} = a\vec{V} + b\vec{V}$. La règle d'addition des nombres réels est telle que $a + b$ est la mesure algébrique du vecteur $\vec{S}$ quand on prend $\vec{V}$ pour vecteur unitaire. Par suite :

$$a\vec{V} + b\vec{V} = (a + b)\vec{V}.$$

b) *Associativité.* — Posons $\vec{W} = k'(k\vec{V})$. La règle de multiplication des nombres réels est telle que le rapport du vecteur $\vec{W}$ au vecteur $\vec{V}$ est $k'k$, ou son égal kk'. Par suite :

$$k'\left(k\vec{V}\right) = (k'k)\vec{V} \quad \Longrightarrow \quad k'\left(k\vec{V}\right) = k\left(k'\vec{V}\right).$$

Application. On a :

$$\text{opp}\left(k\vec{V}\right) = (-1)\ k\vec{V} = k\left[(-1)\vec{V}\right] = k\left(-\vec{V}\right)$$

ou,
$$\text{opp}\left(k\vec{V}\right) = k\left(\text{opp}\ \vec{V}\right).$$

c) *Distributivité par rapport à l'addition vectorielle.* Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ des représentants des vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$; alors $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

I. — Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles, O, A, B sont alignés et

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad \Longrightarrow \quad k\overline{OB} = k\overline{OA} + k\overline{AB},$$

quel que soit le nombre réel k; il en résulte que

$$k\,\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{AB}.$$

Or les trois vecteurs $k\,\overrightarrow{OB}$, $k\,\overrightarrow{OA}$, $k\,\overrightarrow{AB}$ sont des représentants de $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, $k\vec{a}$ et $k\vec{b}$. Par suite :

$$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

II. — Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas parallèles, construisons le point A′ tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$; la parallèle à AB menée par A′ rencontre OB au point B′ tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} (= |k|).$$

Dans chacun des cas de figure (fig. 12)

$$\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB} \quad \text{ou} \quad k(\vec{a} + \vec{b}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad k\vec{b}.$$

Or $$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}.$$

Par suite $$k.\overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{AB}$$

c'est-à-dire $$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

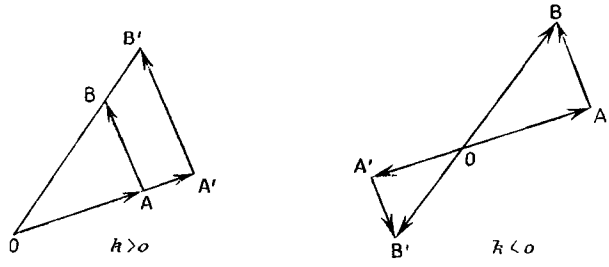


FIG. 12.

La multiplication d'un vecteur par un nombre réel est une opération doublement distributive, et par rapport à l'addition des vecteurs, et par rapport à l'addition des nombres réels.

En d'autres termes encore, « construire le produit d'un vecteur par un nombre réel » est une opération permutable soit avec la construction d'une somme vectorielle, soit avec la recherche d'une somme algébrique.

d) Application. — Il résulte de la double distributivité que :

$$k\vec{V} = k'\vec{V} \implies k = k' \quad \text{si} \quad \vec{V} \neq \vec{0}$$
$$k\vec{V} = k\vec{V}' \implies \vec{V} = \vec{V}' \quad \text{si} \quad k \neq 0.$$

5° **Combinaison linéaire de n vecteurs.** — Étant donnés n vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$, et n scalaires $k_1, k_2, \ldots, k_n$, on sait maintenant définir le vecteur

$$\vec{V} = k_1\vec{V}_1 + k_2\vec{V}_2 + \ldots + k_n\vec{V}_n,$$

qu'on note, plus simplement :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{i=n} k_i\vec{V}_i \qquad \text{ou même} \qquad \sum_{1}^{n} k_i\vec{V}_i.$$

$\vec{V}$ est appelé combinaison linéaire des n vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$, formée avec les *multiplicateurs*, ou *coefficients*, $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

La notation $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, par exemple, représente, par définition, le vecteur

$$\alpha\vec{a} + \text{opp}(\beta\vec{b}) + \gamma\vec{c} \qquad \text{ou} \qquad \alpha\vec{a} + (-\beta)\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

61. *Projections des vecteurs.* — 1° DÉFINITION. — Soit un plan P et une droite D non parallèle à P (fig. 13). On peut, d'une manière et d'une seule, considérer tout vecteur libre $\vec{V}$ comme la somme de deux vecteurs libres $\vec{V}_P$ et $\vec{V}_D$ respectivement parallèles à P et à D :

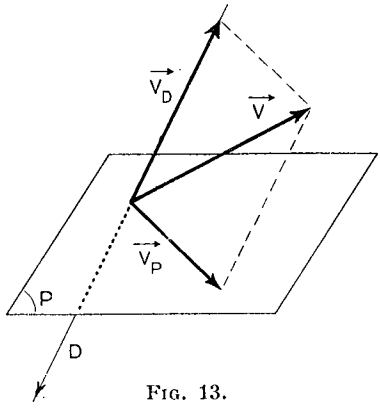


FIG. 13.

a) $\vec{V}_P$ *est la projection de* $\vec{V}$ *sur* P *parallèlement* à D, et est noté :

$$\vec{V}_P = \overrightarrow{\text{proj}}_P\vec{V}$$

b) $\vec{V}_D$ *est la projection de* $\vec{V}$ *sur* D *parallèlement* à P, et est noté

$$\vec{V}_D = \overrightarrow{\text{proj}}_D\vec{V}.$$

c) Si D est transformée en un axe par orientation, *la mesure algébrique de* $\vec{V}_D$ *sur cet axe est la projection* (*scalaire*) *de* $\vec{V}$ *sur* $\vec{D}$ *parallèlement à* P, et on la note :

$$\overline{\text{proj}}_D\vec{V}$$

Si D et P sont perpendiculaires, les projections sont dites *orthogonales*. Notons les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{\text{proj}}_P\vec{V} = \vec{0} \iff \vec{V} \text{ est parallèle à D}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\text{proj}}_D\vec{V} = \vec{0} \\ \overline{\text{proj}}_D\vec{V} = 0\end{array}\right\} \iff \vec{V} \text{ est parallèle à P.}$$

2° **Propriétés des projections.** — Qu'il s'agisse de projections sur P parallèlement à D, ou des projections (vectorielles ou scalaires) sur D parallèlement à P, on démontre que :

$$\text{proj}(\vec{V} + \vec{V'}) = \text{proj}\,\vec{V} + \text{proj}\,\vec{V'} \qquad (1)$$

$$\text{proj}(\lambda\vec{V}) = \lambda\,\text{proj}\,\vec{V}. \qquad (2)$$

La propriété exprimée par la formule (1) s'étend de proche en proche à un nombre quelconque n de vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$, et on écrit, en abrégé

$$\text{proj}\left(\sum_1^n \vec{V}_i\right) = \sum_1^n \text{proj}\,\vec{V}_i. \qquad (3)$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n nombres réels; d'après (3), on peut écrire

$$\text{proj}\left(\sum_1^n \lambda_i \vec{V}_i\right) = \sum_1^n \text{proj}\left(\lambda_i \vec{V}_i\right).$$

Puis, en appliquant la propriété (2) :

$$\text{proj}\left(\sum_1^n \lambda_i \vec{V}_i\right) = \sum_1^n \lambda_i \text{ proj } \vec{V}_i.$$

III. ESPACES VECTORIELS. ESPACES PONCTUELS

62. ***Notion d'espace vectoriel.*** — Désignons par E_3 l'ensemble des vecteurs libres de l'espace, par E_2 l'ensemble des vecteurs libres parallèles à un plan donné, par E_1 l'ensemble des vecteurs libres parallèles à une droite donnée, enfin par E l'un quelconque de ces ensembles. Résumons les définitions et propriétés mises en évidence dans les pages précédentes.

1° *Addition.* — On sait définir l'addition de deux vecteurs; c'est une opération interne dans chacun des ensembles E_3, E_2, E_1, et c'est une loi de groupe commutatif.

2° *Multiplication par un nombre réel.* — On a défini la multiplication d'un vecteur $\vec{V}$ par un nombre réel k; si $\vec{V} \in E_3$ (resp. E_2 ou E_1), $k\vec{V} \in E_3$ (resp. E_2 ou E_1). Cette multiplication est donc une opération externe (25) dans chacun des ensembles E et elle possède les propriétés suivantes :

a) elle est associative (pour la multiplication des nombres) :

$$k'(k\vec{V}) = (k'k)\vec{V};$$

b) elle est distributive par rapport à l'addition des nombres réels;

c) elle est distributive par rapport à l'addition des vecteurs;

d) elle possède un opérateur neutre 1 : $1.\vec{V} = \vec{V}$.

Nous exprimerons ces diverses propriétés en disant que chacun des ensembles E_3, E_2, E_1 est un *espace vectoriel* défini sur le corps R des nombres réels. Cette notion d'espace vectoriel sera généralisée plus loin (chap. X).

Les lois définies sur E_3 confèrent aux vecteurs libres parallèles à un plan Π (resp. à une droite Δ) une structure d'espace vectoriel; on dit que tout espace vectoriel E_2 (resp. E_1) est un *sous-espace vectoriel* de E_3.

De même si la droite Δ est parallèle au plan Π, l'espace vectoriel E_1 des vecteurs libres parallèles à Δ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E_2 des vecteurs libres parallèles à Π.

Tout sous-ensemble de E formé d'un nombre fini p de vecteurs est appelé *système* (de vecteurs) extrait de E; p est l'*ordre* de ce système.

63. *Espace ponctuel.* — Soit E l'un des espaces vectoriels définis plus haut. Donnons-nous un point arbitraire fixe O que nous appellerons *origine*; à chaque vecteur $\vec{V}$ de E associons le point M extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'origine O représentant le vecteur $\vec{V}$. L'ensemble des points M ainsi obtenus est l'*espace ponctuel* $\mathcal{E}$ d'origine O associé à l'espace vectoriel E. A l'espace vectoriel E_3 correspond ainsi l'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$ formé de tous les points de l'espace. A un espace E_2 correspond l'*espace ponctuel plan* $\mathcal{E}_2$ formé de tous les points du plan Π, passant par O, auquel tous les vecteurs de E_2 sont parallèles. Enfin, à l'espace vectoriel E_1 correspond l'*espace ponctuel rectiligne* $\mathcal{E}_1$ formé de tous les points de la droite passant par O à laquelle tous les vecteurs de E_1 sont parallèles.

Inversement, donnons-nous par exemple un espace ponctuel $\mathcal{E}_2$ constitué par tous les points M d'un plan Π; choisissons un point arbitraire O dans Π; on peut associer à $\mathcal{E}_2$ l'espace vectoriel E_2 formé des vecteurs dont des représentants sont tous les vecteurs $\overrightarrow{OM}$. On peut procéder de même pour l'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$ et pour un espace ponctuel $\mathcal{E}_1$.

64. *Génération d'un espace vectoriel* E_1. — 1° Étude préalable d'un espace ponctuel $\mathcal{E}_1$. — Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points d'une droite D. Marquons sur D deux points quelconques O et I, distincts. Soit M un point quelconque de D. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ n'est pas nul; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ lui est colinéaire; il existe donc un nombre réel x et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$ (**60**, 2°).

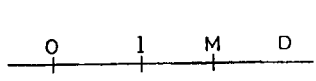


FIG. 14.

Réciproquement, la donnée d'un nombre réel x détermine sur D le point M unique tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$. On dit que x est l'*abscisse* de M dans le *repère* formé des points O et I.

Le repère étant choisi, on a établi une correspondance bijective entre les nombres réels et les points de la droite D.

2° Application à un espace vectoriel E_1. — A tout espace vectoriel E_1 on peut associer comme il a été dit, un espace ponctuel $\mathcal{E}_1$. Choisissons dans E_1 un vecteur non nul $\vec{i}$.

a) Tout vecteur $X\vec{i}$ appartient à E_1 quel que soit le nombre réel X;

b) Réciproquement, l'étude du 1° montre que tout vecteur $\vec{V}$ de E_1 peut s'écrire d'une et d'une seule manière sous la forme $\vec{V} = X.\vec{i}$.

On exprime ces propriétés en disant que l'espace E_1 peut être engendré par le vecteur $\vec{i} \neq \vec{0}$, et que $\vec{i}$ est un *générateur* ou une *base* de E_1; X est la *coordonnée* de $\vec{V}$ dans cette base. Quand la base $\vec{i}$ a été choisie, arbitrairement du reste, dans E_1, la donnée d'un seul nombre réel est nécessaire et suffisante pour déterminer un vecteur de E_1; on exprime ce fait en disant que l'espace E_1 est de *dimension* 1.

On a établi une application bijective de l'ensemble E_1 des vecteurs libres de direction D sur l'ensemble R des nombres réels; cette application est un isomorphisme de E_1 (muni de l'addition) sur R (muni de l'addition), car

$$X\vec{i} + Y\vec{i} = (X + Y)\vec{i}.$$

65. ***Génération d'un espace vectoriel*** E_2. — **1° Étude préalable d'un espace ponctuel** $\mathcal{E}_2$. — Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points d'un plan Π. Choisissons dans Π trois points quelconques non alignés O, I, et J soit M un point quelconque de Π. La parallèle à OJ menée par M rencontre la droite OI en P (fig. 15). Par définition de la somme vectorielle :

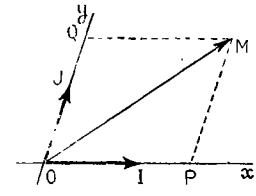


FIG. 15.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}. \qquad (1)$$

$\overrightarrow{OP}$ est parallèle à $\vec{OI} \neq \vec{0}$; il existe donc un nombre réel x et un seul, tel que

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{OI}.$$

$\overrightarrow{PM}$ est parallèle à $\vec{OJ} \neq \vec{0}$; il existe donc un nombre réel y et un seul tel que

$$\overrightarrow{PM} = y\overrightarrow{OJ}.$$

L'égalité (1) s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{OI} + y\overrightarrow{OJ}. \qquad (2)$$

Ainsi, à tout point M de Π on a associé un couple rangé (x, y) de nombres réels tel qu'on puisse écrire (2); ce couple est unique car il n'y a qu'une seule façon de considérer $\overrightarrow{OM}$ comme somme d'un vecteur porté par OI et d'un vecteur porté par OJ.

Réciproquement, la donnée du couple rangé (x, y) détermine un et un seul point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{OI} + y\overrightarrow{OJ};$$

x et y sont les *coordonnées* (abscisse et ordonnée) du point M dans le *repère cartésien* formé par les axes $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$ déterminés, en direction et en sens, par les vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$. x et y sont les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sur les axes Ox et Oy quand on prend respectivement pour unités de longueur les modules de $\vec{OI}$ et de $\vec{OJ}$.

2° Application à un espace vectoriel E_2. — A tout espace vectoriel E_2 on peut associer un espace ponctuel $\mathcal{E}_2$. Choisissons dans E_2 deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non nuls et non parallèles :

a) toute combinaison linéaire $X\vec{i} + Y\vec{j}$ de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est un vecteur de E_2;

b) réciproquement, l'étude faite au 1° montre que tout vecteur $\vec{V}$ de E_2 est, d'une et d'une seule manière, combinaison linéaire de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

On exprime ces propriétés en disant que l'espace vectoriel E_2 est *engendré* par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et que le système $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une *base* de E_2; X et Y sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans cette base. *On peut prendre pour base un système quelconque de deux vecteurs non colinéaires*; quand cette base est choisie, un et un seul couple rangé de nombres réels (X, Y) est nécessaire et suffisant pour déterminer un vecteur $\vec{V}$ de E_2; on exprime ce fait en disant que l'espace vectoriel E_2 est de *dimension* 2.

On a établi une correspondance bijective entre l'ensemble des vecteurs libres d'un plan et l'ensemble des couples rangés de nombres réels (ou encore l'ensemble produit R × R).

L'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ entraîne les conséquences suivantes :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} \iff \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$$

En particulier $X\vec{i} + Y\vec{j} = \vec{0} \iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$

3° **Condition analytique pour que deux vecteurs de E_2 soient colinéaires.** — Un espace vectoriel E_2 étant rapporté à une base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\vec{V}$ (X, Y) et $\vec{V}'$ (X', Y') de E_2 soient colinéaires.

a) Appliquons l'étude du n° **60**, 2°, en supposant $\vec{V}$ non nul, c'est-à-dire X et Y non simultanément nuls.

L'étude de la multiplication d'un vecteur libre par un scalaire permet d'écrire l'équivalence logique :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{V} \text{ et } \vec{V}' \text{ sont colinéaires} \\ \vec{V} \neq \vec{0} \end{array} \right\} \iff (2) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Il existe un nombre réel} \\ k \text{ tel que} \\ \vec{V}' = k\vec{V}. \end{array} \right\}$$

La propriété (2) équivaut logiquement à (3) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Il existe un nombre réel} \\ k \text{ tel que} \\ X' = kX \\ Y' = kY \end{array} \right\}$

ce qui s'exprime en disant que X′ et Y′ sont proportionnels à X et Y (1).

Nous allons encore transformer la condition (3) de façon à lui donner une forme ne faisant pas intervenir d'inconnue auxiliaire k.

Supposons que ni X, ni Y ne soient nuls : k est la valeur commune des rapports $\frac{X'}{X}$ et $\frac{Y'}{Y}$, et alors (3) équivaut logiquement à (4) $\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$.

Si $X \neq 0$ et $Y = 0$, (3) équivaut logiquement à $Y' = 0$;

si $X = 0$ et $Y \neq 0$, (3) équivaut logiquement à $X' = 0$.

b) Traitons le cas général en appliquant l'étude du n° **60**, 3°. La condition

(4) $\qquad \lambda \vec{V} + \lambda' \vec{V}' = \vec{0}$, λ et λ' non simultanément nuls

s'exprime par l'existence de deux nombres réels λ et λ', non simultanément nuls, tels que

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda X + \lambda' X' = 0 \\ \lambda Y + \lambda' Y' = 0. \end{cases}$$

I. Si X et X′ ne sont pas simultanément nuls, la première relation (5) donne pour λ et λ' des valeurs proportionnelles à $-X'$ et X :

$$(6) \qquad \lambda = -\rho X', \qquad \lambda' = \rho X,$$

valeurs qui ne vérifieront la seconde relation (5) que si

$$\rho (XY' - YX') = 0.$$

Si $XY' - YX' \neq 0$, $\rho = 0$, λ et λ' sont simultanément nuls, ce que nous écartons.

Si $XY' - YX' = 0$, les valeurs fournies par (6) vérifient (5); et par suite (4), quel que soit ρ non nul.

II. Si X et X′ sont simultanément nuls, d'une part $XY' - YX'$ est nul, d'autre part $\vec{V} = Y\vec{j}$, $\vec{V}' = Y'\vec{j}$ montre que $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires.

En résumé :

La condition (7) $\qquad XY' - YX' = 0$

est nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ soient colinéaires.

4° Détermination d'une direction en Géométrie analytique plane.

DÉFINITION. — **On appelle paramètres directeurs d'une direction de droite les coordonnées d'un vecteur non nul ayant cette direction.**

Une direction donnée admet une infinité de systèmes de paramètres directeurs; si (p, q) est l'un d'entre eux, les autres sont (kp, kq), k désignant un réel non nul quelconque.

Les couples (p, q) et (p', q') déterminent la même direction si, et seulement si, $pq' - p'q = 0$.

---

(1) Les nombres de chacun des systèmes $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$ n'étant pas tous nuls, on dit que ces nombres sont proportionnels s'il existe un nombre k non nul tel que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$, ...

La direction Ox est déterminée par tout couple $(p, 0)$ avec $p \neq 0$, et en particulier par $(1, 0)$; la direction Oy est déterminée par tout couple $(0, q)$, avec $q \neq 0$, et en particulier par $(0, 1)$.

Si la droite $O\lambda$ est distincte de Oy et a pour paramètres directeurs (p, q), on a $p \neq 0$ et un autre système de paramètres directeurs est $\left(1, \frac{q}{p}\right)$; $\frac{q}{p}$ est appelé le *coefficient directeur* de $O\lambda$.

DÉFINITION. — **Étant donnée une direction δ, distincte de Oy, on appelle coefficient directeur de δ le second paramètre directeur quand le premier est égal à 1.**

La direction qui a m pour coefficient directeur admet pour paramètres directeurs $(1, m)$ et tous les couples (k, km), k étant réel, quelconque, différent de 0.

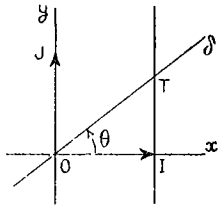


FIG. 16.

Si les axes sont rectangulaires, et si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même longueur, le coefficient directeur m de la direction $O\delta$ prend le nom de *pente* : c'est la tangente de l'angle de droites $(Ox, O\delta)$; la figure 16 montre que

$$m = \operatorname{tg}\theta = \overline{IT}.$$

5° **Introduction des matrices.** — p vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p$ d'un espace vectoriel E_2 sont bien déterminés par leurs coordonnées (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), $\ldots$ (X_p, Y_p) dans une base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Il est commode de disposer ces nombres de la manière suivante

	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\ldots$	$\vec{V}_p$
$\vec{i}$	X_1	X_2	$\ldots$	X_p
$\vec{j}$	Y_1	Y_2	$\ldots$	Y_p

Le tableau

$$T = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_p \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_p \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \end{bmatrix}$$

est appelé une *matrice*. Les nombres qui y figurent en sont les *éléments*; ils sont répartis en *lignes* et en *colonnes*; le mot *rangée* désigne indifféremment une ligne ou une colonne. Le nombre de lignes (ici deux) est la *hauteur*, le nombre de colonnes (ici p) est la *largeur*, de la matrice T; hauteur et largeur sont les *dimensions* de T; on dit que T est une matrice $2 \times p$. Les coordonnées du vecteur $\vec{V}_i$ sont les éléments de la colonne n° i; c'est pourquoi on dit que $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p$ sont les *vecteurs-colonnes* de la matrice T.

On pourrait tout aussi bien disposer les nombres (X_i, Y_i) dans la matrice $p \times 2$ suivante :

$$T_1 = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_p & Y_p \end{bmatrix}$$

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p$ sont alors les *vecteurs-lignes* de T_1. T_1 est dite la *transposée* de T et notée $T_1 = {}^tT$ ou $T_1 = \tilde{T}$ (1). Il est évident que :

$$T_1 = \tilde{T} \iff T = \tilde{T}_1.$$

D'où il résulte que ${}^t({}^tT) = T$.

On étend sans difficulté les définitions précédentes à une matrice telle que

$$\mathfrak{Ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_p \end{bmatrix}$$

Naturellement, on pourra déterminer p vecteurs $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p$ d'un espace vectoriel E_1 rapporté à une base $\vec{i}$ par l'une ou l'autre des matrices :

$$T = [X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_p] \quad \text{ou} \quad T_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{bmatrix}$$

T est une matrice *unilligne*, ou *matrice-ligne*; T_1 est une matrice *unicolonne*, ou *matrice-colonne*.

Enfin, une matrice qui n'a qu'un seul élément s'appelle *matrice-élément* :

$$T = [a].$$

Nous conviendrons de dire que deux matrices de mêmes dimensions sont *égales* lorsque leurs éléments semblablement placés sont égaux. Exemple :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = \alpha & b = \beta \\ a' = \alpha' & b' = \beta' \\ a'' = \alpha'' & b'' = \beta''. \end{cases}$$

6° **Changement de base dans un espace** E_2. — L'espace vectoriel E_2 est rapporté à une première base $\mathfrak{B}\{\vec{i}, \vec{j}\}$, dite *ancienne*, dans laquelle un

(1) Le signe $\sim$ s'appelle une tilde. $\tilde{A}$ peut donc s'énoncer A tildé.

vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées (X, Y). On rapporte E_2 à une *nouvelle* base $\mathfrak{B}'\left\{\vec{i}', \vec{j}'\right\}$, dans laquelle $\vec{V}$ a pour coordonnées (X', Y'). On demande de calculer X et Y en fonction de X' et Y' (1).

Pour résoudre ce problème, on écrit :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} = X'\vec{i}' + Y'\vec{j}', \qquad (1)$$

et on exprime les vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ dans l'ancienne base :

$$\left\{\begin{array}{l|l} \vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j} & X' \\ \vec{j}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} & Y' \end{array}\right.$$

L'égalité (1) s'écrit alors :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} = (aX' + a'Y')\vec{i} + (bX' + b'Y')\vec{j}$$

ce qui entraîne, puisque $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ est une base :

$$\left\{\begin{array}{l} X = aX' + a'Y' \\ Y = bX' + b'Y'. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Pratiquement, il est commode de déterminer la nouvelle base $\mathfrak{B}'$ par rapport à l'ancienne $\mathfrak{B}$ par la matrice ω

$$\begin{array}{c|cc} & \vec{i}' & \vec{j}' \\ \hline \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \end{array} = \omega$$

ω est appelée la *matrice de passage* de la base $\mathfrak{B}$ à la base $\mathfrak{B}'$; elle est définie de la manière suivante :

DÉFINITION. — **On appelle matrice de passage de la base $\mathfrak{B}$ à la base $\mathfrak{B}'$ la matrice dont les vecteurs-colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne.**

Les égalités (2) peuvent s'écrire, compte tenu de la définition de l'égalité de deux matrices

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aX' + a'Y' \\ bX' + b'Y' \end{bmatrix}$$

La matrice du second membre peut se déduire des deux matrices

$$\omega = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$$

(1) Il paraîtrait logique de calculer, au contraire, les *nouvelles* coordonnées en fonction des *anciennes*. En pratique cependant, c'est le calcul inverse qui est utile, comme nous le verrons plus loin.

en faisant la somme des produits des éléments de la première ligne, puis de la seconde ligne, de ω par les éléments correspondants de la colonne unique de la seconde matrice. On dira que la matrice ainsi obtenue est le *produit* de la matrice ω par la matrice μ dans l'ordre indiqué :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$$

formule qui remplace les formules (2).

66. *Génération de l'espace E_3.* — 1° Étude préalable de l'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$. — Dans l'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$ choisissons arbitrairement quatre points O, I, J, K distincts et non situés dans un même plan, et soit M un point quelconque (fig. 17). La parallèle menée par M à OK rencontre le plan OIJ en un point m, et, par définition de la somme vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}. \qquad (1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ forment une base de l'espace ponctuel attaché au plan OIJ, et auquel appartient m. Il existe donc deux nombres réels x, y tels que :

$$\overrightarrow{Om} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}. \qquad (2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{OK}$ qui n'est pas nul; il existe donc un nombre réel z tel que :

$$\overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{OK}. \qquad (3)$$

De (1), (2) et (3) il résulte que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}. \qquad (4)$$

Ainsi, à tout point M de $\mathcal{E}_3$ on a pu associer un triplet rangé de nombres réels (x, y, z) tel qu'on puisse écrire (4).

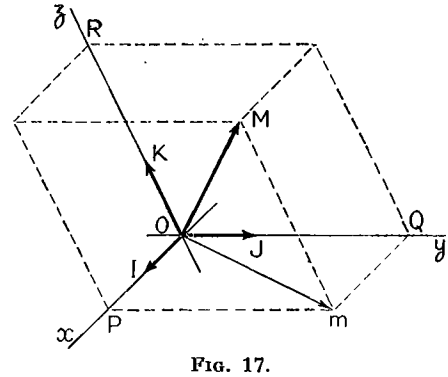


FIG. 17.

Ce triplet est unique car il n'y a qu'une seule façon de considérer $\overrightarrow{OM}$ comme somme de vecteurs portés respectivement par OI, OJ, OK.

Réciproquement, la donnée d'un triplet rangé (x, y, z) détermine un et un seul point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$$

x, y, z sont les *coordonnées* (abscisse, ordonnée et cote) du point M dans le *repère cartésien* formé par les axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ déterminés, en direction et en sens, par les vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$. Si on construit le parallélipipède (éventuellement aplati) dont une diagonale est OM et dont trois arêtes OP, OQ, OR

sont portées par Ox, Oy, Oz (fig. 17), x, y, z sont les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ sur les axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ en supposant que les unités de longueurs choisies sur ces axes soient, respectivement, les modules des vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$.

2° **Application à l'espace vectoriel** E_3. — L'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$ qui vient d'être étudié peut être considéré comme associé à l'espace vectoriel E_3. De là résultent les conséquences suivantes. Si on choisit dans E_3 trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non parallèles à un même plan (ce qui exclut qu'aucun d'entre eux soit nul) :

a) toute combinaison linéaire $X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ de ces trois vecteurs est un vecteurs de E_3;

b) réciproquement, tout vecteur $\vec{V}$ de E_3 est, d'une manière et d'une seule, combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

On exprime ces propriétés en disant que l'espace vectoriel E_3 est *engendré* par les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et que le système $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une *base* de E_3; X, Y, Z sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans cette base. *On peut prendre pour base tout système de vecteurs non coplanaires*; quand cette base est choisie, un et un seul triplet rangé (X, Y, Z) de nombres réels est nécessaire et suffisant pour déterminer un vecteur libre de E_3; on exprime ce fait en disant que l'espace E_3 est de *dimension* 3.

On a établi une correspondance bijective entre l'ensemble des vecteurs libres de l'espace et l'ensemble des triplets rangés de nombres réels (ou encore l'ensemble produit $R \times R \times R$).

Notons que l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ entraîne les conséquences suivantes :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \iff X = X',\ Y = Y',\ Z = Z'$$

en particulier $\quad X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \vec{0} \iff X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0.$

Si p vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p$ sont déterminés par leurs coordonnées (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) ... (X_p, Y_p, Z_p) dans une base, on leur associera soit la matrice $3 \times p$:

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V}_1 \quad \vec{V}_2 \quad \ldots \quad \vec{V}_p \\ \hline \vec{i} & \\ \vec{j} & \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_p \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_p \end{bmatrix} = T \\ \vec{k} & \end{array}$$

dont ils sont les *vecteurs-colonnes*

soit la matrice $p \times 3$,

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_p & Y_p & Z_p \end{bmatrix}$$ dont ils sont les *vecteurs-lignes*.

REMARQUE. — Soient n vecteurs $\vec{V}_p (p = 1,2, \ldots, n)$, qui, dans la base $\mathcal{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, ont pour coordonnées (X_p, Y_p, Z_p); et soit

$$\vec{U} = \lambda_1 \vec{V}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{V}_n = \sum_1^n \lambda_p \vec{V}_p \qquad (1)$$

une combinaison linéaire de ces vecteurs. En écrivant :

$$\vec{V}_p = X_p \vec{i} + Y_p \vec{j} + Z_p \vec{k} \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

(1) s'écrit :

$$\vec{U} = \sum_1^n \lambda_p \left(X_p \vec{i} + Y_p \vec{j} + Z_p \vec{k}\right)$$

ou

$$\vec{U} = \left(\sum_1^n \lambda_p X_p\right) \vec{i} + \left(\sum_1^n \lambda_p Y_p\right) \vec{j} + \left(\sum_1^n \lambda_p Z_p\right) \vec{k}$$

ce qui prouve que les composantes de $\vec{U}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$X = \sum_1^n \lambda_p X_p, \quad Y = \sum_1^n \lambda_p Y_p, \quad Z = \sum_1^n \lambda_p Z_p. \qquad (2)$$

Pratiquement, on doit pouvoir écrire les égalités (2) directement à partir de l'égalité (1). Cette remarque est évidemment applicable aux espaces vectoriels E_1 et E_2, mais alors les égalités (2) se réduisent à la première, ou aux deux premières, respectivement.

3° **Condition analytique pour que deux vecteurs de E_3 soient colinéaires.** — L'espace vectoriel E_3 étant rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\vec{V}$ (X, Y, Z) et $\vec{V}'$ (X', Y', Z') de E_3 soient colinéaires.

Nous utiliserons l'étude du n° 60, 2° en supposant $\vec{V}$ non nul, c'est-à-dire que X, Y, Z ne sont pas simultanément nuls.

On raisonne comme plus haut (65, 3°) en écrivant

(1) $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires, $\vec{V} \neq \vec{0}$ $\iff$ (2) Il existe un nombre réel k tel que $\vec{V}' = k\vec{V}$.

Cette dernière proposition équivaut logiquement à

(3) $\qquad X' = kX \qquad Y' = kY \qquad Z' = kZ.$

Ces relations expriment la proportionnalité des nombres (X', Y', Z') d'une part, (X, Y, Z) d'autre part.

Si $XYZ \neq 0$, (3) équivaut logiquement à

(4) $$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z}.$$

Si $XY \neq 0$ et $Z = 0$, (3) équivaut logiquement à

(4') $$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} \quad \text{et} \quad Z' = 0.$$

Si $X \neq 0$ et $Y = 0$, $Z = 0$, (3) équivaut logiquement à

(4'') $\qquad Y' = 0, \qquad Z' = 0.$

4° Détermination d'une direction en Géométrie analytique dans l'espace. DÉFINITION. — **On appelle paramètres directeurs d'une direction de droite les coordonnées d'un vecteur non nul ayant cette direction.**

Une direction donnée admet une infinité de systèmes de paramètres directeurs; si (p, q, r) est l'un quelconque d'entre eux, les autres sont (kp, kq, kr), k désignant un réel non nul quelconque.

Une direction parallèle au plan xOy a des paramètres directeurs de la forme $(p, q, 0)$; une direction parallèle à Ox a des paramètres directeurs de la forme $(p, 0, 0)$ avec $p \neq 0$, et, en particulier $(1, 0, 0)$. On caractérisera de même les directions parallèles aux plans yOz et xOz, aux axes Oy et Oz.

5° Condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs de E_3 soient coplanaires. — THÉORÈME. — **Pour que trois vecteurs $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$ soient coplanaires, il faut et il suffit qu'il existe au moins un système de trois nombres réels $\lambda, \lambda', \lambda''$, non simultanément nuls, réalisant l'égalité vectorielle**

$$\lambda \vec{V} + \lambda' \vec{V}' + \lambda'' \vec{V}'' = \vec{0}. \qquad (1)$$

a) La condition est nécessaire. — Supposons, en effet, $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$ coplanaires.

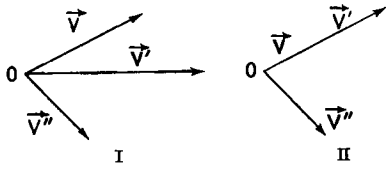


Fig. 18.

I. Si deux quelconques des trois vecteurs ne sont pas colinéaires, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ par exemple appartiennent à un même espace vectoriel E_2 dont ils forment une base (fig. 18, I). $\vec{V}''$ est un vecteur de E_2 et il existe deux nombres réels k et k' tels que

$$\vec{V}'' = k\vec{V} + k'\vec{V}'$$

ou $$k\vec{V} + k'\vec{V'} + (-1)\vec{V''} = \vec{0};$$

on obtient bien une égalité de la forme (1)

avec $$\lambda = k, \qquad \lambda' = k', \qquad \lambda'' = -1 \ (\neq 0).$$

II. Si deux des trois vecteurs, $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ par exemple, sont colinéaires (fig. 18, II), il existe, d'après le n° 60, 3°, deux réels λ et λ', non simultanément nuls tels que

$$\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V'} = \vec{0};$$

c'est une relation de la forme (1), avec $\lambda'' = 0$.

b) *La condition est suffisante.* — Supposons, en effet, que la condition (1) soit réalisée, avec, par exemple, $\lambda'' \neq 0$.

(1) entraîne $$\vec{V''} = -\frac{\lambda}{\lambda''}\vec{V} - \frac{\lambda'}{\lambda''}\vec{V'}.$$

$\vec{V''}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $\vec{V}$ et $\vec{V'}$; que $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ soient, ou non, colinéaires, $\vec{V''}$ forme avec $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ un système de trois vecteurs coplanaires.

6° **Changement de base.** — Le problème du changement de base se pose comme dans l'espace E_2. L'espace vectoriel E_3 est rapporté à une première base $\mathcal{B}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (dite *ancienne*) dans laquelle un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées (X, Y, Z), puis à une *nouvelle* base $\mathcal{B}'\{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ dans laquelle $\vec{V}$ a pour coordonnées (X', Y', Z'). On demande de calculer X, Y, Z en fonction de X', Y', Z'.

$\mathcal{B}'$ est déterminée par ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, rassemblées dans la matrice 3×3 :

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{i'} & \vec{j'} & \vec{k'} \\ \hline \vec{i} & a & a' & a'' \\ \vec{j} & b & b' & b'' \\ \vec{k} & c & c' & c'' \end{array} = \omega$$

encore appelée *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$: ses vecteurs-colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

On écrit :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = X'\vec{i'} + Y'\vec{j'} + Z'\vec{k'}. \qquad (1)$$

Moyennant les relations :

$$\left\{\begin{array}{l|l} \vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} & X' \\ \vec{j'} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} & Y' \\ \vec{k'} = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k} & Z' \end{array}\right.$$

cette relation (1) s'écrit aussi :

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \begin{cases} (aX' + a'Y' + a''Z')\ \vec{i} \\ + (bX' + b'Y' + b''Z')\ \vec{j} \\ + (cX' + c'Y' + c''Z')\ \vec{k}. \end{cases}$$

On en déduit, puisque $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base :

$$\begin{cases} X = aX' + a'Y' + a''Z' \\ Y = bX' + b'Y' + b''Z' \\ Z = cX' + c'Y' + c''Z' \end{cases} \qquad (2)$$

Ces formules résolvent le problème posé. Si on convient, comme plus haut, d'appeler produit des deux matrices

$$\omega = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \text{ prises dans cet ordre,}$$

la matrice-colonne dont les éléments sont les sommes des produits des éléments de la première, puis de la seconde, puis de la troisième ligne de ω par les éléments correspondants de μ,

$$\omega \times \mu = \begin{bmatrix} aX' + a'X' + a''Z' \\ bX' + b'Y' + b''Z' \\ cX' + c'X' + c''Z' \end{bmatrix};$$

on voit qu'on peut remplacer les égalltés (2) par une seule égallté matricielle

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}.$$

Si l'on fait le changement de base pour plusieurs vecteurs $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p$, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & . & X_p \\ Y_1 & Y_2 & . & Y_p \\ Z_2 & Z_2 & . & Z_p \end{bmatrix} = \omega \times \begin{bmatrix} X'_1 & X'_2 & . & X'_p \\ Y'_1 & Y'_2 & . & Y'_p \\ Z'_1 & Z'_2 & . & Z'_p \end{bmatrix}$$

en appelant encore produit des deux matrices du second membre la matrice $3 \times p$ dont l'élément situé à la ligne i et à la colonne j est la somme des produits de même rang de la ligne i de la matrice ω, et de la colonne j de la seconde matrice. Cette règle sera généralisée ultérieurement.

IV. BARYCENTRE

67. *Étude d'un système de points pondérés.* — 1° DÉFINITION. — **On appelle point pondéré (1) l'ensemble constitué par un point A et par un nombre réel, positif ou négatif, appelé son poids. Cet ensemble est noté $A(\alpha)$.**

(1) On dit aussi point *massif*; alors le coefficient α est appelé *masse*.

2° **Étude de la somme** $\Sigma\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$. — Soient $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$ ..., $A_n(\alpha_n)$ un système de n points pondérés; le nombre $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ est son poids total. A un point quelconque M de l'espace, associons le vecteur

$$\vec{V}(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$$

ou, en notation abrégée : $\vec{V}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$. Nous nous proposons d'établir une *formule de réduction* pour ce vecteur.

En tenant compte des égalités

$$\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{MM'},$$

on obtient

$$\vec{V}(M) - \vec{V}(M') = (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{MM'}. \qquad (1)$$

En d'autres termes, ayant déterminé $\vec{V}(M)$, $\vec{V}(M')$ s'obtient par l'égalité

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) - (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{MM'}. \qquad (2)$$

a) Le poids du système est nul. — Lorsque $\Sigma\alpha_i = 0$,

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M)$$

et on peut énoncer :

THÉORÈME. — **Si le poids d'un système de points pondérés**

$$A_1(\alpha_1),\ A_2(\alpha_2),\ \ldots,\ A_n(\alpha_n)$$

est nul, le vecteur

$$\vec{V}(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$$

reste équipollent à un vecteur fixe lorsque le point M varie arbitrairement.

b) Le poids du système n'est pas nul. — Si la somme $\Sigma\alpha_i$ n'est pas nulle, montrons qu'il existe un point G et un seul tel que $\vec{V}(G) = \vec{0}$.

Analyse. — S'il existe un point G tel que $\vec{V}(G) = \vec{0}$, l'égalité (2), où l'on remplace M' par G donne

$$\vec{0} = \vec{V}(M) - (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{MG}$$

ou

$$\vec{V}(M) = (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{MG}. \qquad (3)$$

Sous réserve d'existence, l'égalité (3) montre l'unicité du point G.

Synthèse. — Choisissons un point fixe O, arbitraire, et construisons le point G défini par l'égalité

$$\vec{V}(O) = (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{OG} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{V}(O)}{\Sigma\alpha_i}.$$

La formule (2) donne alors

$$\vec{V}(G) = \vec{V}(O) - (\Sigma\alpha_i)\overrightarrow{OG}, \qquad \text{ou} \qquad \vec{V}(G) = \vec{0}.$$

Ce point G répond à la question posée.

La formule (3) donne alors une expression simple du vecteur $\vec{V}(M)$: ce vecteur est le produit de $\overrightarrow{MG}$ par le poids du système .

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si le poids d'un système de points pondérés**

$$A_1(\alpha_1),\ A_2(\alpha_2),\ \ldots,\ A_n(\alpha_n)$$

n'est pas nul, il existe un point G et un seul, satisfaisant aux égalités vectorielles

$$\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_1^n \alpha_i\right)\overrightarrow{MG} \quad \forall\, M.$$

Ce point G est appelé barycentre des *n* points pondérés.

c) Système *astatique*. — *On dit qu'un système de points pondérés*

$$A_i(\alpha_i)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est astatique si le vecteur $\vec{V}(M) = \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ *est nul, quel que soit* M.

D'après la formule (2) le système est astatique si, et seulement si

I) $\Sigma\alpha_i = 0$.

II) $\vec{V}(O) = \vec{0}$, O étant un point arbitrairement choisi.

Choisissons pour point O l'un des points du système, par exemple A_i, en supposant $\alpha_i \neq 0$.

$$\vec{V}(A_i) = \alpha_1\overrightarrow{A_iA_1} + \ldots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{A_iA_{i-1}} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{A_iA_n} = \vec{0}.$$

Puisque

$$\alpha_i \neq 0, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n = -\alpha_i \neq 0.$$

L'égalité précédente exprime que le point A_i est le barycentre des points pondérés $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_{i-1}(\alpha_{i-1})$, $A_{i+1}(\alpha_{i+1})$, ..., $A_n(\alpha_n)$. On peut donc énoncer :

Pour qu'un système de n points pondérés soit astatique, il faut et il suffit que son poids soit nul, et que l'un de ces points (d'ailleurs quelconque, mais de poids non nul) soit le barycentre des n — 1 autres.

68. ***Propriétés du barycentre.*** — Soit G le barycentre d'un système de *n* points pondérés $A_i(\alpha_i)\ (i = 1, 2, \ldots n)$, de poids total

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0.$$

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\alpha\overrightarrow{MG} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}, \quad \forall M. \qquad (2)$$

1° Si $\alpha_n = 0$ par exemple, l'égalité (1) exprime que G est encore le barycentre des points pondérés $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_{n-1}(\alpha_{n-1})$. Par suite : *le barycentre de points pondérés est indépendant des points dont le poids est nul*; on peut donc négliger ces points.

2° **Homogénéité.** — Soit λ un nombre réel non nul. En multipliant par λ les deux membres de (1) on obtient :

$$(\lambda\alpha_1)\overrightarrow{GA_1} + (\lambda\alpha_2)\overrightarrow{GA_2} + \ldots + (\lambda\alpha_n)\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

G est donc encore le barycentre des n points pondérés $A_i(\lambda\alpha_i)$ et on peut énoncer : *le barycentre de n points pondérés ne change pas si on multiplie le poids de ces points par un même nombre réel non nul.*

Si les poids des n points ont la même valeur $\alpha \neq 0$, on peut donc supposer, dans la recherche du barycentre, que $\alpha = 1$. On dit alors que G est le *centre des moyennes distances* des points A_i (dont il est alors inutile de préciser le poids).

3° **Associativité.** — Considérons p des points A_i, par exemple les p premiers, dont le poids total est supposé non nul ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p \neq 0$), et écrivons l'égalité (1) de la manière suivante :

$$\left(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{GA_p}\right) + \left(\alpha_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right) = \vec{0} \quad (3)$$

Soit g le barycentre des p points pondérés $A_1(\alpha_1)$, ..., $A_p(\alpha_p)$; appliquons l'égalité (2) à ces p points, en prenant pour point M le point G :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)\overrightarrow{Gg} = \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_p\overrightarrow{GA_p}$$

L'égalité (3) s'écrit alors :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)\overrightarrow{Gg} + \alpha_{p+1}\overrightarrow{GA_{p+1}} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Sous cette forme, elle exprime que G est encore le barycentre des points pondérés

$$g(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p), \quad A_{p+1}(\alpha_{p+1}), \quad \ldots, \quad A_n(\alpha_n).$$

On peut énoncer :

On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés en remplaçant un certain nombre d'entre eux, de poids total $\beta \neq 0$, par leur barycentre affecté du poids β.

4° **Projectivité du barycentre.** — Soient a_1, a_2, ..., a_n, g les projections des points A_1, A_2, ..., A_n, G, sur un plan P parallèlement à une droite D, ou sur une droite D parallèlement à un plan P (D n'étant pas paral-

lèle à P). D'après les propriétés des projections des vecteurs (61), on déduit de l'égalité (1)

$$\alpha_1 \overrightarrow{ga_1} + \alpha_2 \overrightarrow{ga_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{ga_n} = \vec{0}.$$

Cette égalité montre que g est le barycentre des points pondérés $a_1(\alpha_1)$, $a_2(\alpha_2)$, ..., $a_n(\alpha_n)$. D'où le résultat :

Le barycentre des projections d'un système de points pondérés est la projection du barycentre de ces points, pourvu que le poids de chaque point soit affecté à sa projection.

69. *Construction du barycentre.* — Proposons-nous de construire le barycentre G de n points pondérés

$$A_i(\alpha_i \neq 0)\,(i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0).$$

1° **Cas de deux points.** — Le barycentre G est défini par l'égalité $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$ qui exprime (65, 4°) que G appartient à la droite A_1A_2. L'égalité précédente est donc équivalente à la suivante

$$\alpha_1 \overline{GA_1} + \alpha_2 \overline{GA_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_2}} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

G est donc le point qui partage le segment A_1A_2 dans le rapport $k = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

(Notons que $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$; il en résulte que $k \neq 1$; on retrouve ainsi l'existence du point G).

Réciproquement, étant donnés trois points alignés G, A_1, A_2, posons

$$\frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_2}} = k \neq 1 \implies \overline{GA_1} = k\overline{GA_2} \implies \overrightarrow{GA_1} - k\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}.$$

On voit que G est le barycentre des points $A_1(1)$ et $A_2(-k)$, et, plus généralement, des points $A_1(\lambda)$ et $A_2(-\lambda k)$, avec $\lambda \neq 0$.

2° **Barycentre d'un système de points dont les poids sont tous de même signe.** — Supposons que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient tous de même signe. En vertu de la propriété d'associativité (68, 3°), on peut remplacer le système $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$ par son barycentre B_1 qu'on sait construire. On est alors ramené à un problème analogue à celui qui a été posé, mais relatif à $(n-1)$ points seulement :

$$B_1(\alpha_1 + \alpha_2), \quad A_3(\alpha_3), \quad \ldots, \quad A_n(\alpha_n).$$

En répétant la même construction on sera ramené à la construction du barycentre de deux points. Notons qu'aucune des sommes $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, ... introduites par itération de la méthode ne peut être nulle, puisque tous les poids sont de même signe.

3° **Cas général.** — Si les poids ne sont pas tous de même signe, on partagera le système donné en deux systèmes S_1 et S_2. S_1 sera formé des points dont les poids sont positifs; on sait construire son barycentre P, qu'on affectera du poids total $p > 0$ de ce système. S_2 sera formé des points dont les poids sont négatifs; on construira son barycentre N, qu'on affectera du poids $n < 0$ du système S_2. Le barycentre G cherché est celui des points pondérés $P(p)$ et $N(n)$ ($p + n$, poids total du système, n'est pas nul).

Concluons en disant que la construction du barycentre d'un système quelconque de points pondérés se ramène à des constructions de barycentres de deux points.

Application au triangle et au tétraèdre. — Soit G le centre des moyennes distances des points A, B, C. On peut remplacer les points B et C par leur centre des moyennes distances qui est le milieu A' de BC, affecté du poids 2. G est alors le barycentre des points A(1) et A'(2) : c'est le point de la médiane AA' tel que $\overline{GA} + 2\,\overline{GA'} = 0$. En procédant de même avec C et A, puis avec A et B, on établit que les trois médianes AA', BB', CC' du triangle ABC concourent en un point G tel que

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{GB'}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{GC'}} = -2.$$

Soit maintenant quatre points A, B, C, D et G leur centre des moyennes distances. Pour construire G, on peut d'abord remplacer deux des points, disons A et B, par leur milieu P affecté du poids 2, et les deux autres points C et D par leur milieu Q affecté du poids 2; G est le barycentre des points P(2) et Q(2); c'est le milieu de PQ. G est de même le milieu des segments dont les extrémités sont les milieux des segments AC et BD, AD et BC. Mais on peut aussi remplacer les points B, C, D par leur centre des moyennes distances A' affecté du poids 3, et G est le barycentre des points A(1) et A'(3); c'est le point de la droite AA' tel que $\overline{GA} + 3\,\overline{GA'} = 0$. G est de même sur les droites joignant respectivement B, C, D aux centres de gravité B', C', D' des triangles ACD, ADB, ABC, et

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{GB'}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{GC'}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GD'}} = -3.$$

Le point G est commun à $3 + 4 = 7$ droites remarquables associées aux quatre points A, B, C, D.

70. ***Coordonnées du barycentre.*** — Soit S un système de n points pondérés $A_p(\alpha_p)$ ($p = 1, 2, \ldots, n$). Rapportons l'espace à un repère cartésien $Oxyz$, dont les vecteurs unitaires des axes sont $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; soient (x_p, y_p, z_p) les coordonnées de A_p. Supposons que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha \neq 0$; alors S a un barycentre G dont nous nous proposons de calculer les coordonnées ξ, η, ζ.

Utilisons pour cela la formule (2) du n° 67 en plaçant le point M en O :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha}\sum_{p=1}^{p=n} \alpha_p \overrightarrow{OA_p}$$

$$\xi = \frac{\sum_1^n \alpha_p x_p}{\sum_1^n \alpha_p}; \qquad \eta = \frac{\sum_1^n \alpha_p y_p}{\sum_1^n \alpha_p}; \qquad \zeta = \frac{\sum_1^n \alpha_p z_p}{\sum_1^n \alpha_p}.$$

Ces formules restent applicables si S est un système plan, situé dans le plan xOy, alors $\zeta = 0$.

Ces formules donnent en particulier les coordonnées :

1° du point M qui partage le segment A_1A_2 dans le rapport $k \neq 1$, puisque M est le barycentre des points pondérés $A_1(1)$ et $A_2(-k)$

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \qquad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}, \qquad z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k};$$

2° du centre de gravité d'un triangle $A_1A_2A_3$, $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1)$

$$\xi = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \qquad \eta = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \qquad \zeta = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

ou d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$: $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1)$

$$\xi = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad \eta = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \zeta = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4).$$

EXERCICES

1. — Un plan P qui varie en restant parallèle à un plan fixe Π coupe n droites données D_i, non parallèles à Π, aux points M_i. Lieu du centre des moyennes distances des points M_i.

2. — On donne, dans un plan P, trois points non alignés A, B, C. Démontrer qu'à tout point M du plan on peut associer un triplet de nombres (x, y, z), déterminés à un facteur non nul près, tel que M soit le barycentre des points pondérés A (x), B (y), C (z); x, y, z sont appelés coordonnées barycentriques (homogènes) du point M par rapport au triangle ABC.

Déterminer un système de coordonnées barycentriques des points remarquables liés au triangle ABC (centre de gravité, orthocentre, centres des cercles circonscrit, inscrit, exinscrit).

Démontrer que le lieu des points de P dont les coordonnées barycentriques sont liées par une relation de la forme $ux + vy + wz = 0$ est une droite (*on considérera deux points* M_1 *et* M_2 *particuliers*).

Étendre les résultats précédents à l'espace.

3. — On donne cinq points quelconques dans l'espace. On considère les dix segments de droite ayant pour extrémités le milieu du segment joignant deux quelconques des points et le centre de gravité du triangle déterminé par les trois autres points. Démontrer que ces dix segments ont un point commun, qui les partage dans le même rapport. Généraliser.

4. — Soit T un trièdre dont les arêtes sont Ox, Oy, Oz. On considère les six bissectrices des arêtes du trièdre prises deux à deux. Démontrer — en utilisant l'addition vectorielle — qu'on peut, de quatre manières, associer ces six droites trois à trois de manière que trois droites associées soient dans un même plan. (*On prendra un vecteur unitaire sur chaque arête de* T.)

5. — Deux triangles ABC et A'B'C' de l'espace ont même centre de gravité. Démontrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Examiner la réciproque. Généraliser.

CHAPITRE V

NOMBRES COMPLEXES

I. DÉFINITION. OPÉRATIONS

71. ***Introduction des nombres complexes.*** — Soit R le corps des réels (1); le produit R $\times$ R est l'ensemble formé par les couples (a, b) de nombres réels. Nous allons démontrer qu'on peut définir sur R $\times$ R deux opérations internes (appelées addition et multiplication) conférant à cet ensemble la structure de corps commutatif de telle manière qu'on puisse établir un isomorphisme entre R et la partie du nouvel ensemble constituée par les éléments de la forme $(a, 0)$.

Nous appellerons C l'ensemble R $\times$ R ainsi structuré; un élément de C, $z = (a, b)$ est alors appelé *nombre complexe*; a et b sont appelés ses *composantes.* D'après la définition de l'égalité (n° 6), si $z' = (a', b')$, nous écrirons

$$z = z' \iff a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

Nous désignerons par C* l'ensemble des éléments de C de la forme $(a, 0)$.

72. ***Addition. Multiplication par un nombre réel.*** — **1° Définition et propriétés de l'addition.** — L'addition sur C est l'opération interne définie par l'égalité :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Elle est commutative et associative, puisque l'addition sur R l'est; elle possède l'élément neutre (0,0) (nombre complexe nul); enfin tout élément $z = (a, b)$ de C a un opposé tel que

$$(a, b) + \text{opp}\,(a, b) = (0,0) \implies \text{opp}\,(a, b) = (-a, -b).$$

L'ensemble C est maintenant muni d'une structure de groupe additif (30) et en possède toutes les propriétés; en particulier, l'opposé de $z = (a, b)$ pourra se noter $-z$ ou $-(a, b)$.

Remarquons que la bijection $\mathfrak{h}$ de R sur C* déterminée par

$$a \xrightarrow{\mathfrak{h}} (a, 0)$$

est un isomorphisme de groupes commutatifs pour les lois d'addition.

---

(1) Le corps des réels est étudié au tome II, chapitre I.

2° **Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel.** — La multiplication du nombre complexe $z = (a, b)$ par le nombre réel α est une opération externe pour C qui, à tout couple ($z \in C$, $\alpha \in R$) associe l'élément de C noté αz, ou $z\alpha$, tel que :

$$\alpha z = z\alpha = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b).$$

On vérifie sans peine que, quels que soient $\alpha, \alpha' \ldots \in R$, et $z, z', \ldots \in C$, les égalités suivantes sont réalisées :

a) $\alpha(\alpha' z) = (\alpha\alpha')z = (\alpha'\alpha)z = \alpha'(\alpha z)$;

b) $1.z = z$; $(-1)z = \text{opp}\, z$ ou $-z$; $0z = (0,0)$;

c) $(\alpha + \alpha')z = \alpha z + \alpha' z$ et $\alpha(z + z') = \alpha z + \alpha z'$.

3° **Autre écriture pour un nombre complexe.** — Les opérations qui viennent d'être définies permettent d'écrire

$$z = (a, b) = a(1,0) + b(0,1);$$

z est maintenant exprimé, à partir de ses composantes a et b, au moyen de deux nombres complexes particuliers, indépendants de z : $e = (1,0)$ et $i = (0,1)$ [*unités complexes*] (1). On écrira donc :

$$z = (a, b) = ae + bi$$

73. ***Multiplication des nombres complexes.*** — Nous allons rechercher une loi de groupe multiplicatif et commutatif sur C (2).

1° **Choix de l'élément neutre.** — Pour que l'application $\mathfrak{h}$ soit un isomorphisme pour la multiplication, il est nécessaire (26) que l'élément neutre de C soit le transformé par $\mathfrak{h}$ de l'élément neutre 1 de R, c'est-à-dire soit l'élément $e = (1,0)$ de C*

La table de multiplication T des unités complexes e et i est donc nécessairement la table ci-contre; ω est un élément de C, provisoirement quelconque.

T	e	i
e	e	i
i	i	ω

2° **Règle de formation du produit.** — Dans un corps, la multiplication est distributive par rapport à l'addition; on écrira donc nécessairement :

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = (ae)(a'e) + (ae)(b'i) + (bi)(a'e) + (bi)(b'i). \quad (1)$$

Si la bijection $\mathfrak{h}$ est un isomorphisme pour les multiplications sur R et sur C*, a sera l'écriture simplifiée de l'élément $(a, 0)$ de C* et, la multiplication devant être associative, on pourra écrire, par exemple,

---

(1) Le lecteur verra plus loin que les deux opérations qui viennent d'être définies confèrent à C une structure *d'espace vectoriel* (chap. X) dont l'ensemble $\{ e, i \}$ constitue une *base*.

(2) Tout le début de ce paragraphe pourra être négligé en première lecture, et le lecteur pourra, sans inconvénient, partir de la définition dogmatique du produit (4°) à laquelle va nous conduire l'étude qui suit.

$(ae)\ (a'e) = (aa')\,(ee) = aa'e$ d'après la table T, et de même pour les autres produits du second membre de (1).

Finalement, on écrira (1) sous la forme

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = aa'e + (ab' + ba')i + bb'\omega$$

ou, en posant $\omega = \alpha e + \beta i$

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = (aa' + bb'\alpha)e + (ab' + ba' + bb'\beta)i. \quad (2)$$

3° **Choix de** ω. — Si C est un corps, tout élément $ae + bi$ différent du zéro de C, c'est-à-dire tel que a et b ne soient pas simultanément nuls, doit avoir un inverse $xe + yi$ tel que

$$(ae + bi)(xe + yi) = e = 1.e + 0.i,$$

ou, en utilisant la formule de multiplication (2),

$$S \begin{cases} ax + \alpha by = 1 \\ bx + (a + b\beta)y = 0. \end{cases}$$

Ce système de deux équations linéaires en x et y doit admettre une solution et une seule quels que soient a et b non simultanément nuls; il faut et il suffit pour cela (n° 145) que l'expression

$$\Delta = a(a + b\beta) - \alpha b^2 \qquad \text{ou} \qquad a^2 + \beta ab - \alpha b^2$$

soit différente de zéro, *en particulier* pour $a \neq 0$ *et* pour $b \neq 0$. Or Δ est un trinôme du second degré en a; il ne doit jamais s'annuler; son discriminant $\delta = b^2(\beta^2 + 4\alpha)$ doit donc être négatif, ce qui impose $\beta^2 + 4\alpha < 0$ et, *en particulier*, $\alpha < 0$. Nous avons donc une infinité de choix possibles pour α et β; le choix $\alpha = -1$, $\beta = 0$, qui conduit à $\omega = i^2 = -e$, satisfait à l'inégalité $\delta < 0$ et offre en outre l'avantage de simplifier au maximum la règle de multiplication, qui devient alors nécessairement :

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = (aa' - bb')e + (ab' + ba')i. \quad (4)$$

Avec ce choix, le système S s'écrit :

$$ax - by = 1 \qquad bx + ay = 0.$$

Il admet la solution unique $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$, pourvu que a et b ne soient pas simultanément nuls. Tout nombre $z = ae + bi \neq 0$ a donc un inverse $\zeta = \dfrac{ae - bi}{a^2 + b^2}$.

4° DÉFINITION DE LA MULTIPLICATION. — **On appelle produit de deux nombres complexes** $z = ae + bi$ **et** $z' = a'e + b'i$ **le nombre complexe déterminé par l'égalité :**

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = (aa' - bb')e + (ab' + ba')i.$$

On remarquera que le produit s'obtient en effectuant le produit des sommes

$ae + bi$ et $a'e + b'i$ comme si e et i étaient des nombres réels, et en remplaçant, dans le résultat obtenu, e^2 par 1, i^2 par -1, ei et ie par i.

74. *Corps des nombres complexes.* — Jusqu'ici nous avons établi des règles opératoires *nécessaires* pour donner à C la structure de corps. Examinons si elles sont suffisantes. Nous avons déjà vu que l'addition est une loi de groupe. Occupons-nous de la multiplication, dont la règle opératoire est donnée par la formule

$$(ae + bi)(a'e + b'i) = (aa' - bb')e + (ab' + ba')i. \qquad (1)$$

1° *La multiplication est commutative*, car le second membre de (1) ne change pas si on transpose a et a' d'une part, b et b' d'autre part.

2° Elle est *associative*, car en posant

$$z = ae + bi, \quad z' = a'e + b'i, \quad z'' = a''e + b''i$$

et en appliquant la formule (1), on a :

$$\begin{aligned}(zz')z'' &= [(aa' - bb')e + (ab' + ba')i](a''e + b''i)\\ &= (aa'a'' - ab'b'' - a'b''b - a''bb')e + (a'a''b + a''ab' + aa'b'' - bb'b'')i.\end{aligned}$$

Le dernier nombre écrit ne change pas si on effectue sur a, a', a'' d'une part, sur b, b', b'' d'autre part, une substitution circulaire. Il en résulte que

$$(zz')z'' = (z'z'')z, \quad \text{d'où, par commutativité :}$$
$$(zz')z'' = z(z'z'').$$

3° *La multiplication possède l'élément neutre e.*

4° *Tout nombre* $ae + bi \neq 0$ *admet un inverse* $\dfrac{ae - bi}{a^2 + b^2}$ (73, 3°).

5° *La multiplication est distributive par rapport à l'addition*; soit en effet :

$$z(z' + z'') = (ae + bi)[(a' + a'')e + (b' + b'')i].$$

Par application de la formule (1) :

$$\begin{aligned}z(z' + z'') &= [a(a' + a'') - b(b' + b'')]e + [a(b' + b'') + b(a' + a'')]i\\ &= [(aa' - bb')e + (ab' + ba')i] + [(aa'' - bb'')e + (ab'' + ba'')i]\end{aligned}$$

ou enfin :
$$z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

On peut donc énoncer : *Les opérations définies plus haut confèrent à l'ensemble* C *une structure de corps commutatif dont il possède toutes les propriétés.* En particulier, si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, z$ sont des éléments de C, on sait définir les puissances de z : $z^2, z^3, \ldots, z^n$, et aussi la somme

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

qui sera appelée *polynôme* par rapport à z.

REMARQUE I. — La somme de n nombres complexes égaux à $e = (1, 0)$ est $(n, 0)$; elle n'est pas nulle, et par suite, le corps C est, comme R, de caractéristique nulle.

REMARQUE II. — On peut d'une infinité de manières définir une relation d'ordre dans R × R, et par suite dans C.

Par exemple, étant donnés les nombres complexes $z = a + bi$, $z' = a' + bi'$, on peut convenir que z est antérieur à z' (ce que l'on écrit $z \prec z'$)

soit si $a < a'$, soit si $a = a'$ et $b \leqslant b'$ (2)

La relation binaire ainsi définie sur C est une relation d'ordre total.

Mais il est impossible qu'il existe une relation d'ordre total, $\prec$, qui fasse de C un corps ordonné (au sens du n° 41); en effet, l'un des deux nombres opposés 1 et -1 (resp. i et $-i$) vérifierait $0 \prec z$, par suite $0 \prec z^2$ et l'on aurait simultanément $0 \prec 1$ et $0 \prec -1$, ce qui est absurde. C *n'est pas un corps ordonné.*

Observons aussi qu'avec la relation d'ordre (2), C n'est pas archimédien (36, 8°) : en effet $0 \prec i \prec 1 + i$ et $0 \prec ni \prec 1 + i$, quelque soit l'entier naturel n.

75. *Isomorphisme de* R *sur* C* — Montrons maintenant que la bijection $\mathfrak{h}$ de R sur C* telle que

$$a \xrightarrow{\mathfrak{h}} (a, 0)$$

est un isomorphisme, non seulement pour la structure de groupe commutatif (72), mais aussi pour celle de corps commutatif. Il suffit de remarquer que le produit $(a, 0) \times (a', 0)$ ou $(ae) \times (a'e)$ de deux éléments de C* est égal à $aa'e^2$, ou $(aa', 0)$, élément de C* associé par $\mathfrak{h}$ au produit aa', produit des éléments a et a' de R. Cette remarque nous permet de simplifier l'écriture en écrivant a, au lieu de ae, un élément de C* : on exprime parfois ce fait en disant qu'on *identifie* les éléments de C* à ceux de R (1). En particulier, on écrira 1 au lieu de e, et 0 au lieu de (0, 0).

Finalement, le nombre complexe $z = (a, b)$ sera écrit $z = a + bi$; si $b \neq 0$ on dit qu'il est *imaginaire*, si $b = 0$, on dit qu'il est *réel* (ces dénominations tiennent aux circonstances historiques où la théorie des nombres complexes a été élaborée); a est la *partie réelle* de z, b est le coefficient de i; par abus de langage on dit aussi que b est la *partie imaginaire* de z (bien que b soit un nombre réel). Les règles de calcul sont les suivantes

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')\, i$$

$$i \times i \quad \text{ou} \quad i^2 = -1$$

$$(a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\, i$$

76. *Calculs pratiques sur les nombres complexes mis sous la forme* $a + bi$. — 1° Addition. — La somme des n nombres complexes $a_k + b_k i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ est :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, i.$$

Elle s'obtient en considérant les nombres $a_k + b_k i$ comme des polynômes du premier degré par rapport à la lettre i, en faisant leur somme suivant la règle habituelle et en ordonnant cette somme par rapport à i.

2° **Soustraction.** — C étant un corps, la soustraction y est possible;

(1) Il ne s'agit, en fait, que d'une *simplification d'écriture* légitimée par l'isomorphisme $\mathfrak{h}$.

étant donnés deux nombres complexes $z = x + yi$, et $z' = x' + y'i$, il existe un nombre complexe et un seul d, tel que $z + d = z'$;

$$d = z' - z = z' + \text{opp } z = (x' - x) + (y' - y)i.$$

Plus généralement, comme dans tout groupe additif, on peut effectuer une somme algébrique de nombres complexes (30).

3° **Multiplication.** — La règle pratique de multiplication de deux nombres complexes est donnée au n° 75. Elle permet de calculer, de proche en proche, le produit d'un nombre quelconque de nombres complexes et les puissances entières, positives, d'un tel nombre.

Mais on peut procéder plus simplement. Remarquons d'abord que, d'après la règle de multiplication :

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = -i^2 = 1$ et, plus généralement.
$i^{4p} = 1$, $i^{4p+1} = i$, $i^{4p+2} = -1$, $i^{4p+3} = -i$.

Soit alors à mettre le produit

$$P = (a_1 + b_1 i)\ (a_2 + b_2 i)\ \ldots\ (a_n + b_n i)$$

sous la forme $A + Bi$, A et B étant des nombres réels. Développons le produit P comme produit de polynômes en i; P est lui-même un polynôme en i dont la forme réduite est : $A_0 + A_1 i + A_2 i^2 + \ldots + A_n i^n$; A_0, A_1, ... A_n sont des nombres réels.

Dans l'expression précédente, remplaçons i^2 par -1, i^3 par $-i$, i^4 par 1, etc.... On met ainsi P sous la forme cherchée. D'où la règle :

Pour effectuer le produit d'un nombre quelconque de nombres complexes mis sous la forme $a + bi$, on utilise les règles du produit des polynômes en i; dans le produit, mis sous forme réduite, on remplace autant de fois qu'il est possible i^2 par -1.

4° **Division.** — Comme dans tout corps commutatif, la division dans C est possible, à condition que le diviseur ne soit pas nul. En d'autres termes, l'équation $qz = z'$, où z et z' sont connus, $z \neq 0$, admet une et une seule solution, notée $q = \frac{z'}{z}$, appelée quotient de z' par z, et égale à $z' \times \text{inv } z$.

Si $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, $\text{inv } z = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$;

par suite

$$\frac{x' + y'i}{x + yi} = (x' + y'i) \times \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{xx' + yy' + (xy' - yx')i}{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Pratiquement, la formule (1) s'obtient en multipliant les deux termes du rapport $\frac{x' + y'i}{x + yi}$ par le nombre complexe $x - yi$ (qui sera appelé plus loin *conjugué* de $x + yi$).

Les fractions à termes complexes possèdent toutes les propriétés mises en évidence dans l'étude des corps commutatifs (n° 41).

II. FORME TRIGONOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

77. ***Nombres complexes conjugués.*** 1° DÉFINITION. — **On appelle nombre complexe conjugué** (et par abus de langage *conjugué*) **du nombre complexe** $z = a + bi$ **le nombre complexe** $\bar{z} = a - bi$ (on énonce z barre).

Il résulte de cette définition que le conjugué de $\bar{z}$ n'est autre que z. Dans le corps C la correspondance $z \leftrightarrow \bar{z}$ est une bijection involutive (**18**, 4°), dans laquelle les seuls éléments invariants sont les nombres réels.

2° **Opérations rationnelles sur les nombres complexes conjugués.** — *a*) Considérons deux nombres complexes quelconques $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$.

Nous savons que

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i \qquad \text{et} \qquad zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Nous en déduisons

$$\overline{(z + z')} = (a + a') - (b + b')i = (a - bi) + (a' - b'i),$$
$$\overline{(zz')} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i).$$

Autrement dit $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{(zz')} = \bar{z}\bar{z'}$.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **La loi qui à un nombre complexe fait correspondre son conjugué est un automorphisme sur C muni d'une structure de corps.**

b) CONSÉQUENCES. — On démontre, par récurrence,

$$\overline{(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n$$
$$\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n \qquad \text{et en particulier} \qquad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

Notons aussi : $(z - z') + z' = z \implies \overline{(z - z')} = \bar{z} - \bar{z'}$

et si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} \cdot z = 1 \implies \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

La dernière relation entraîne $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.

c) POLYNOMES. — Soient deux polynômes à coefficients complexes conjugués :

$$P(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n \qquad \text{et} \qquad Q(z) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 z + \ldots + \bar{A}_n z^n;$$

soit z_0 un nombre complexe quelconque, et $\bar{z}_0$ son conjugué : $(z_0)^p$ et $(\bar{z}_0)^p$ sont aussi conjugués, ainsi que $A_p(z_0)^p$ et $\bar{A}_p(\bar{z}_0)^p$; il en résulte, d'après 2° que $P(z_0)$ et $Q(\bar{z}_0)$ sont aussi des nombres conjugués. Par suite : *les résultats de substitution de deux nombres complexes conjugués respectivement dans deux polynômes à coefficients complexes conjugués sont eux-*

mêmes conjugués. En particulier, si $P(z)$ est un polynôme à coefficients réels, les nombres complexes $P(z_0)$ et $P(\bar{z}_0)$ sont conjugués.

La propriété précédente s'étend sans difficulté à des polynômes à plusieurs indéterminées : si les polynômes $P(x, y, z)$ et $Q(x, y, z)$ ont leurs coefficients respectivement conjugués, et si x_0, y_0, z_0 désignent trois nombres complexes quelconques, les nombres $P(x_0, y_0, z_0)$ et $Q(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ sont conjugués ; en particulier, si le polynôme $P(x, y, z)$ est à coefficients réels, les nombres $P(x_0, y_0, z_0)$ et $P(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ sont conjugués.

d) FRACTIONS RATIONNELLES. — Soit $R(x, y, z) = \dfrac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)}$ une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes P et Q à coefficients complexes ; soient $P_1(x, y, z)$ et $Q_1(x, y, z)$ les polynômes dont les coefficients sont, respectivement, les conjugués de ceux de P et Q. Posons $R_1 = \dfrac{P_1(x, y, z)}{Q_1(x, y, z)}$. D'après les résultats du 2°, on voit que, quels que soient les nombres complexes x_0, y_0, z_0, n'annulant pas $Q(x, y, z)$ (alors $Q_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$, conjugué de $Q(x_0, y_0, z_0)$, n'est pas nul non plus) les nombres $R(x_0, y_0, z_0)$ et $R_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ sont conjugués. En particulier, si dans une fraction rationnelle à coefficients réels des indéterminées x, y, z on substitue à x, y, z les nombres complexes x_0, y_0, z_0, puis leurs conjugués, les résultats des deux substitutions sont eux-mêmes conjugués.

3° **Calcul de $z + \bar{z}$ et de $z\bar{z}$.** — Reprenons les nombres complexes conjugués

$$z = a + bi \qquad \text{et} \qquad \bar{z} = a - bi :$$
$$z + \bar{z} = 2a, \qquad z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

La somme et le produit de deux nombres conjugués sont réels ; le produit est positif ou nul.

78. *Module et argument d'un nombre complexe.* — 1ère partie. — *Module d'un nombre complexe.* 1° *Définition du module.* — Le résultat du n° 77, 3° justifie la définition suivante :

DÉFINITION. — **On appelle module du nombre complexe z le nombre réel, positif ou nul, $\sqrt{z\bar{z}}$.** Le module de z se note $|z|$;

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2° *Propriétés du module.* — THÉORÈME. — **L'application $z \longrightarrow |z|$ du corps des complexes dans l'ensemble des réels positifs ou nuls est une valeur absolue** (41, 5°).

Montrons en effet que le module possède les propriétés suivantes :

$$\text{I. } |z| \geqslant 0 ; \qquad |z| = 0 \iff z = 0.$$
$$\text{II. } |zz'| = |z| . |z'|. \qquad \text{III. } |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

La propriété I est immédiate. La propriété II résulte de

$$|zz'|^2 = (zz').(\bar{z}\bar{z}') = zz' . (\bar{z} . \bar{z}') = z\bar{z} . z'\bar{z}' = |z|^2 . |z'|^2.$$

En posant $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, la propriété III équivaut à

$$(a + a')^2 + (b + b')^2 \leqslant \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}\right)^2,$$

ou encore à $$aa' + bb' \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} . \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

La dernière inégalité est vérifiée si $aa' + bb' \leqslant 0$. Supposons donc $aa' + bb' > 0$, elle est alors équivalente à l'inégalité

$$(aa' + bb')^2 \leqslant (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

qui s'écrit enfin $(ab' - ba')^2 \geqslant 0$, et qui est ainsi réalisée.

REMARQUE. — *Cherchons dans quel cas l'égalité est réalisée dans la propriété III.*

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff aa' + bb' = \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2} \qquad (1)$$

α) (1) est réalisée si $a = 0$, $b = 0$, ou si $a' = 0$, $b' = 0$, c'est-à-dire quand l'un des deux nombres z ou z' est nul.

β) Si z et z' sont différents de 0, (1) $\iff$ $\begin{cases} aa' + bb' > 0 \\ ab' - ba' = 0. \end{cases}$

L'égalité exprime la proportionnalité de (a', b') et de (a, b) :

$$\exists\, \rho \quad \text{tel que} \quad a' = \rho a, \quad b' = \rho b;$$

l'inégalité donne alors $\rho(a^2 + b^2) > 0 \implies \rho > 0$. En résumé, $a' + b'i = \rho(a + bi)$ ou $z' = \rho z$, avec $\rho > 0$; *le rapport de z' à z est un réel positif.*

CONSÉQUENCES. — *a*) Par récurrence,

la propriété II entraîne $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1|.|z_2| \ldots |z_n|$

la propriété III entraîne $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

b) D'autre part, en utilisant

$$(z + z') + (-z') = z \quad \text{et} \quad |-z'| = |z'|,$$

on a $$|z + z'| \geqslant |z| - |z'|.$$

Parallèlement, on peut écrire $|z + z'| \geqslant |z'| - |z|$,

et par suite $$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|.$$

3° THÉORÈME. — **L'ensemble $\mathfrak{U}$ des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif abélien.**

$\mathfrak{U}$ est une partie de l'ensemble C′ des nombres complexes non nuls, sur lequel la multiplication est une loi de groupe abélien.

Si σ et τ sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{U}$ nous avons

$$\left|\frac{\sigma}{\tau}\right| = \frac{|\sigma|}{|\tau|} = 1 \implies \frac{\sigma}{\tau} \in \mathfrak{U}.$$

Il en résulte (29, 3°) que $\mathfrak{U}$ est un sous-groupe de C′.

2ème partie. — *Argument d'un nombre complexe.*

A) Etude à partir des axiomes de la géométrie élémentaire — Représentation géométrique des nombres complexes. — 1° *Plan complexe.* — Soit P un plan euclidien orienté, que nous rapportons à un repère orthonormé dont les axes Ox, Oy ont respectivement pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$. A tout nombre complexe $z = a + bi$ on peut faire correspondre biunivoquement :

a) soit le *vecteur libre* $\vec{A}$ du plan P dont les coordonnées sont a et b;

b) soit le point M dont les coordonnées sont a et b (fig. 19).

$\vec{A}$ est le *vecteur-image* (1) et M le *point-image* (1) du nombre complexe z; inversement, le nombre z est l'*affixe* du vecteur $\vec{A}$, ou du point M.

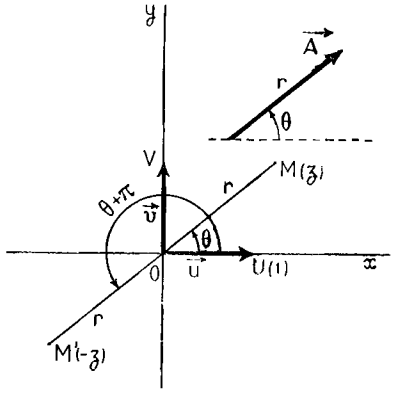


FIG. 19.

Le plan P, ainsi utilisé à la représentation géométrique des nombres complexes, sera appelé, dans la suite, *plan complexe* (2).

Les nombres réels sont caractérisés par $b = 0$, c'est-à-dire par le fait que leurs images sont sur Ox qui sera appelé *axe réel*.

On appelle *complexe pur* ou *imaginaire pur* un nombre complexe tel que $a = 0$, c'est-à-dire un nombre complexe dont l'image est sur Oy qui sera appelé *axe imaginaire*.

Le *module* du nombre complexe $z = a + bi$ est $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, c'est-à-dire la longueur du vecteur $\vec{A}$ ou la distance OM de l'origine au point M.

Cette image géométrique va servir maintenant à introduire la notion d'argument.

2° *Argument d'un nombre complexe.* — DÉFINITION. — **On appelle argument du nombre complexe $z \neq 0$ la mesure en radians, à un multiple entier de 2π près, de l'angle de la demi-droite $\vec{Ox}$ avec le vecteur $\vec{OM}$, M étant l'image de z.**

L'argument du nombre complexe z est noté $\arg z$ (3) :

$$\arg z = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \qquad \text{ou} \qquad \arg z = (\vec{Ox}, \vec{A})$$

si $\vec{A}$ est le vecteur-image de z.

La notation $\arg z$ représente une progression arithmétique de raison 2π; si α est un terme de cette progression, ou une *détermination* de $\arg z$, alors

$$\arg z = \alpha + k.2\pi.$$

Dans l'ensemble R des nombres réels, la relation binaire entre x et y

« $x - y$ est un multiple entier de 2π »

est une relation d'équivalence que nous noterons

$$x = y \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

(1) Le mot *vecteur*, comme le mot *point*, pourra être supprimé s'il n'y a pas ambiguïté.

(2) Différents noms ont été donnés à ce plan, en particulier : plan analytique, plan de la variable complexe (dont la terminologie que nous avons adoptée est une abréviation), plan de Gauss, plan d'Argand-Cauchy.

(3) Nous ne soulevons ici aucune difficulté sur la notion d'angle; nous admettons les exposés faits antérieurement, par exemple au début de la trigonométrie.

Les diverses classes d'équivalence forment l'ensemble-quotient $\mathrm{R}/2\pi$; $\arg z$ est une de ces classes d'équivalence; en notant $\theta = \arg z$, si θ admet α pour représentant, on pose

$$\cos\theta = \cos\alpha, \quad \sin\theta = \sin\alpha.$$

3° ***Forme trigonométrique d'un nombre complexe.*** — Soit $z = a + bi$; supposons $z \neq 0$ et posons $r = |z|$, $\theta = \arg z$; le théorème des projections donne

$$(1) \qquad a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta$$

et par suite $\qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$

On dit que $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la *forme trigonométrique* du nombre complexe z, alors que $a + bi$ en est la *forme algébrique.*

Les formules (1) permettent de calculer a et b quand on connaît r et θ; inversement, si on connaît a et b, r et θ sont donnés par les formules

$$(2) \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r},$$

Exemples I. — L'argument d'un nombre réel est $0 + k.2\pi$ s'il est positif, $\pi + k.2\pi$ s'il est négatif. On n'attribue aucun argument au nombre complexe 0.

II. — L'argument du nombre complexe pur, bi, est $\frac{\pi}{2} + k.2\pi$ si $b > 0$, $-\frac{\pi}{2} + k.2\pi$ si $b < 0$. En particulier i est un nombre complexe pur de module 1, d'argument $\frac{\pi}{2} + k.2\pi$. Son image dans le plan complexe est le point V défini plus haut.

III. — Le module et l'argument du nombre $z = 1 + i = 1 + 1.i$ sont donnés par

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où $\qquad \theta = \frac{\pi}{4} + k.2\pi.$

On pourra écrire

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

On peut mettre en évidence r et θ sur la figure 20 où a été marquée l'image M du nombre $1 + i$, point de coordonnées (1, 1);

$$\mathrm{OM} = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{\mathrm{Ox}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \frac{\pi}{4}.$$

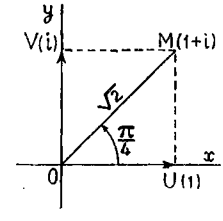


Fig. 20.

IV. — Le nombre $z = h(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a pour module h, et pour argument φ, si h *est positif*; son module est $-h$, et son argument $\pi + \varphi$ *si* h *est négatif.* Le lecteur appliquera ce résultat au nombre

$$z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

4° ***Nombres égaux, — opposés, — conjugués.*** — Soit z et z' deux nombres complexes; appelons r et r' leurs modules, α et α' des déterminations de leurs arguments. Il résulte de la définition du module et de l'argument

$$z' = z \iff \begin{cases} r' = r \\ \alpha' = \alpha + k.2\pi. \end{cases}$$

Deux nombres opposés sont caractérisés (72) par des points-images M et M′ symétriques par rapport à O; par suite

$$z' = -z \iff \begin{cases} r' = r \\ \alpha' = \alpha + \pi + k.2\pi. \end{cases}$$

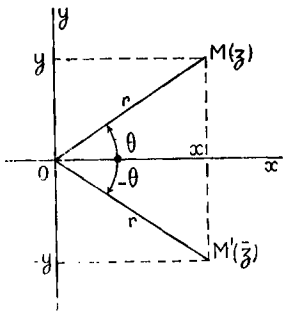


FIG. 21.

Deux nombres conjugués sont caractérisés (77) par le fait que leurs points-images M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe réel Ox (fig. 21); par suite :

$$z' = \bar{z} \iff \begin{cases} r' = r \\ \alpha' = -\alpha + k.2\pi. \end{cases}$$

5° *Application au produit.* — *a*) Appelons $\sigma(\theta)$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ:

$$\sigma(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

La règle de la multiplication (n° 73, 4°) donne

$$\sigma(\theta)\sigma(\theta') = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta),$$

ou, en utilisant les formules d'addition des fonctions circulaires,

$$\sigma(\theta)\sigma(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'). \tag{3}$$

Le produit de deux nombres complexes de module 1 *a pour argument la somme des arguments des facteurs.*

En observant que la relation d'équivalence $x = y \pmod{2\pi}$ est compatible avec l'addition, on définit dans l'ensemble-quotient $R/2\pi$ une addition, loi-quotient de l'addition dans R, et $R/2\pi$ devient ainsi un groupe additif.

La formule (3) montre ainsi que le groupe multiplicatif $\mathfrak{U}$ des nombres complexes de module 1 est isomorphe au groupe additif des nombres réels modulo 2π.

b) Plus généralement, soit z et z' deux nombres donnés sous forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

Excluons le cas où l'un des deux nombres est 0 (le produit alors 0). Le résultat obtenu en *a*) donne

$$zz' = rr'\sigma(\theta)\sigma(\theta') = rr'\sigma(\theta + \theta'),$$

ou

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')],$$

ce qui fait apparaître le résultat important :

Le produit de deux nombres complexes a pour module le produit de leurs modules et pour argument la somme de leurs arguments.

$$\boxed{|zz'| = |z||z'| \quad \text{et} \quad \arg zz' = \arg z + \arg z'.}$$

On retrouve le résultat obtenu à la première partie pour le module (2°). On peut aussi généraliser, comme au 2°, *a*, pour le produit de *n* nombres complexes; écrivons, pour l'argument,

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n.$$

En particulier, $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ et, pour $r = 1$, on obtient la *formule de Moivre* :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

6° ***Application au quotient.*** — Étant donnés z et z', $z \neq 0$, le quotient de z' par z est le nombre q tel que $z' = zq$; par suite

$$|z'| = |z|.|q| \quad \text{et, puisque} \quad |z| \neq 0, \quad |q| = \frac{|z'|}{|z|}$$

$$\arg z' = \arg z + \arg q, \quad \text{et} \quad \arg q = \arg z' - \arg z.$$

On peut donc écrire

$$\boxed{\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg\frac{z'}{z} = \arg z' - \arg z}$$

ce qui s'énonce, en langage ordinaire : *le quotient de z' par z a pour module le quotient du module de z' par le module de z, et pour argument l'excès de l'argument de z' sur celui de z.*

En particulier : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\frac{1}{z} = -\arg z$.

B) **Étude de la notion d'argument, indépendante des axiomes de la Géométrie élémentaire.** — Une introduction purement abstraite de la notion d'argument, indépendante des axiomes de la géométrie élémentaire est développée au tome II, nos **276** à **280**. Elle s'adresse *aux meilleurs élèves* des classes de Mathématiques Spéciales. Elle redonne les résultats signalés aux 3° et 5° précédents.

79. ***Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes.*** — 1° **Addition.** — Soient M, M' et S les points-images des nombres complexes $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ (fig. 22), et

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Les égalités $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v} \\ \overrightarrow{OM'} = a'\vec{u} + b'\vec{v} \end{cases}$ entraînent

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = (a + a')\vec{u} + (b + b')\vec{v} = \overrightarrow{OS}.$$

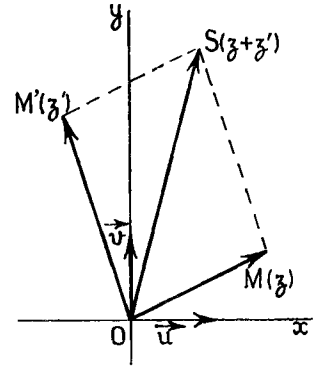


Fig. 22.

$\overrightarrow{OS}$ est donc la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$. Cette propriété s'étend à un nombre quelconque de nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dont les points-images sont $M_1, M_2, \ldots, M_n$; le point-image du nombre

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

est l'extrémité du vecteur somme géométrique en O des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{OM_n}$.

La propriété III du module (n° 78, 1re partie, 2°) est alors une conséquence de l'inégalité triangulaire dans le plan.

Conséquence. — A tout nombre complexe z on peut faire correspondre biunivoquement la translation du plan complexe qui admet $\overrightarrow{OM}$ pour vecteur directeur.

Ajouter z' à z, c'est appliquer à l'image M de z la translation $\overrightarrow{OM'}$; d'après la commutativité, c'est aussi appliquer à l'image M' de z' la translation $\overrightarrow{OM}$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Le groupe additif du corps* C *est isomorphe au groupe des translations dans le plan euclidien.*

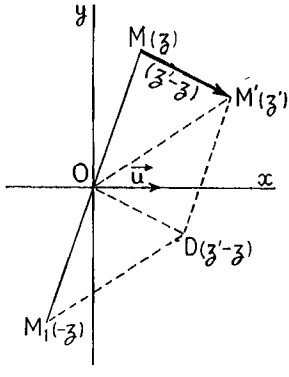


Fig. 23.

2° **Soustraction.** — Soit, avec les mêmes notations,

$$d = z' - z = (x' - x) + (y' - y)i.$$

Sur la figure 23 on a représenté les images M, M', M_1 de z, de z' et de $-z$, d'où l'on a déduit l'image D de $z' - z$. On voit que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MM'}$: l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est l'excès de l'affixe du point M' sur celle du point M. Énonçons ce résultat important :

L'affixe d'un vecteur lié du plan complexe est l'excès de l'affixe de son extrémité sur l'affixe de son origine.

3° **Multiplication.** — L'interprétation géométrique de la multiplication se fait à partir de la forme trigonométrique des nombres complexes.

Soient M, M', P les points-images des nombres z, z', et zz' (fig. 24). La formule $|zz'| = |z||z'|$ s'interprète ainsi :

$$OP = OM.OM' \quad \text{ou} \quad OP.OU = OM.OM', \quad \text{ou} \quad \frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OU}. \qquad (1)$$

La formule : $\arg zz' = \arg z + \arg z'$ s'interprète ainsi :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'})$$

ou (2) $$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM'}).$$

Les égalités (1) et (2) montrent que P est le transformé de M par la similitude directe de centre O qui transforme U en M', et aussi, d'après la commutativité du produit, le transformé de M' par la similitude de directe de centre O qui transforme U en M.

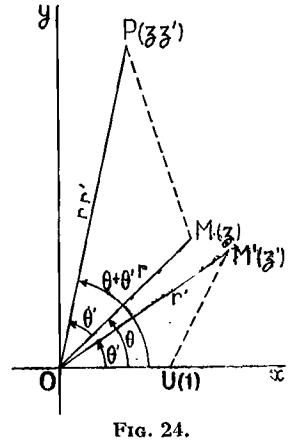


FIG. 24.

CONSÉQUENCE. — Sur la figure 19, on a

$$OM = r = |z| OU \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}) = \arg z;$$

le point-image M de z est le transformé du point-image U de 1 par la similitude plane directe de centre O, de rapport $|z|$, d'angle $\arg z$.

A tout nombre complexe $z \neq 0$ on peut faire correspondre biunivoquement la similitude plane directe du plan complexe qui transforme les points O et U en les points O et M.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls est isomorphe au groupe des similitudes directes ayant O pour point invariant dans le plan euclidien.*

III. RACINES *n*-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

80. *Racines carrées d'un nombre complexe.* — 1° Solution trigonométrique. — *Étant donné un nombre complexe Z, non nul, existe-t-il un nombre complexe z vérifiant* (1) $z^2 = Z$?

S'il existe un nombre z satisfaisant à (1), nécessairement :

a) $|z^2| = |z|^2 = |Z|$, d'où, puisque $|z|$ est un réel positif,

$$|z| = \sqrt{|Z|}.$$

b) $\arg z^2 = 2 \arg z = \arg Z$. Soit Θ une détermination de $\arg Z$; l'égalité précédente équivaut à :

$$2 \arg z = \Theta + 2k\pi$$

ou :

$$\arg z = \frac{\Theta}{2} + k\pi.$$

En définitive, si z existe, il est de la forme

$$z = \sqrt{|Z|}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\Theta}{2} + k\pi\right)\right]. \qquad (2)$$

On vérifie que, réciproquement, tout nombre de la forme (2) satisfait à l'égalité (1).

Pour que deux de ces nombres, correspondant aux valeurs k_1 et k_2 de k soient égaux, il faut et il suffit que $k_2\pi - k_1\pi = 2m\pi$, ou encore que $k_2 - k_1$ soit un nombre pair. La formule (2) détermine donc deux nombres distincts, et deux seulement, obtenus en donnant à k deux valeurs entières consécutives, par exemple 0 et 1 :

$$z_1 = \sqrt{|Z|}\left(\cos\frac{\Theta}{2} + i\sin\frac{\Theta}{2}\right)$$
$$z_2 = \sqrt{|Z|}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\Theta}{2} + \pi\right)\right] = -z_1.$$

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donné un nombre complexe Z, non nul, il existe deux nombres complexes z tels que $z^2 = Z$; ces deux nombres sont opposés et sont appelés les racines carrées du nombre Z.**

Un nombre réel *positif* Z, pour lequel $|Z| = Z$ et $\arg Z = m.2\pi$, a pour racines carrées $z_1 = \sqrt{Z}$ et $z_2 = -\sqrt{Z}$.

Un nombre réel *négatif* Z, pour lequel $|Z| = -Z$ et $\arg Z = \pi + m.2\pi$, a pour racines carrées

$$z_1 = \sqrt{-Z}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad i\sqrt{-Z} \quad \text{et} \quad z_2 = -i\sqrt{-Z}.$$

On peut remarquer que le produit d'une racine carrée a de A par une racine carrée b de B est une racine carrée de AB car, l'ensemble C étant un corps commutatif, $(ab)^2 = a^2b^2 = AB$. En écrivant, par exemple $-7 = (-1) \times 7$, on connaît une racine carrée de -1, qui est i, et une racine carrée de 7, qui est $\sqrt{7}$; une racine carrée de -7 est donc $i\sqrt{7}$, et l'autre est son opposée $-i\sqrt{7}$.

AUTRE EXEMPLE. — Les racines carrées du nombre

$$Z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

sont
$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1.$$

2° **Solution algébrique.** — Si Z est donné sous forme algébrique, $Z = X + iY$, il est souvent préférable de déterminer les racines de Z sous forme algébrique, $z = x + iy$.

$$z^2 = Z \iff x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY \iff (S)\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y. \end{cases}$$

Pour résoudre le système (S), dans lequel les données X, Y et les inconnues x et y sont des nombres réels, nous utilisons le système équivalent (1)

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = X \\ x^2 \times (-y^2) = -\dfrac{Y^2}{4} \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} Y.$$

(1) On écrit, en abrégé, sgn u pour *signe de* u.

x^2 et $(-y^2)$ sont les racines de l'équation du second degré en t

$$t^2 - Xt - \frac{Y^2}{4} = 0.$$

Cette équation a une racine positive ou nulle, une racine négative ou nulle, de sorte que

$$x^2 = \frac{1}{2}(X + \sqrt{X^2 + Y^2}), \qquad -y^2 = \frac{1}{2}(X - \sqrt{X^2 + Y^2}).$$

On en déduit :

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{X^2 + Y^2} + X} \quad \text{et} \quad y = \frac{\varepsilon \operatorname{sgn} Y}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{X^2 + Y^2} - X} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Les deux racines carrées de Z sont données par la formule :

$$z = x + iy = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{X^2 + Y^2} + X} + i \operatorname{sgn} Y \sqrt{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}\right]$$

dans laquelle on doit remplacer successivement ε par $+1$, puis par -1.

EXEMPLE. — Déterminer les racines carrées du nombre $Z = -3 - 4i$.
On est conduit à résoudre le système :

$$x^2 - y^2 = -3 \qquad x^2 \times (-y^2) = -4 \qquad xy < 0$$

x^2 et $-y^2$ sont les racines de l'équation :

$$t^2 + 3t - 4 = 0,$$

dont les racines sont $1 = x^2$ et $-4 = -y^2$. On prendra $x = \varepsilon$ et $y = -2\varepsilon$. Les racines carrées de $-3 - 4i$ sont donc : $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

3° **Équation du second degré à coefficients complexes.** — Soit a, b, c trois nombres complexes donnés ($a \neq 0$), cherchons si l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

a des solutions dans le corps des complexes.

La méthode de décomposition en carrés donne :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

En prenant $z' = z + \dfrac{b}{2a}$ pour inconnue auxiliaire, on est conduit à chercher les racines carrées du nombre $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; soit ω une racine carrée de $b^2 - 4ac$ (*discriminant*) ; une racine carrée du second membre de (2) est $\dfrac{\omega}{2a}$; l'autre est $\dfrac{-\omega}{2a}$ et l'équation (1) a deux racines, et deux seulement

$$z_1 = \frac{-b + \omega}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \omega}{2a}. \tag{3}$$

Ces formules généralisent celles de l'Algèbre élémentaire.

Si a, b, c sont réels, et si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation (1) a des racines, mais *dans le corps des complexes* (1); les racines carrées de $\Delta < 0$ sont $i\sqrt{-\Delta}$ et $-i\sqrt{-\Delta}$, de sorte que *les racines de* (1) *sont conjuguées*.

EXEMPLE. — Résoudre l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + (6+8i) = 0.$$

On procède comme s'il s'agissait d'une équation à coefficients réels. On forme le discriminant (abrégé)

$$\Delta = b'^2 - ac = (2+i)^2 - (6+8i) = -3 - 4i;$$

on cherche les racines carrées de Δ; ce calcul a été effectué au 2° et on trouve $1 - 2i$ et $-1 + 2i$. Les racines de l'équation proposée sont :

$$z_1 = 2 + i + (1 - 2i) = 3 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = 2 + i - (1 - 2i) = 1 + 3i.$$

REMARQUES. — *a*) Les formules de résolution (3) de l'équation (1) donnent encore, comme en Algèbre élémentaire :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

b) On démontre, comme en Algèbre élémentaire, qu'étant donnés deux nombres complexes S et P, il existe *toujours* deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$; ces nombres sont les racines de l'équation

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

Si S et P sont réels, et si $S^2 - 4P < 0$, z_1 et z_2 sont conjugués; on établit ainsi une réciproque d'un résultat obtenu au n° 77, 3° : si deux nombres *imaginaires* ont une somme et un produit réels, ils sont conjugués.

81. *Racines n-ièmes d'un nombre complexe.* — La généralisation de l'étude faite au n° 80 conduit au résultat suivant :

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donné un nombre complexe Z non nul et un entier naturel n, il existe n nombres complexes distincts z tels que $z^n = Z$ (1); ces nombres sont appelés les racines n-ièmes de Z.**

Si z existe, satisfaisant à (1), nécessairement :

a) $|z^n| = |z|^n = |Z|$, d'où, puisque $|z|$ est un réel positif, $|z| = \sqrt[n]{|Z|}$, ou, en posant

$$|Z| = R, \qquad |z| = \sqrt[n]{R};$$

b) $\arg z^n = n \arg z = \arg Z$.

Soit Θ une détermination de $\arg Z$; l'égalité précédente équivaut à

$$n \arg z = \Theta + k.2\pi \qquad \text{ou :} \qquad \arg z = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

(1) Historiquement, les nombres complexes ont été créés précisément pour pouvoir attribuer des racines à l'équation (1) lorsque a, b, c étant réels, $b^2 - 4ac$ est négatif.

En définitive, si z existe, il est nécessairement de la forme :

$$z = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]. \qquad (2)$$

On vérifie que, réciproquement, tout nombre de la forme (2) satisfait à (1).

Pour que deux de ces nombres, correspondant aux valeurs k_1 et k_2 de k, soient égaux, il faut et il suffit que $\frac{2k_1\pi}{n} - \frac{2k_2\pi}{n} = 2m\pi$, c'est-à-dire que $k_1 - k_2$ soit un multiple de n.

La formule (2) détermine donc n nombres distincts, et n seulement, qu'on obtient en donnant à k n valeurs entières consécutives, 0, 1, 2, ..., $n-1$, *par exemple*. Dans la suite nous poserons :

$$z_k = \sqrt{R}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (3)$$

avec $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Les images des racines z_k dans le plan complexe sont les n points M_k du cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$, tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Il résulte de là que $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$; M_{k+1} est donc le transformé de M_k par la rotation $\mathcal{R}\left(O, \frac{2\pi}{n}\right)$. Les points M_k sont donc les sommets successifs d'un polygone régulier convexe de n sommets inscrit dans le cercle Γ (fig. 25).

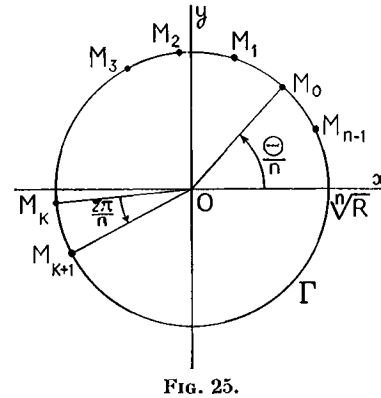


FIG. 25.

2° **Racines n-ièmes de 1.** — Si $Z = 1$, alors $R = 1$ et on peut prendre $\Theta = 0$. Les racines n-ièmes de 1 sont donc données par la formule :

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (4)$$

Pour $k = 0$, on obtient la racine réelle, évidente, 1. D'après la formule de Moivre :

$$\zeta_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = (\zeta_1)^k. \qquad (5)$$

On peut donc obtenir toutes les racines n-ièmes de 1 en élevant la racine particulière ζ_1 aux puissances d'exposants 1, 2, 3, ..., n (ζ_1^n étant la racine réelle 1).

Les n nombres ζ_k sont les racines de l'équation

$$z^n - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0.$$

Ainsi les racines n-ièmes de 1, sauf 1, sont les racines de l'équation

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0.$$

EXEMPLE. — *Racines cubiques de* 1. La méthode trigonométrique donne immédiatement les trois racines :

$$1; \quad \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}; \quad \omega' = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \bar{\omega}.$$

On peut aussi procéder algébriquement en remarquant que les deux racines imaginaires sont les solutions de l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{\omega}.$$

Enfin, on peut encore opérer géométriquement; les images des racines cubiques de 1 sont les sommets d'un triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans le cercle trigonométrique (fig. 26) et dont l'un des sommets, α, est l'image du nombre 1; la construction des sommets β et γ en résulte.

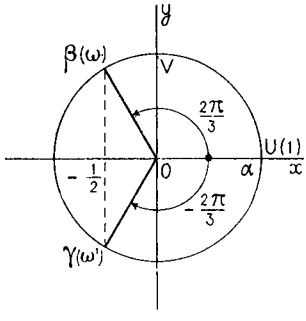


FIG. 26.

Signalons les relations : $\omega' = \bar{\omega}$, $\omega = \bar{\omega'}$, puis $\omega' = \omega^2$ et $\omega = \omega'^2$; enfin $\omega + \omega' = -1$.

On représente souvent par j l'UN QUELCONQUE des nombres ω et ω', c'est-à-dire l'une quelconque des racines cubiques imaginaires de 1 c'est-à-dire encore une quelconque des racines de l'équation $1 + z + z^2 = 0$, l'autre peut s'écrire alors $\bar{j}$, ou j^2, ou $-1 - j$.

3° Recherche pratique des racines n-ièmes d'un nombre complexe. — *a*) Supposons qu'on connaisse une racine n-ième quelconque, soit z_1, du nombre complexe Z, obtenue en donnant à k, dans la formule (2) du 1°, la valeur k_1. Les autres racines s'obtiennent en donnant à k les $n-1$ valeurs entières consécutives $k_1 + 1$, $k_1 + 2$, ..., $k_1 + n - 1$. Elles sont donc données par la formule générale :

$$z_p = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + \frac{2p\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + \frac{2p\pi}{n}\right)\right].$$

z_p est le produit de z_1 par le nombre complexe $\cos\frac{2p\pi}{n} + i\sin\frac{2p\pi}{n}$, qui, lorsque p varie de 0 à $n-1$, parcourt l'ensemble des racines n-ièmes de 1. On peut donc énoncer : *si on connaît une racine* n-ième, *d'ailleurs quelconque,* z_1, *du nombre complexe* Z, *on les obtient toutes en multipliant* z_1 *successivement par les* n *racines* n-ièmes *de* 1.

b) Si le nombre Z se présente par exemple, sous la forme $\frac{AB}{C}$ et si on connaît une racine n-ième de chacun des nombres A, B, C (soient a, b, c respectivement) le nombre $\frac{ab}{c}$ est lui-même une racine n-ièmes de Z, car

$$\frac{a^n b^n}{c^n} = \left(\frac{ab}{c}\right)^n = \frac{AB}{C} = Z.$$

L'application simultanée de ces deux résultats permet, dans certains cas, d'obtenir rapidement les racines n-ièmes d'un nombre donné.

Soit par exemple à chercher les racines cubiques de -8; on en connaît une, qui est -2; les deux autres sont $-2j$ et $-2j^2$. De même, les racines cubiques de $\frac{-2i}{27}$ sont

$$\frac{i\sqrt[3]{2}}{3}, \quad \frac{ij\sqrt[3]{2}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{ij^2\sqrt[3]{2}}{3}.$$

(On remarque que $i^3 = -i$).

IV. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES

82. ***Produit d'un vecteur par un nombre complexe.*** — Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs libres d'un plan orienté P, et C le corps des nombres complexes.

1° **Définition.** — La multiplication d'un vecteur $\vec{V}$ de $\mathcal{V}$ par un élément z de C est une opération externe dans l'ensemble $\mathcal{V}$ qui, au couple $(\vec{V}, z)$ associe le vecteur $\vec{V'}$ de $\mathcal{V}$, noté $z\vec{V}$ (ou, aussi bien $\vec{V}z$) déterminé par les égalités suivantes

$$\vec{V'} = z\vec{V} \iff \begin{cases} |\vec{V'}| = |z|\,|\vec{V}| \\ (\vec{V}, \vec{V'}) = \arg z. \end{cases}$$

Cette définition est compatible, pour z réel, avec celle qui a été donnée plus haut (72, 2°).

On obtient un représentant de $\vec{V'}$ en transformant un représentant de $\vec{V}$ par une similitude plane directe, de centre arbitraire, de rapport $|z|$ et d'angle $\arg z$. Par exemple, *le vecteur* $i\vec{V}$ *est un vecteur libre directement perpendiculaire à* $\vec{V}$.

La définition précédente s'étend aux vecteurs du plan P, de même origine; par exemple le vecteur $z\overrightarrow{OA}$ est le vecteur $\overrightarrow{OA'}$, A′ étant le point transformé de A par la similitude directe de centre O, de rapport $|z|$, d'angle $\arg z$.

2° **Rapport de deux vecteurs d'un même plan.** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ deux vecteurs d'un même plan orienté, $\vec{V} \neq \vec{0}$; il existe un et un seul nombre complexe z tel qu'on puisse écrire $\vec{V'} = z\vec{V}$; z est appelé le rapport (complexe) du vecteur $\vec{V'}$ au vecteur $\vec{V}$(1).**

(1) On pourrait représenter ce nombre par la notation $\frac{\vec{V'}}{\vec{V}}$; mais le rapport de $\vec{V'}$ à $\vec{V}$, éléments de l'espace E_2 des vecteurs libres du plan P, n'est plus un élément de E_2 et les règles habituelles de calcul sur les rapports ne s'appliqueraient pas ici.

En effet, le nombre z, s'il existe, est nécessairement déterminé par les égalités :

$$|z| = \frac{|\vec{V'}|}{|\vec{V}|} \qquad \left(|\vec{V}| \neq 0\right) \qquad \text{et} \qquad \arg z = \left(\vec{V}, \vec{V'}\right), \tag{1}$$

ce qui démontre son unicité; réciproquement, le nombre z déterminé par les égalités (1) est tel que $\vec{V'} = z\vec{V}$.

Par exemple, dans le plan complexe, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires de Ox et Oy, et soit z l'affixe du vecteur $\vec{V}$, ou du point M; on pourra écrire :

$$\vec{V} = z\vec{u}, \qquad \overrightarrow{OM} = z\vec{u} \quad \text{et, en particulier} \quad \vec{v} = i\vec{u}.$$

Si $\vec{V'} \neq \vec{0}$, le rapport z' du vecteur $\vec{V}$ au vecteur $\vec{V'}$ est déterminé par

$$|z'| = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V'}|} = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg z' = \left(\vec{V'}, \vec{V}\right) = -\arg z;$$

ce n'est autre que $z' = \frac{1}{z}$. De sorte que :

$$\vec{V'} \neq \vec{0}, \qquad \vec{V'} = z\vec{V} \quad \Longrightarrow \quad \vec{V} = \frac{1}{z}\vec{V'}.$$

3° **Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre complexe.**

a) $\qquad 0.\vec{V} = \vec{0}, \quad 1\vec{V} = \vec{V}, \quad (-1)\vec{V} = \text{opp}\,\vec{V} = -\vec{V}.$

b) Montrons que (1) $\qquad z'\left(z\vec{V}\right) = (z'z)\vec{V}.$

Si $\vec{V}$ est le vecteur unitaire $\vec{u}$ de l'axe Ox du plan complexe, reportons-nous à la figure 23; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égal à $z\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{OP} = z'\overrightarrow{OM}$ est égal à $z'\left(z\vec{u}\right)$; mais P est l'image du nombre $z'z$ et, par suite, $\overrightarrow{OP} = (z'z)\vec{u}$; il en résulte bien que $z'\left(z\vec{u}\right) = (z'z)\vec{u}$.

Si $\vec{V}$ n'est pas unitaire, il existe un nombre complexe λ tel que $\vec{V} = \lambda\vec{u}$; on peut alors écrire :

$$z'\left(z\vec{V}\right) = z'\left[z\left(\lambda\vec{u}\right)\right] \quad \text{ou} \quad z'\left[(z\lambda)\vec{u}\right] \quad \text{ou aussi} \quad \left[z'(z\lambda)\right]\vec{u}.$$

Mais $z'(z\lambda)$ est aussi $(z'z)\lambda$, et $[(z'z)\lambda]\,\vec{u}$ est $(z'z)\left(\lambda\vec{u}\right)$ ou $(z'z)\vec{V}$. En définitive, la formule (1) est démontrée. Elle permet d'écrire, indifféremment :

$$z'\left(z\vec{V}\right) \quad \text{ou} \quad z\left(z'\vec{V}\right) \quad \text{ou, simplement,} \quad zz'\vec{V}.$$

c) Démontrons

$$(z + z')\vec{V} = z\vec{V} + z'\vec{V}. \tag{2}$$

Si $\vec{V}$ est le vecteur unitaire $\vec{u}$ de l'axe Ox, il suffit de se reporter à la figure 21 sur laquelle : $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}$, $\overrightarrow{OM'} = z'\vec{u}$, et $\overrightarrow{OS} = (z + z')\vec{u} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Si $\vec{V}$ est un vecteur quelconque, $\vec{V} = \lambda\vec{u}$ et

$$(z + z')\vec{V} = (z + z')\left(\lambda\vec{u}\right) \quad \text{ou} \quad [(z + z')\lambda]\vec{u}.$$

Mais $[(z + z')\lambda]\vec{u}$ est $(z\lambda)\vec{u} + (z'\lambda)\vec{u}$, ou, en vertu de la propriété *b*),

$$z(\lambda\vec{u}) + z'(\lambda\vec{u}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad z\vec{V} + z'\vec{V}.$$

d) Montrons maintenant que

$$z\left(\vec{V} + \vec{V'}\right) = z\vec{V} + z\vec{V'}. \tag{3}$$

En effet, soient λ et λ' les affixes des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ dans le plan complexe ; $\vec{V} = \lambda\vec{u}$ et $\vec{V'} = \lambda'\vec{u}$.

Alors, d'après (2) $\quad \vec{V} + \vec{V'} = (\lambda + \lambda')\vec{u}$,

d'après (1) $\quad z\left(\vec{V} + \vec{V'}\right) = [z(\lambda + \lambda')]\vec{u}$,

or ce dernier vecteur est aussi $(z\lambda)\vec{u} + (z\lambda')\vec{u}$ ou $z\left(\lambda\vec{u}\right) + z\left(\lambda'\vec{u}\right)$ c'est-à-dire $z\vec{V} + z\vec{V'}$.

4° **Problème.** — Connaissant les affixes z et z' de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ du plan complexe, déterminer le rapport du vecteur $\vec{V'}$ au vecteur $\vec{V}$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de Ox; $\vec{V'} = z'\vec{u}$, or :

$$\vec{V} = z\vec{u} \quad \text{et} \quad z \neq 0 \implies \vec{u} = \frac{1}{z}\vec{V} \quad (2°).$$

On a donc : $\quad \vec{V'} = z'\left(\frac{1}{z}\right)\vec{V} = \left(z'\frac{1}{z}\right)\vec{V} = \frac{z'}{z}\vec{V}$,

ce qui montre que le rapport de $\vec{V'}$ à $\vec{V}$ est $\frac{z'}{z}$.

Le rapport de deux vecteurs du plan complexe est égal au rapport de leurs affixes respectives.

APPLICATION I. — Dans un plan orienté, rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) une similitude directe Σ, de centre O, de rapport $k > 0$, d'angle α, transforme le point $M(x, y)$ en le point $M'(x', y')$; calculons x' et y' en fonction de x et de y.

Posons $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, et écrivons l'équivalence :

$$\left.\begin{array}{c} OM' = k\,OM \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} \text{Le rapport du vecteur} \\ \vec{OM'} \text{ au vecteur } \vec{OM} \text{ est} \\ k(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{array}\right\} \iff z' = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)z.$$

L'égalité entre nombres complexes

$$x' + iy' = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy)$$

équivaut aux deux égalités suivantes entre nombre réels

$$x' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$$
$$y' = k(x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

qui sont les formules demandées. Elles sont valables en particulier si Σ est une rotation ($k = 1$).

APPLICATION II. — Dans le plan complexe, deux triangles ABC et A'B'C' sont déterminés par les affixes a, b, c, a', b', c' de leurs sommets. *Quelle relation nécessaire et suffisante doit-on établir entre ces nombres pour que les deux triangles soient directement semblables?*

Des conditions de similitude directe des deux triangles ABC, A'B'C' sont

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

Elles exprlment que le rapport du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ d'affixe $(b' - a')$, au vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ d'affixe $c' - a'$, et que le rapport du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$ ont même module et même argument; ces rapports sont donc égaux, d'où la condition cherchée

$$\frac{b' - a'}{c' - a'} = \frac{b - a}{c - a}. \tag{4}$$

Le lecteur familiarisé avec la théorie des déterminants (chapitre XIV) montrera que cette conditlon peut s'écrire aussl

$$\begin{vmatrix} b - a & c - a \\ b' - a' & c' - a' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

En particulier, cherchons à quelle condition le triangle ABC est équilatéral. Nous connaissons un trlangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ (fig. 26) dont les sommets sont les images des racines cublques 1, ω, ω' de 1. Pour que le trlangle ABC soit équilatéral, il faut et il suffit qu'll solt directement semblable au trlangle $\alpha\beta\gamma$ ou au triangle $\alpha\gamma\beta$, suivant que les sens de circulation ABCA et $\alpha\beta\gamma\alpha$ sont, ou non, les mêmes. Dans le premier cas, la condition de simillitude s'écrit

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \omega & \omega' & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En tenant compte de $\omega' = \omega^2$, $\omega + \omega' = -1$, $\omega^3 = 1$, on verra que cette condition s'écrlt

$$a + b\omega + c\omega' = 0 \quad \text{ou} \quad a\omega + b\omega' + c = 0 \quad \text{ou} \quad a\omega' + b + c\omega = 0. \tag{6}$$

Dans le second cas, elle s'exprimeralt par les relations obtenues en transposant ω et ω'. En désignant par j l'un quelconques des nombres ω, ω', l'autre étant alors j^2 (n° 81, 2°), une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit équilatéral s'écrit $a + bj + cj^2 = 0$.

5° Point qui partage un segment dans un rapport complexe donné. — THÉORÈME. — Étant donnés deux points A et B d'un plan orienté P et un nombre complexe $k \neq 1$, il existe dans P un point M et un seul tel que le rapport du vecteur $\overrightarrow{MA}$ au vecteur $\overrightarrow{MB}$ soit égal à k. On dit que M partage le segment AB dans le rapport (complexe) k.

Cette notion qui généralise celle qui a été étudiée dans les éléments (1), peut se démontrer en remarquant que

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \iff \begin{cases} \dfrac{MA}{MB} = |k| \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \arg k. \end{cases}$$

M est donc le centre de la similitude directe de rapport $|k|$, d'angle $\arg k$, transformant A en B; ce point existe et est unique pourvu que $k \neq 1$.

On peut aussi établir algébriquement l'existence de M; en désignant par a, b, z les affixes des points A, B, M dans le plan complexe, l'équivalence

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \iff \frac{a-z}{b-z} = k$$

entraîne, si $k \neq 1$

$$z = \frac{a - kb}{1 - k},$$

formule qui généralise les résultats du n° 70, 1°.

En particulier, pour $k = -1$, M est le milieu de AB; ce point a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$.

83. *Division harmonique dans le plan. Quadrangle harmonique.* — On peut définir une division harmonique dans un plan orienté P comme on le fait sur une droite, dans les éléments.

1° Définition. — Soient A, A', B trois points d'un plan orienté P. Si B n'est pas le milieu de AA', le rapport k du vecteur $\overrightarrow{BA}$ au vecteur $\overrightarrow{BA'}$ est différent de -1; son opposé $k' = -k$ est donc différent de 1 et il existe un point B' tel que le rapport du vecteur $\overrightarrow{B'A}$ au vecteur $\overrightarrow{B'A'}$ soit $-k$. On dit que B' est *conjugué harmonique* de B par rapport à A et A'.

Si a, a', b, b' sont les affixes des points A, A', B, B' dans le plan complexe on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{c}\text{le rapport de } \overrightarrow{B'A} \text{ à } \overrightarrow{B'A'} \\ \text{est l'opposé du} \\ \text{rapport de } \overrightarrow{BA} \text{ à } \overrightarrow{BA'}\end{array}\right\} \iff \begin{cases} \dfrac{a-b'}{a'-b'} = -\dfrac{a-b}{a'-b}. \end{cases}$$

Cette dernière relation se met sous la forme

$$2(aa' + bb') = (a + a')(b + b'). \qquad (1)$$

Elle est symétrique par rapport à b et b' : B est donc aussi conjugué de B' par rapport à A et A' et on pourra dire que le couple (B, B') est conjugué par rapport au couple (A, A'). La relation (1) ne change pas si on y transpose

les couples (a, a') et (b, b'); le couple (A, A') est donc conjugué par rapport au couple (B, B'). Finalement, on dira que les couples (A, A') et (B, B') sont conjugués, ou que (A, A'; B, B') est une division harmonique dans le plan, ou enfin que A, A', B, B' sont les sommets d'un *quadrangle harmonique* (fig. 27); A et A' sont dits *opposés*, ainsi que B et B'; les segments AA' et BB' sont les *diagonales* du quadrangle.

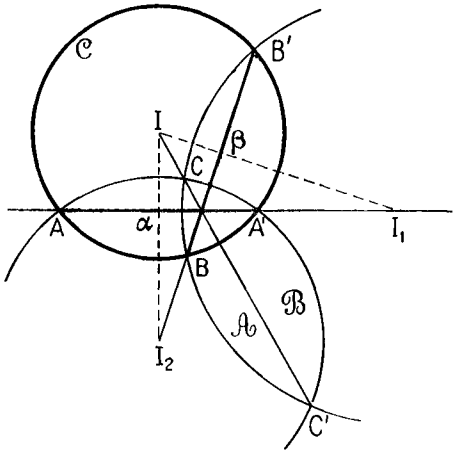


Fig. 27.

2° Quelques propriétés caractéristiques du quadrangle harmonique. — *a*) Le rapport de $\overrightarrow{BA}$ à $\overrightarrow{BA'}$ et le rapport de $\overrightarrow{B'A}$ à $\overrightarrow{B'A'}$ sont opposés; ils ont donc même module :

$$\frac{BA}{BA'} = \frac{B'A}{B'A'}, \qquad (2)$$

et leurs arguments diffèrent de π :

$$\left(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'A}\right) = \left(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}\right) + \pi \quad [2\pi] \quad (3)$$

(2) exprime que B et B' appartiennent à un même cercle $\mathcal{A}$ du faisceau $\mathcal{F}$ dont les points limites sont A et A'; par réciprocité des couples (A, A') et (B, B'), A et A' appartiennent à un même cercle $\mathcal{B}$ du faisceau dont les points limites sont B et B'.

(3) exprime que B et B' appartiennent à deux arcs AA' distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ du faisceau Φ dont les points de base sont A et A'. $\mathcal{C}$ peut dégénérer en la droite AA'; on retrouve la division harmonique sur une droite.

Énonçons : *un quadrangle harmonique est inscriptible; deux sommets opposés appartiennent à un cercle du faisceau dont les points limites sont les deux autres sommets.*

Réciproquement : Deux cercles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$, appartenant aux faisceaux $\mathcal{F}$ et Φ respectivement ont deux points communs B et B' qui satisfont aux conditions (2) et (3); la quadrangle (A, A'; B, B') est donc harmonique.

Ainsi, les cercles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont deux points communs C et C' : les quadrangles (A, A'; C, C') et (B, B'; C, C') sont harmoniques.

b) Rapportons la figure à deux axes rectangulaires αx et αy portés par AA' et par sa médiatrice. Soient $a, a' = -a, b, b'$ les affixes des quatre points. La relation (1) prend alors la forme de Newton

$$bb' = a^2 \quad (a^2 \text{ réel positif})$$

qui entraîne :

$$|bb'| = |b|\,|b'| = a^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha B \cdot \alpha B' = \alpha A^2 = \alpha A'^2$$

$$\arg bb' = \arg b + \arg b' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(\overrightarrow{\alpha x}, \overrightarrow{\alpha B'}\right) = -\left(\overrightarrow{\alpha x}, \overrightarrow{\alpha B}\right).$$

Il en résulte que la diagonale AA′ est bissectrice de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\alpha B}$ et $\overrightarrow{\alpha B'}$ et que $\alpha B . \alpha B' = \alpha A^2$ (fig. 28).

B_1 étant le symétrique de B pour AA′, α, B, B_1 sont alignés et $\overline{\alpha B} . \overline{\alpha B_1} = \alpha A^2$.

Il en résulte que B′ est le transformé de B dans la transformation réciproque T, produit commutatif de l'inversion $\mathfrak{I}(\alpha, \alpha A^2)$ et de la symétrie $\mathfrak{S}(AA')$. Inversement, T transforme tout point M en un point M′ tel que le quadrangle (A, A′; M, M′) soit harmonique.

D'autres propriétés du quadrangle harmonique seront signalées au Tome III (Géométrie analytique).

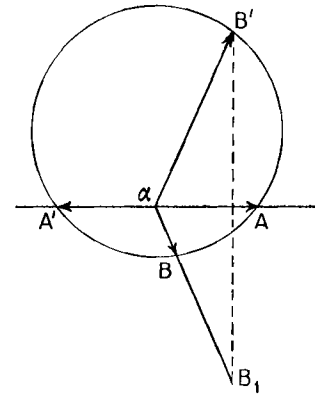


FIG. 28.

84. *Application des nombres complexes à l'étude de certaines transformations.* — A toute application f telle que $z \longrightarrow z' = f(z)$ de l'ensemble C des nombres complexes dans lui-même correspond, dans le plan complexe, une transformation ponctuelle T qui, au point image M de z associe le point image M′ de $z' = f(z)$. Réciproquement, à toute transformation ponctuelle du plan complexe correspond une application de l'ensemble C dans lui-même. C'est, à une exception près (inversion) au premier point de vue que nous nous placerons dans la suite, en examinant quelques formes particulièrement simples de la fonction f.

1° Transformation associée à la fonction

$$z' = az + b. \qquad (1)$$

Le point de départ de notre étude sera la recherche d'un point double Ω, d'affixe ω, pour la transformation T déterminée par la relation (1). Si ω existe, c'est une racine de l'équation

$$\omega = a\omega + b \quad \text{ou} \quad \omega(a - 1) = b, \qquad (2)$$

et réciproquement.

a) Si $a \neq 1$, T a un et un seul point double Ω et, en retranchant membre à membre, les égalités (1) et (2), on obtient

$$z' - \omega = a(z - \omega), \qquad (3)$$

ce qui exprime que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M},$$

M étant un point quelconque et M′ son transformé par T. T est donc la similitude plane directe de centre Ω, de rapport $|a|$, d'angle $\arg a$.

Réciproquement, la similitude $\Sigma(\Omega, k, \alpha)$ transforme M(z) en M′(z') tels que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)\overrightarrow{\Omega M}$, ou, en posant $k(\cos\alpha + i\sin\alpha) = a \neq 1$,

$z' - \omega = a(z - \omega)$, relation de la forme (1).

Les similitudes planes directes du plan complexe sont associées aux fonctions $z' = az + b$ avec $a \neq 1$.

b) $a = 1$; si $b \neq 0$, T n'a pas de point double; la relation (1) s'écrit alors $z' - z = b$; elle exprime que $\overrightarrow{MM'} = \vec{B}$, $\vec{B}$ étant le vecteur libre d'affixe b. T est la translation $\mathfrak{T}(\vec{B})$. Réciproquement, les translations dans le plan complexe sont associées aux fonctions $z' = z + b$.

c) Si $a = 1$, $b = 0$, tout point est double. T est la transformation identique.

2° Transformation associée à la fonction $z' = \frac{a^2}{z}$ (a complexe). (1)

La relation (1), qui s'écrit $zz' = a^2$, définit une transformation T qui a deux points doubles A et A', d'affixes a et $-a$. La relation $zz' = a^2$ exprime qu'un point M et son transformé M' par T sont conjugués harmoniques, dans le plan, par rapport à A et A'. T est donc (**83**, 2° *b*) le produit commutatif de l'inversion $\mathfrak{I}(O, OA^2)$ et de la symétrie-droite $\mathfrak{S}(AA')$ (fig. 29).

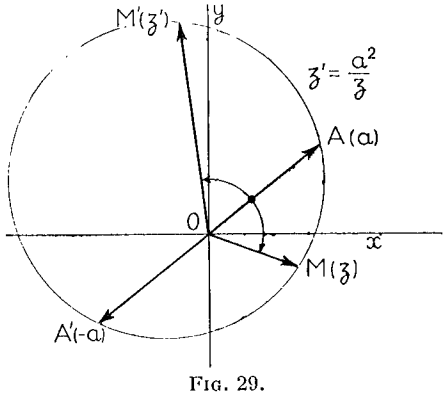


FIG. 29.

3° Inversion de centre O. — L'inversion $\mathfrak{I}(O, \mu)$ transforme M(z) en M'(z'). Cherchons la fonction associée à cette transformation.

Si μ est positif et égal à a^2, marquons sur Ox les points A et A' d'abscisses $+a$ et $-a$. On passe de $\bar{M}(\bar{z})$ à M' par le produit des transformations $\mathfrak{I}(Ox)$ (qui transforme $\bar{M}$ en M) et $\mathfrak{I}(O, \mu)$ (fig. 30); $\bar{M}$ et M' sont donc conjugués harmoniques par rapport à A et A'. Par suite

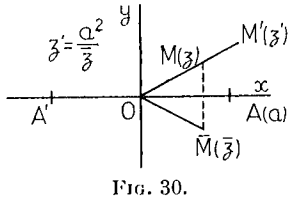


FIG. 30.

$$z' \cdot \bar{z} = a^2 \qquad \text{d'où} \qquad z' = \frac{\mu}{\bar{z}}.$$

Si μ est négatif, et égal à $-a^2$, on appellera cette fois A et A' les points d'affixes ai et $-ai$; (A, A'; $\bar{M}$, M') est encore un quadrangle harmonique (fig. 31) et on a encore

$$z'\bar{z} = (ia)^2 = -a^2 = \mu.$$

Dans les deux cas, à l'inversion $\mathfrak{I}(O, \mu)$ est associée la fonction $z' = \frac{\mu}{\bar{z}}$.

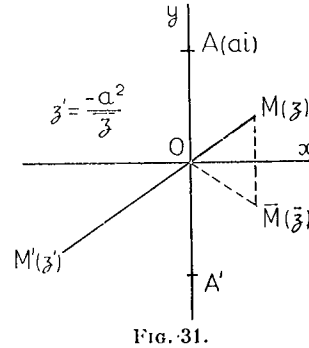


FIG. 31.

Application. — On peut aisément trouver les coordonnées cartésiennes (x', y') de M′ en fonction de celles (x, y) de M en écrivant :

$$x' + iy' = \frac{\mu}{x - iy} = \frac{\mu(x + iy)}{x^2 + y^2}, \quad \text{d'où}$$

$$x' = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \qquad y' = \frac{\mu y}{x^2 + y^2}.$$

4° Indications sommaires sur la transformation associée à la fonction

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0). \tag{1}$$

Si $c \neq 0$, on sait qu'on peut mettre (1) sous la forme

$$z' = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma}.$$

La transformation T associée à la fonction (1) est le produit des transformations associées aux fonctions suivantes :

$z_1 = z + \gamma$: translation (1°)

$z_2 = \frac{\beta}{z_1}$: produit d'une inversion et d'une symétrie droite (2°)

$z = \alpha + z_2$: translation.

Il en résulte que T transforme toute ligne droite ou tout cercle en une droite ou un cercle.

V. COMPLÉMENTS DE CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

Nous allons compléter les éléments de calcul trigonométrique déjà acquis par le lecteur. Cette étude trouve sa place ici du fait que la théorie des nombres complexes y joue un rôle important.

85. ***Addition des arcs.*** — Le problème de l'addition des arcs se pose ainsi : *connaissant les rapports trigonométriques de n arcs, trouver ceux de la somme de ces arcs.* Pour deux arcs, le problème est résolu dans les éléments; on pourrait en déduire, de proche en proche des formules valables pour n quelconque. Mais les calculs deviennent rapidement pénibles. On procède comme il suit.

Considérons l'expression

$$P = (\cos a_1 + i \sin a_1)(\cos a_2 + i \sin a_2) \ldots (\cos a_n + i \sin a_n).$$

P est le produit de n nombres de module 1, d'arguments $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il est donc égal à

$$\cos(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + i \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Or le produit P s'écrit aussi :

$$P = \cos a_1 . \cos a_2 \ldots \cos a_n \,(1 + i \operatorname{tg} a_1)\,(1 + i \operatorname{tg} a_2) \ldots (1 + i \operatorname{tg} a_n).$$

Ordonnons en i le produit $\prod_{k=1}^{n} (1 + i \operatorname{tg} a_k)$; les termes en i^p s'obtiennent en prenant, de toutes les manières possibles et dans un ordre arbitraire, p tangentes dans p parenthèses, et 1 dans les $n - p$ autres. Le coefficient de i^p est donc la somme des produits de ces n tangentes *combinées p à p* de toutes les manières possibles; nous représenterons ce produit par Σ_p; le produit souligné s'écrit donc

$$1 + i\,\Sigma_1 + i^2\,\Sigma_2 + i^3\,\Sigma_3 + \ldots \quad \text{ou}$$
$$1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \Sigma_6 + \ldots + i\,(\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \Sigma_7 + \ldots).$$

On a mis P de deux manières sous la forme $A + Bi$:

$$P = \cos(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + i \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$
$$= \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n\,[(1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \ldots) + i(\Sigma_1 - \Sigma_3 + \ldots)].$$

On en déduit :

$$\cos(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n (1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \Sigma_6 + \ldots)$$
$$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n (\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \Sigma_7 + \ldots)$$

$$\operatorname{tg}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \ldots}{1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \ldots}$$

Ces formules résolvent, dans le cas général, le problème proposé.

86. ***Multiplication des arcs.*** — Le problème de la multiplication des arcs se pose ainsi : *connaissant les rapports trigonométriques de l'arc a, trouver ceux de l'arc na.* Pour $n = 2$ ou $n = 3$ il est résolu dans les éléments. Il est utile pour la suite, de savoir les formules

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a;\ \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a;\ \operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}.$$

Le cas de n quelconque pourrait se traiter en remplaçant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par a dans les formules du n° 85. Il est plus avantageux de procéder directement, par application de la formule de Moivre :

$$\cos na + i \sin na = (\cos a + i \sin a)^n,$$

dont nous développerons le second membre par la formule du binôme. Posons, pour abréger les écritures, $\cos a = c$ et $\sin a = s$.

$$\cos na + i \sin na = (c + is)^n$$

ou :
$$c^n + C_n^1 c^{n-1} is + C_n^2 c^{n-2} i^2 s^2 + C_n^3 c^{n-3} i^3 s^3 + \ldots$$

ou :
$$c^n - C_n^2 c^{n-2} s^2 + C_n^4 c^{n-4} s^4 - \ldots$$
$$+ i\,(C_n^1 c^{n-1} s - C_n^3 c^{n-3} s^3 + C_n^5 c^{n-5} s^5 + \ldots)$$

On en déduit :

$$\cos na = c^n - C_n^2 c^{n-2}s^2 + C_n^4 c^{n-4}s^4 + \ldots + (-1)^p C_n^{2p} c^{n-2p}s^{2p} + \ldots \quad (1)$$

$$\sin na = C_n^1 c^{n-1}s - C_n^3 c^{n-3}s^3 + \ldots + (-1)^p C_n^{2p+1} c^{n-2p-1}s^{2p+1} + \ldots \quad (2)$$

On en déduit tg na en fonction *rationnelle* de tg $a = t$ par division membre à membre de (2) et de (1) après avoir mis c^n en facteur dans les deux membres :

$$\operatorname{tg} na = \frac{C_n^1 t - C_n^3 t^3 + C_n^5 t^5 - \ldots}{1 - C_n^2 t^2 + C_n^4 t^4 - C_n^6 t^6 + \ldots}.$$

Les seconds membres des formules (1) et (2) sont des polynômes en c et s; si on y remplace s^{2k} par $(1 - c^2)^k$, on voit que :

cos na est un polynôme par rapport à $c = \cos a$

sin na est le produit de sin a par un polynôme en c.

De plus, si n est impair, $\sin na$ est un polynôme en $\sin a = s$ [toutes les puissances de c sont paires et on peut remplacer c^{2k} par $(1 - s^2)^k$].

87. *Transformation des produits en sommes.* — **1° Un produit d'un nombre quelconque n de cosinus et de sinus peut toujours être transformé en une somme de cosinus et de sinus.**

Le cas de $n = 2$ est traité dans les éléments.

Supposons la propriété vraie pour $n = p$, et démontrons qu'elle est encore vraie pour $n = p + 1$. Soit P un produit de $p + 1$ cosinus ou sinus; on peut écrire $P = Q\alpha$, Q étant un produit de p facteurs, α un sinus ou un cosinus; par hypothèse, Q peut être mis sous la forme d'une somme de sinus ou cosinus : $Q = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$; et on peut transformer en sommes les produits $\alpha_1\alpha$, $\alpha_2\alpha$, ..., $\alpha_k\alpha$.

2° En particulier, $\cos^n a$ et $\sin^n a$ peuvent s'exprimer sous forme de combinaisons linéaires de cosinus et de sinus. Rappelons

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a \quad \text{et} \quad \sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin 3a.$$

Pour $n = 4$, on écrit

$$\cos^4 a = \frac{(1 + \cos 2a)^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{4}\cos^2 2a,$$

et, en remplaçant $2\cos^2 2a$ par $1 + \cos 4a$, on obtient :

$$\cos^4 a = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a.$$

De même :

$$\sin^4 a = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a.$$

Pour $n > 4$, les calculs deviennent pénibles et on a intérêt à procéder comme suit; posons

$$\cos a + i \sin a = \lambda \text{ (1)} \quad (1) \qquad \text{d'où} \qquad \cos a - i \sin a = \frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}. \quad (2)$$

On en déduit :

$$2 \cos a = \lambda + \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad 2 i \sin a = \lambda - \frac{1}{\lambda},$$

puis, par élévation des deux membres à la puissance n :

$$2^n \cos^n a = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^n \quad (3) \qquad \text{et} \qquad 2^n i^n \sin^n a = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^n \quad (4)$$

Développons $\left(\lambda \pm \frac{1}{\lambda}\right)^n$ par la formule du binôme, en observant que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux, ce qui nous engage à associer ces termes.

a) *Développement de la formule* (3)

$$2^n \cos^n a = \left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n}\right) + C_n^1 \left(\lambda^{n-2} + \frac{1}{\lambda^{n-2}}\right) + C_n^2 \left(\lambda^{n-4} + \frac{1}{\lambda^{n-4}}\right) + \ldots.$$

Mais, d'après (1) et (2) :

$$\lambda^p = \cos pa + i \sin pa \quad (5) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lambda^p} = \cos pa - i \sin pa \qquad (6)$$

Par suite :

$$\lambda^p + \frac{1}{\lambda^p} = 2 \cos pa.$$

Il en résulte que, en distinguant deux cas suivant la parité de n :

$$\cos^{2p} a = \frac{1}{2^{2p-1}} [\cos 2pa + C_{2p}^1 \cos(2p-2)a + \ldots + C_{2p}^{p-1} \cos 2a] + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$$

$$\cos^{2p+1} a = \frac{1}{2^{2p}} [\cos(2p+1)a + C_{2p+1}^1 \cos(2p-1)a + \ldots + C_{2p+1}^p \cos a]$$

b) *Développement de la formule* (4). — Si n est pair, soit $n = 2p$, deux termes équidistants des extrêmes dans le développement de $\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^{2p}$ sont précédés du même signe; on obtiendra

$$\sin^{2p} a = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} [\cos 2pa - C_{2p}^1 \cos(2p-2)a + \ldots + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} \cos 2a] + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$$

Si n est impair, soit $n = 2p + 1$, on écrira

$$2^{2p+1} i^{2p+1} \sin^{2p+1} a = \left(\lambda^{2p+1} - \frac{1}{\lambda^{2p+1}}\right) - C_{2p+1}^1 \left(\lambda^{2p-1} - \frac{1}{\lambda^{2p-1}}\right) + \ldots$$

---

(1) Le lecteur familiarisé avec la fonction exponentielle d'une variable complexe (Tome II, n° 224) reconnaîtra que $\lambda = e^{ia}$.

Or $\lambda^k - \frac{1}{\lambda^k} = 2\,i \sin ka$, par suite

$$\sin^{2p+1} a = \frac{(-1)^p}{2_{a\,2}}[\sin(2p+1)a - C^1_{2p+1}\sin(2p-1)a + \ldots + (-1)^p C^p_{2p+1}\sin a]$$

3° Des propriétés établies au 1° et au 2°, il résulte que tout produit dont les facteurs sont des puissances entières et positives de sinus et de cosinus (monôme trigonométrique) peut être mis sous la forme d'une somme de sinus et de cosinus : ce faisant, on dit qu'on a *abaissé* le monôme trigonométrique. On peut, de même, *abaisser* tout polynôme trigonométrique, somme de monômes trigonométriques.

EXEMPLE. — Abaissons le monôme $m = \cos^2 a \sin^3 b$.

On écrira : $$m = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).\frac{1}{4}(3\sin b - \sin 3b)$$

ou $$8m = 3\sin b + 3\sin b \cos 2a - \sin 3b - \cos 2a \sin 3b.$$

En transformant les produits en sommes, on obtient finalement :

$$\cos^2 a \sin^3 b = \frac{3}{8}\sin b - \frac{1}{8}\sin 3b + \frac{3}{16}[\sin(b + 2a) + \sin(b - 2a)] - \frac{1}{16}[\sin(3b + 2a) + \sin(3b - 2a)].$$

88. *Formules sommatoires.* — La théorie des nombres complexes permet d'établir facilement des formules sommatoires pour des sommes de cosinus ou de sinus. Considérons par exemple les sommes :

$$S = \cos a + \cos(a + h) + \cos(a + 2h) + \ldots + \cos(a + \overline{n-1}\,h)$$
$$S' = \sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h) + \ldots + \sin(a + \overline{n-1}\,h)$$

dont les termes sont les cosinus et les sinus d'arcs en progression arithmétique. Formons

$$S + iS' = \sum_{p=0}^{p=n-1}[\cos(a + ph) + i\sin(a + ph)],$$

en remarquant que

$$\cos(a + ph) + i\sin(a + ph) = (\cos a + i\sin a)(\cos ph + i\sin ph)$$

ou $$(\cos a + i\sin a)(\cos h + i\sin h)^p.$$

Pour abréger les écritures, posons :

$$\cos a + i\sin a = A \quad \text{et} \quad \cos h + i\sin h = H.$$

Alors

(1) $$S + iS' = A + AH + AH^2 + \ldots + AH^{n-1} = A\frac{1 - H^n}{1 - H}.$$

Remarquons que

$$1 - H^n = 1 - \cos nh - i\sin nh \quad \text{et} \quad 1 - H = 1 - \cos h - i\sin h$$

sont de la forme :

$$\lambda = 1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2\,i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

ou $$\lambda = -2\,i\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

La formule (1) s'écrit donc :

$$S + iS' = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \frac{\left(\cos\frac{nh}{2} + i\sin\frac{nh}{2}\right)(\cos a + i\sin a)}{\cos\frac{h}{2} + i\sin\frac{h}{2}}.$$

Le second rapport, qui fait intervenir trois nombres complexes de module 1, d'arguments $\frac{nh}{2}$, a, $\frac{h}{2}$, se met sous la forme

$$\cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right) + i\sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right);$$

et l'égalité entre nombres complexes

$$S + iS' = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right) + i\sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)\right]$$

équivaut aux deux égalités suivantes entre nombres réels :

$$S = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right), \qquad S' = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right).$$

Ce sont les formules sommatoires cherchées. D'autres sont proposées en exercices.

EXERCICES

1. — Trouver le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$1 + \varepsilon\cos\alpha + \varepsilon' i\sin\alpha, \quad 1 + \varepsilon\sin\alpha + \varepsilon' i\cos\alpha, \quad \frac{1 + \varepsilon\cos\alpha + \varepsilon' i\sin\alpha}{1 + \varepsilon\cos\beta + \varepsilon' i\sin\beta},$$

ε et ε' pouvant prendre, indépendamment les valeurs + 1 ou — 1.

2. — Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$z = \frac{a+b}{1+ab}$, sachant que $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$.

3. — Soit a un nombre réel Calculer le module du nombre

$$(1) \qquad z = \frac{1 + ia}{1 - ia}.$$

Démontrer que, réciproquement, tout nombre complexe de module 1 peut se mettre, d'une seule manière, sous la forme (1), dans laquelle a désigne un nombre réel dont le signe est fixé à l'avance.

4. — On désigne par u l'une des racines carrées du nombre zz'. Démontrer l'égalité

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$$

Interpréter géométriquement cette formule.

5. — Comment doit-on choisir les nombres complexes α et β pour que les trois nombres

$$x = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}, \quad y = i\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}; \quad z = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$$

soient, simultanément, réels?

6. — Déterminer deux nombres complexes z et z' tels que

$$\left|\frac{z+z'}{2}\right| = \sqrt{|zz'|}$$

7. — Déterminer trois nombres complexes x, y, z de module 1 tels que

$$x+y+z=1 \quad \text{et} \quad xyz=1.$$

8. — Déterminer par voie algébrique ou trigonométrique selon le cas, les racines carrées des nombres :

$$1 \pm i, \quad 1 \pm i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad 1+\cos\alpha \pm i \sin\alpha, \quad 1 \pm j$$
$$45-28i, \quad 5 \pm 12i, \quad -55 \pm 48i, \quad 2ab \pm i\,(a^2-b^2).$$

9. — Calculer les racines cubiques des nombres suivants :

$$1 \pm i, \quad 1 \pm j, \quad \frac{2i+\sqrt{3}}{2i-\sqrt{3}}, \quad 2+11i, \quad -46+9i.$$

10. — Résoudre les équations suivantes :

$$9z^2-3(3-i)z+4-3i=0; \qquad 6z^2-(5+i)z+3+i=0$$
$$z^2-(a+b)z+a^2-ab+b^2=0; \qquad z^2-2z\cos\alpha+1=0$$
$$z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0; \qquad z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1=0.$$

11. — On donne l'équation $z^2-2pz+1=0$ dans laquelle $p=\sin\varphi+i\cos\varphi$, φ étant donné. Calculer les racines z' et z'' de cette équation; comparer leurs modules et leurs arguments. Calculer le module et l'argument de chacune des différences $z'-p$ et $z''-p$. En supposant φ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ montrer que $z'+i$ et $z''+i$ ont le même module et que $z'-i$ et $z''-i$ ont le même argument. Suivre le déplacement des images de z' et de z'' quand φ varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. Examiner le cas où φ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

12. — Comment choisir les nombres réels a, b, c, d pour que les deux racines de l'équation

$$z^2+(a+bi)z+c+di=0$$

aient le même argument?

13. — On donne l'équation

$$z^2-2(\alpha+i\beta)z-2-2i=0.$$

Trouver le lieu de l'image A du nombre complexe $\alpha+i\beta$ lorsque les images M_1 et M_2 des racines satisfont à l'une des conditions :

a) la droite M_1M_2 a pour pente 1.

b) l'angle M_1OM_2 est droit.

14. — Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^p=\bar{z}$, p étant un entier naturel (on examinera d'abord les cas $p=2, 3, 4$).

15. — Rechercher, dans le corps des complexes, les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^p=y \\ y^p=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^p=\bar{y} \\ y^p=\bar{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^p=y \\ y^p=z \\ z^p=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^p=\bar{y} \\ y^p=\bar{z} \\ z^p=x \end{cases}$$

p est un entier naturel; on pourra d'abord examiner les cas où $p=2$, 3 ou 4.

16. — Comment faut-il choisir une racine x_0 de l'équation $x^n-1=0$ pour que les racines de cette équation soient $x_0, x_0^2, \ldots, x_0^n$? Dans quels cas toute racine de cette équation (différente de 1) possède-t-elle cette propriété?

17. — Démontrer que les images des racines de l'équation

$$(1) \qquad (z-a)^n = k(z-b)^n, \quad (n \text{ entier}, \ n \geqslant 3)$$

sont sur un même cercle ou sur une même droite.

En déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) ait toute ses racines réelles.

18. — Résoudre le système :

$$x^3 - 3xy^2 = a^3 - 3ab^2; \qquad 3x^2y - y^3 = 3a^2b - b^3,$$

a et b étant des nombres complexes donnés.

19. — Mettre chacun des produits

$$P = \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x \cos^4 4x$$

et

$$Q = \sin x \sin^2 2x \sin^3 3x \sin^4 4x$$

sous forme d'une somme de termes de la forme

$$a_p \cos px + b_p \sin px.$$

20. — Trouver des formules sommatoires pour les sommes suivantes :

a) $1 + x\cos t + x^2 \cos 2t + \ldots + x^{n-1}\cos(n-1)t$

$x \sin t + x^2 \sin 2t + \ldots + x^{n-1}\sin(n-1)t$

b) $1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx$

$C_n^1 \sin x - C_n^2 \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n \sin nx.$

c) $$1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \ldots + \frac{\cos^{n-1}\alpha}{\cos(n-1)\alpha}.$$

21. — Soient trois nombres complexes a, b, c tels que

$$|b-c| = |c-a| = |a-b|.$$

Comparer les arguments des nombres $b-c$, $c-a$, $a-b$.

Étudier la réciproque.

22. — a, b, c, d sont des nombres complexes donnés. On considère les nombres :

$$\alpha = \frac{d-a}{b-c} \qquad \beta = \frac{d-b}{c-a} \qquad \gamma = \frac{d-c}{a-b}$$

Démontrer que si deux de ces trois nombres sont complexes purs, il en est de même du troisième.

23. — Quatre nombres complexes a, b, c, d sont liés par les relations :

(1) $a + c = b + d$ et (2) $a + bi = c + di$.

a) Étudier la figure formée par leurs images A, B, C, D.

b) Démontrer l'existence d'un nombre z et d'un seul tel que

(3) $$(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4.$$

c) On considère [(1), (2)] comme un système linéaire aux inconnues a, b, c, d. Démontrer que les solutions de ce système sont données, en fonction de deux paramètres complexes λ et μ, par les formules :

$$a = \lambda + \mu, \quad b = \lambda + i\mu, \quad c = \lambda - \mu, \quad d = \lambda - i\mu.$$

24. — Dans un même plan, on considère un triangle fixe PQR, un point O et un triangle variable ABC. On construit trois points U, V, W tels que les triangles UBC, VCA, WAB soient respectivement semblables aux triangles OQR, ORP, OPQ. Démontrer que le triangle UVW reste directement semblable à un triangle fixe.

25. — Dans le plan complexe on donne les points O (0), A (1), M_1 (z). On peut trouver cinq points M (soit M_2, M_3, M_4, M_5, M_6), autres que M_1, tels que le triangle ayant pour sommets les points O, A et M, pris dans un ordre quelconque, soit directement semblable au triangle OAM_1. Calculer, en fonction de z, les affixes de ces cinq points. Étudier les cas où deux au moins des points M_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sont confondus.

26. — Sur les côtés d'un triangle ABC on construit trois triangles équilatéraux BCA', CAB', ABC', tous trois « extérieurs », ou tous trois « intérieurs », au triangle ABC.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ ont même longueur. Quels sont les angles de ces vecteurs?

b) Démontrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

27. — Soient a, b, c trois nombres complexes, α, β, γ trois nombres réels, et z', z'' les racines de l'équation

$$\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{z-b}+\frac{\gamma}{z-c}=0$$

soient A, B, C, M', M'' les images des nombres a, b, c, z' z'' dans le plan complexe. Démontrer que les couples de droites (AB, AC) et (AM', AM'') sont antiparallèles, et que les points M' et M'' sont foyers d'une conique tangente aux droites BC, CA, AB.

28. — On donne un nombre réel a et on considère la transformation $\mathcal{T}$ du plan complexe qui, au point m d'affixe z associe le point M d'affixe

$$Z=\frac{3z^2-a^2}{2z}.$$

Tout point M est le transformé par $\mathcal{T}$ de deux points m_1 et m_2. Construire m_1 et m_2 connaissant M. Démontrer que m_1 et m_2 sont les foyers de l'ellipse tangente, en leurs milieux, aux côtés du triangle MAA' (A et A' sont les points d'affixes $+a$ et $-a$). Construire M connaissant m.

29. — Soient a et b deux nombres complexes dont les images A et B ne sont pas alignées avec l'origine O. Lorsque t varie, le point M d'affixe $z=a\cos t+b\sin t$ décrit une ligne Γ. Soit M' le point de paramètre $t+\frac{\pi}{2}$. Soient $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ deux vecteurs d'origine M, égaux et perpendiculaires à $\overrightarrow{OM'}$. Quels sont les lieux des points H et H'? Démontrer que ces points restent conjugués harmoniques (dans le plan) avec deux points fixes F et F', et enfin que Γ est l'ellipse de foyers F et F' dont OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués.

30. — Connaissant l'image M du nombre Z dans le plan complexe, construire géométriquement les images des racines carrées de Z.

31. — Déterminer un nombre complexe z tels que, dans le plan complexe, les images des nombres 1, z, z^2, z^3 soient quatre points cocycliques.

32. — Trouver une transformation du plan complexe,

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}.$$

a) qui conserve le cercle $|z|=1$,

b) qui transforme le cercle $|z|=1$ en l'axe $x'Ox$.

33. — Comment doit-on choisir le nombre complexe z de manière que le triangle ayant pour sommets les images des nombres z, z^2, z^3 admette le point O pour centre du cercle inscrit?

34. — a, b, c sont trois nombres complexes fixes; u et v sont deux variables complexes, indépendantes, de même module 1. Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z=au+bv+c$.

Application. — Un triangle PQR reste directement semblable à un triangle donné; ses sommets P et Q décrivent, indépendamment, deux cercles donnés; étudier l'ensemble des positions du point R.

35. — Peut-on déterminer quatre nombre complexes a, b, c, d tels que, quel que soit le nombre complexe z,

$$\frac{az+b}{cz+d}=\bar{z}?$$

CHAPITRE VI

POLYNÔMES

I. FONCTIONS POLYNÔMES

89. ***Rappel de résultats élémentaires.*** — **1° Fonction polynôme dans R.** — En algèbre élémentaire les polynômes sont introduits comme fonctions réelles de la variable réelle. A tout ensemble rangé $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ d'un nombre fini d'éléments du corps R on associe l'application A de R dans R qui, à tout élément x de R, associe un élément bien déterminé de R, noté A (x) et fourni par la suite de multiplications et d'additions suivantes

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

L'application A est dite fonction polynôme; les nombres a_i qui la déterminent sont les coefficients. La définition générale de la somme et du produit de deux applications de R dans R (tome II, n° 40) conduit à définir la somme et le produit de deux fonctions polynômes A et B comme les fonctions polynômes, désignées par A + B et AB, qui à tout élément x de R, associent respectivement les éléments suivants de R :

$$A(x) + B(x) \qquad \text{et} \qquad A(x) \times B(x).$$

Notons qu'une fonction polynôme peut ainsi être considérée comme somme de fonctions monômes.

En utilisant les propriétés de la somme et du produit sur R, à partir de

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_px^p$$

on calcule

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$
$$A(x) \times B(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$$

ce qui fournit les coefficients de A + B et AB à partir de ceux de A et B.

2° Fonction polynôme dans un anneau unitaire. — Dans l'étude précédente on pourrait remplacer l'ensemble R des valeurs prises par x par un corps commutatif K quelconque et même par un anneau commutatif $\mathcal{A}$. Plus généralement considérons un anneau unitaire $\mathcal{A}$ sur lequel est définie une loi externe, application de K $\times$ $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, K étant un corps commutatif.

Soit $K = \{ a, b, \ldots \}$ et $\mathfrak{A} = \{ x, y, \ldots \}$; ax désigne l'élément de $\mathfrak{A}$ obtenu en composant $a \in K$ et $x \in \mathfrak{A}$ par la loi externe. Nous supposerons, en outre que le produit dans l'anneau $\mathfrak{A}$ des éléments ax et by, dans l'ordre indiqué, est égal à $(ab)(xy)$. Nous montrerons qu'il en est ainsi, en particulier, quand $\mathfrak{A}$ est l'anneau des matrices carrées $n \times n$ sur le corps K.

Cela posé, nous pouvons associer à tout ensemble rangé $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ d'un nombre fini d'éléments de K l'application A de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ qui, à tout élément x de $\mathfrak{A}$, associe l'élément déterminé de $\mathfrak{A}$

$$A(x) = a_0 \varepsilon + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

ε désignant l'élément neutre de la multiplication sur $\mathfrak{A}$.

Ce qui a été dit au 1° sur les fonctions polynômes se généralise sans difficulté.

3° **Rôle des coefficients.** — L'étude précédente montre le rôle essentiel joué par les coefficients : la fonction polynôme est déterminée quand on donne l'ensemble rangé de ses coefficients; les opérations sur les fonctions polynômes ne font intervenir que les coefficients, la *variable* x pouvant être considérée comme un symbole d'attente destiné à ramener ces opérations à des opérations familières (addition ou multiplication de sommes algébriques).

Dans l'étude qui va suivre, nous réserverons toute généralisation éventuelle en nous dispensant de faire intervenir cette *variable* dès le début. Nous définirons un polynôme — et non une fonction polynôme — comme un ensemble de coefficients et nous introduirons les opérations sur ces polynômes en n'utilisant que les seuls coefficients (ces opérations seront naturellement définies de façon qu'il soit possible de retrouver facilement le point de vue fonctionnel). La *variable* ne s'introduira qu'à la fin, sous le nom d'*indéterminée*; ce sera un outil commode pour effectuer pratiquement les opérations.

4° **Égalité formelle et égalité numérique.** — Deux fonctions polynômes A et B, applications de R dans R et plus généralement d'un corps K dans lui-même, sont dites formellement égales quand elles ont les mêmes coefficients. Elles sont dites numériquement égales quand $A(x) = B(x)$, $\forall x \in K$, c'est-à-dire quand il s'agit de fonctions égales (II, n° 40).

L'égalité formelle entraîne visiblement l'égalité numérique. Le contre-exemple suivant montre que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Sur l'ensemble K formé de deux éléments notés $\bar{0}$ et $\bar{1}$ (1) définissons deux lois internes en nous donnant les tables suivantes

addition

	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

multiplication

	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

(1) $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont les classes résiduelles modulo 2 (cf n° 39).

Il est aisé de vérifier que K est ainsi muni d'une structure de corps ($\bar{0}$ et $\bar{1}$ étant respectivement l'élément neutre de l'addition et de la multiplication). Or les applications A et B de K dans K qui, à tout élément x de K, associent respectivement

$$A(x) = \bar{1}\,x \qquad \text{et} \qquad B(x) = \bar{1}\,x^2$$

sont numériquement égales puisque $A(\bar{0}) = B(\bar{0})$ et $A(\bar{1}) = B(\bar{1})$, alors que les coefficients des deux fonctions polynômes ne sont pas les mêmes.

II. INTRODUCTION DES POLYNÔMES A UNE INDÉTERMINÉE

90. *Polynôme à une indéterminée.* — DÉFINITION. — **Étant donné un corps commutatif K, on appelle polynôme à une indéterminée sur K toute suite simple sur K qui n'admet qu'un nombre fini d'éléments différents de l'élément neutre 0 de l'addition sur K.**

On dit aussi « polynôme formel » quand on veut distinguer la notion précédente de celle de « fonction polynôme » (n° 94).

Nous adopterons provisoirement la notation

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots).$$

L'élément a_i du corps K est dit *coefficient* d'indice i du polynôme A. Le *degré* et la *valuation* du polynôme A sont respectivement le plus grand et le plus petit indice i tel que $a_i \neq 0$; on les note $d^\circ(A)$ et $v(A)$. Le degré et la valuation du polynôme dont tous les coefficients sont égaux à 0 ne sont pas définis; ce polynôme est dit polynôme nul (ou formellement nul) et est noté O. L'introduction d'une infinité de coefficients égaux à 0, d'indice supérieur au degré, est destinée à permettre des simplifications quand, par la suite, on étudiera simultanément des polynômes de degrés différents.

L'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps K sera provisoirement désigné par $\mathfrak{P}$.

91. *L'anneau des polynômes à une indéterminée.* — 1° D'après la définition de l'égalité (n° 6), A et B étant deux polynômes de l'ensemble $\mathfrak{P}$, nous écrirons :

$$A = B \iff a_i = b_i, \quad \text{quel que soit l'indice } i.$$

Nous allons montrer qu'il est possible de définir sur l'ensemble $\mathfrak{P}$ deux lois de composition internes telles que cet ensemble soit muni d'une structure d'anneau.

2° **Addition.** — DÉFINITION. — **Étant donnés deux polynômes A et B, dont les coefficients d'indice i sont respectivement a_i et b_i, on appelle somme de A et B, et on note A + B, le polynôme dont le coefficient d'indice i est $a_i + b_i$.**

THÉORÈME I. — **L'ensemble $\mathfrak{P}$ est un groupe additif.**

a) La *commutativité* et l'*associativité* de l'addition sur $\mathfrak{P}$ résultent de ces mêmes propriétés de l'addition sur le corps commutatif K.

b) Le polynôme O dont tous les coefficients sont égaux à 0 est *élément neutre* de l'addition sur $\mathfrak{L}$.

c) Tout $A \in \mathfrak{L}$, dont le terme d'indice i est a_i, admet un *symétrique* et un seul, le polynôme dont le terme d'indice i est $(-a_i)$. Ce symétrique est dit opposé de A; on le note $(-A)$.

Conséquences. — De l'étude générale des groupes additifs on déduit

a) Tout $A \in \mathfrak{L}$ est régulier dans l'addition, ce qui signifie que

$$A + B = A + C \implies B = C.$$

b) A et B étant deux éléments quelconques de $\mathfrak{L}$, il existe un élément D et un seul tel que $A = B + D$. Ce polynôme D est la somme $A + (-B)$. On l'appelle différence de A et B, et on le note $A - B$.

3° **Multiplication.** — DÉFINITION. — **Étant donnés deux polynômes** A **et** B, **dont les coefficients d'indice** i **sont respectivement** a_i **et** b_i, **on appelle produit de** A **et** B, **et on note** AB, **le polynôme dont le coefficient d'indice** i **est**

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0 = \sum_{q=0}^{i} a_q b_{i-q}.$$

Explicitons : $AB = (a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,\ \ldots)$.

THÉORÈME II. — **La multiplication sur** $\mathfrak{L}$ **est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. Elle admet un élément neutre.**

a) La *commutativité* de la multiplication sur $\mathfrak{L}$ et sa *distributivité par rapport à l'addition* résultent de ces mêmes propriétés sur le corps commutatif K.

b) Pour démontrer l'*associativité*, reprenons les polynômes A et B et considérons en outre le polynôme C dont le coefficient d'indice i est c_i.

Le coefficient d'indice j du produit (AB)C est

$$u_j = \sum_{i=0}^{j} \Big(\sum_{q=0}^{i} a_q b_{i-q}\Big) c_{j-i}.$$

En remarquant que $q + (i - q) + (j - i) = j$ est fixe, on constate que chaque terme de la somme u_j appartient à la somme $\sum_{q+q'+q''=j} a_q b_{q'} c_{q''}$ et que réciproquement tout terme de cette somme appartient à u_j. Il en résulte

$$u_j = \sum_{q+q'+q''=j} a_q b_{q'} c_{q''}.$$

On voit sous cette forme symétrique que u_j est aussi le coefficient d'indice j du produit A(BC). Il en résulte

$$(AB)C = A(BC).$$

c) Le polynôme $I = (1, 0, 0, \ldots)$, où 1 désigne l'élément neutre de la multiplication sur K, est *élément neutre* de la multiplication sur $\mathfrak{L}$.

De l'ensemble des théorèmes I et II nous déduisons :

THÉORÈME III. — **L'ensemble des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif est un anneau commutatif unitaire.**

92. ***Relations entre les degrés et les valuations de deux polynômes, et celles de leur somme et de leur produit.*** — 1° **Notations.** — Soient A et B deux polynômes, différents de O, dans lesquels nous mettons en évidence les degrés n et p, et les valuations $n' \leqslant n$, $p' \leqslant p$. Nous supposons $n \geqslant p$.

$$A = (0, \ldots, a_{n'}, \ldots, a_n, 0, \ldots); \qquad B = (0, \ldots, b_{p'}, \ldots, b_p, 0, \ldots).$$

2° **Somme.** — Supposons A et B non opposés.

Si $n > p$, le coefficient différent de 0 d'indice le plus élevé dans $A + B$ est a_n; on a $d^o(A + B) = d^o(A)$.

Si $n = p$, on a encore $d^o(A + B) = d^o(A)$, sauf si $a_n + b_n = 0$ auquel cas $d^o(A + B) < d^oA$. Dans tous les cas

$$d^o(A + B) \leqslant \sup[d^o(A), d^o(B)].$$

On montre de la même façon :

$$v(A + B) \geqslant \inf[(v(A), v(B)].$$

REMARQUE. $d^o(A + O) = d^o(A)$; $d^o(-A) = d^o(A)$.
$v\ (A + O) = v\ (A)$; $v\ (-A) = v\ (A)$.

3° **Produit.** — *a*) Rappelons que le coefficient d'indice i du produit AB est

$$u_i = \sum_{q=0}^{i} a_q b_{i-q}.$$

Pour $i = n + p$, Σ se réduit à un seul terme différent de 0 et

$$u_{n+p} = a_n b_p.$$

Pour $i > n + p$, tous les termes de Σ sont égaux à 0 et $u_i = 0$.
Pour $i = n' + p'$, Σ se réduit à un seul terme différent de 0 et

$$u_{n'+p'} = a_{n'} b_{p'}.$$

Pour $i < n' + p'$, tous les termes de Σ sont égaux à 0 et $u_i = 0$.

Le coefficient non nul d'indice le plus (resp. le moins) élevé de AB s'obtient donc en multipliant les coefficients non nuls d'indices le plus (resp. le moins) élevés de A et de B.

Retenons que $A \neq O$ et $B \neq O$ entraîne

$$AB \neq O; \qquad d^o(AB) = d^o(A) + d^o(B); \qquad v(AB) = v(A) + v(B).$$

*REMARQUE. — Les relations entre les degrés et valuations de deux polynômes A et B, autres que O, et ceux de leur somme et de leur produit pourraient s'étendre à tous les polynômes de $\mathfrak{P}$ (y compris O) par la convention

$$d^o(O) = -\Omega; \qquad v(O) = +\Omega$$

en donnant aux symboles $-\Omega$ et $+\Omega$ le sens suivant :

$-\Omega$ est inférieur à tout entier négatif
$+\Omega$ est supérieur à tout entier positif

$$\left.\begin{array}{l}(-\Omega)+n=-\Omega\\(+\Omega)+n=+\Omega\end{array}\right\}\ \forall n\in \mathrm{N}.$$

b) Si B = O, tous les coefficients de AB sont égaux à 0, quel que soit le polynôme A. On a donc AB = O. Il en est de même si A = O.

c) AB = O a lieu si et seulement si l'un des polynômes A ou B au moins est O. On peut donc dire que *l'anneau* $\mathfrak{L}$ *n'a pas de diviseur de zéro* ou encore qu'il s'agit d'un *anneau d'intégrité.*

Conséquence. — Tout polynôme $A \neq O$ est régulier dans la multiplication, ce qui signifie que

$$AB = AC,\quad A \neq 0 \Longrightarrow B = C.$$

Rappelons la démonstration :

AB = AC s'écrit A(B — C) = O. Si on adjoint $A \neq O$, cela entraîne B — C = O ou B = C.

d) $AB = 1 \Longleftrightarrow a_{n'}b_{p'} = a_n b_p = u_0 = 1$. Autrement dit le produit AB est égal à l'élément neutre de la multiplication si et seulement si les polynômes A et B sont de degré 0, le produit des coefficients d'indice 0 étant égal à 1. Ainsi seuls les polynômes de degré 0 sont symétrisables dans la multiplication; l'anneau $\mathfrak{L}$ n'est donc pas un corps.

93. ***Structure d'espace vectoriel. Notation définitive.*** — Nous allons maintenant définir sur l'ensemble $\mathfrak{L}$ une loi de composition externe.

1° Produit d'un élément de $\mathfrak{L}$ et d'un élément de K. — DÉFINITION. — **Étant donnés le polynôme A, dont le coefficient d'indice *i* est a_i, et l'élément α du corps K, on appelle produit de A par α et on note αA le polynôme dont le coefficient d'indice *i* est (αa_i).**

Notons : $d^\circ(\alpha A) = d^\circ(A)$ si $\alpha \neq 0$ et $A \neq O$
$0A = O,\ \forall A \in \mathfrak{L}$ et $\alpha O = O,\ \forall \alpha \in K.$

On vérifie aisément que cette loi externe sur $\mathfrak{L}$ a les propriétés suivantes :

1° $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2° $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3° $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
4° $1A = A$

dans l'énoncé desquelles A et B désignent des éléments quelconques de $\mathfrak{L}$, α et β des éléments quelconques de K, 1 l'élément neutre de la multiplication sur K.

Anticipant sur le n° 148, nous dirons que ces propriétés, jointes au fait

que $\mathfrak{L}$ est un groupe additif, font de l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps K, un *espace vectoriel* sur K.

Nous verrons également au n° 150 que l'ensemble $\mathfrak{L}$ a une structure d'*algèbre* sur K.

2° **Notation définitive.** — *a*) Désignons par e_i le polynôme dont tous les coefficients sont égaux à 0, sauf le coefficient d'indice i qui est égal à 1

$$e_0 = (1, 0, 0, \ldots) = \mathrm{I}; \qquad e_1 = (0, 1, 0, \ldots); \qquad e_2 = (0, 0, 1, 0, \ldots); \ldots$$

Tout polynôme $\mathrm{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, distinct de O, s'écrit d'une façon et d'une seule

$$\mathrm{A} = a_0e_0 + a_1e_1 + \ldots + a_ne_n. \tag{1}$$

Chacun des termes a_pe_p de la somme précédente est un polynôme particulier qui est appelé *monôme*; si $d^0(\mathrm{A}) = n$, on dit que a_ne_n est le *monôme dominant* et que a_n est le *coefficient dominant*.

b) On constate en reprenant le calcul du n° 92 avec

$$a_n = a_{n'} = 1 \quad \text{et} \quad b_p = b_{p'} = 1 \quad \text{que} \quad e_ne_p = e_{n+p}.$$

En particulier $e_1e_1 = e_2$, $e_1e_1e_1 = e_3, \ldots; e_q = (e_1)^q$, en convenant de désigner par A^q le produit de q polynômes égaux à A.

Le polynôme A s'écrit maintenant, en désignant par x le polynôme e_1,

$$\mathrm{A} = a_0\mathrm{I} + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n. \tag{2}$$

Dans la suite, l'anneau des polynômes à une indéterminée sur le corps K sera noté $\mathrm{K}[x]$ et non plus $\mathfrak{L}$.

Remarque. — Le second membre de la relation (2) est une somme de polynômes. A ce titre elle est commutative. Nous pouvons en écrire les monômes dans un ordre quelconque; il est cependant naturel de ranger ces monômes de façon que les exposants forment une suite monotone, c'est-à-dire d'*ordonner* le polynôme. On peut *ordonner suivant les puissances croissantes* de l'indéterminée et on obtient ainsi l'expression (2); on peut aussi *ordonner suivant les puissances décroissantes* et écrire :

$$\mathrm{A} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\mathrm{I}. \tag{3}$$

3° **Constantes.** — Définition. — **On appelle constante tout polynôme de la forme $a_0\mathrm{I}$, avec $a_0 \in \mathrm{K}$.**

Les constantes formant un sous-ensemble K^* de $\mathrm{K}[x]$ qui comprend les polynômes de degré 0 et le polynôme O. Les ensembles K^* et K munis des lois d'addition et de multiplication sont isomorphes. K^* est donc un corps et non un simple anneau comme $\mathrm{K}[x]$; cela tient à ce que les constantes autres que O sont les seuls polynômes de $\mathrm{K}[x]$ symétrisables dans la multiplication. Nous nous autoriserons de l'isomorphisme pour identifier K^* et K; le polynôme $a_0\mathrm{I}$ sera écrit a_0 dans la mesure où il n'y aura pas lieu de craindre une confusion; nous conserverons cependant dans tout ce chapitre la notation O pour désigner le polynôme nul.

4° **Polynômes unitaires (ou normalisés).** — DÉFINITION. — **On appelle unitaire tout polynôme dans lequel le coefficient non nul d'indice le plus élevé (ou coefficient dominant) est 1.**

Considérons un polynôme $A = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, différent de O. Nous pouvons l'écrire :

$$A = a_n\left(\frac{a_0}{a_n}, \ldots, 1, 0, \ldots\right).$$

Autrement dit nous savons mettre A sous la forme du produit d'une constante non nulle et d'un polynôme unitaire; nous dirons que nous avons *normalisé* le polynôme A.

5° **Polynômes pairs, impairs.** — DÉFINITION. — **Un polynôme est dit pair s'il est la somme d'une constante et de monômes de degrés pairs; il est dit impair s'il est la somme de monômes de degrés impairs.**

94. ***Composition des polynômes. Fonctions polynômes.*** — 1° Étant donné un élément de $K[x]$

$$A = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

nous pouvons faire correspondre à tout polynôme X de $K[x]$

$$X = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p, 0, \ldots) \quad \text{ou} \quad X = \xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_p x^p$$

le polynôme $\quad a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$

que nous désignerons par A(X) et que nous appellerons *polynôme composé* de X par A; nous dirons que A(X) est un polynôme en X.

REMARQUE. — En adoptant, en particulier, $x = (0, 1, 0, \ldots)$ pour polynôme X, on constate que $A(x)$ n'est autre que A, ce qui permet d'écrire indifféremment A ou $A(x)$.

2° En particulier nous pouvons définir, à partir du polynôme A, l'application de K dans K qui à tout élément ξ de K fait correspondre l'élément de K

$$A(\xi) = a_0 + a_1\xi + \ldots + a_n\xi^n.$$

Cette application est dite *fonction polynôme* associée au polynôme A; $A(\xi)$ est appelé *valeur numérique* du polynôme A au point ξ de K.

REMARQUE. — D'après la définition du n° 93, 5°.

A est un polynôme pair $\Longrightarrow$ $A(-\xi) = A(\xi)$, $\forall \xi \in K$.

A est un polynôme impair $\Longrightarrow$ $A(-\xi) = -A(\xi)$, $\forall \xi \in K$.

Il résulte du choix des règles de calcul sur les polynômes qu'à deux polynômes égaux (formellement) sont associées des fonctions polynômes égales (numériquement) et qu'à la somme (resp. produit) de deux polynômes est associée la somme (resp. produit) des fonctions polynômes associées aux facteurs. Autrement dit la correspondance

polynôme $\multimap$ fonction polynôme

est un homomorphisme pour les lois d'addition et de multiplication. Nous montrerons, si le corps K a une infinité d'éléments, que cette correspondance est biunivoque et qu'il s'agit d'un isomorphisme.

3° Plus généralement en considérant, comme au n° 89-2°, un anneau $\mathfrak{A}$ muni d'une loi externe application de $K \times \mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$, on peut associer à tout polynôme $A \in K[x]$ l'application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ qui à tout élément ξ de $\mathfrak{A}$ fait correspondre l'élément de $\mathfrak{A}$

$$A(\xi) = a_0 \varepsilon + a_1 \xi + \ldots + a_n \xi^n.$$

Il s'agit encore d'un homomorphisme.

4° Dans les correspondances entre polynômes et applications qui viennent d'être étudiées, on constate que l'on passe formellement d'un point de vue à l'autre en remplaçant dans l'écriture

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

du polynôme, le symbole x qui représente initialement un polynôme particulier, par un symbole X ou ξ qui représente soit un polynôme de $K[x]$, soit un élément de K, soit un élément de $\mathfrak{A}$. C'est à cela qu'est dû le nom de « polynôme à une indéterminée ».

III. DIVISION EUCLIDIENNE

95. *Division euclidienne.* — 1° Diviseurs et multiples d'un polynôme. — *a*) Reprenons l'anneau $K[x]$ des polynômes à une indéterminée sur le corps commutatif K (dans la pratique K est soit le corps des rationnels, soit celui des réels, soit celui des complexes).

L'ensemble $K[x]$ n'étant pas un corps, la division n'y est en général pas possible; autrement dit, étant donnés deux polynômes A et B, il n'existe en général pas de polynôme Q tel que $A = BQ$. Dans le cas, exceptionnel, où le polynôme Q existe, il est unique (sauf si $A = B = 0$) puisque

$$\left.\begin{matrix} BQ = BQ^* \\ B \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Q = Q^*.$$

Nous adopterons alors la définition suivante :

DÉFINITION. — **On dit que le polynôme A est divisible par le polynôme B (ou que B *divise* A, ou que B est un *diviseur* de A, ou que A est un *multiple* de B), s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. Le polynôme Q est alors appelé quotient de A par B.**

EXEMPLES. — Tout polynôme $B \neq 0$ divise le polynôme 0, le quotient étant 0. Tout polynôme A est divisible par tout polynôme B de degré 0.

Si $b \neq 0$ et $n > p$ le polynôme ax^n est divisible par le polynôme bx^p.

REMARQUE. — La relation de divisibilité est *réflexive* : l'égalité $A = AI$ montre que A divise A. Elle est *transitive*; en effet si B divise A et si C divise B

c'est qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $A = BP$ et $B = CQ$, il en résulte $A = C(QP)$, ce qui prouve que C divise A.

b) Étant donnés deux polynômes A et B, avec $B \neq 0$, deux cas peuvent se présenter :

ou bien A est divisible par B : il existe un polynôme Q tel que $A - BQ = 0$;

ou bien A n'est pas divisible par B : il n'existe pas de polynôme Q tel que $A - BQ = 0$, mais nous allons mettre en évidence un polynôme déterminé Q tel que, du moins, $d^o(A - BQ)$ soit aussi petit que possible.

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donnés un polynôme quelconque A et un polynôme $B \neq 0$, il existe un couple et un seul de polynômes Q et R vérifiant les deux conditions :**

$$A = BQ + R; \qquad R = 0 \qquad \text{ou} \qquad d^o(R) < d^o(B).$$

Le déterminer, c'est effectuer la division euclidienne (ou division suivant les puissances décroissantes) **de A par B; A est le dividende, B le diviseur, Q le quotient, R le reste.**

a) *Unicité d'une solution éventuelle.* — Supposons que deux procédés de calcul différents conduisent respectivement à :

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \ ; \quad R = 0 \quad \text{ou} \quad d^o(R) < d^o(B) \\ A &= BQ^* + R^*; \quad R^* = 0 \quad \text{ou} \quad d^o(R^*) < d^o(B). \end{aligned}$$

Nous obtenons par différence

$$B(Q - Q^*) = R^* - R; \ R^* - R = 0 \quad \text{ou} \quad d^o(R^* - R) < d^o(B).$$

Si nous avions $Q - Q^* \neq 0$ nous en déduirions

d'une part $\qquad R^* - R \neq 0 \Longrightarrow d^o(R^* - R) < d^o(B)$

d'autre part $\qquad d^o[B(Q - Q^*)] \geqslant d^o(B)$

ce qui serait en contradiction avec $B(Q - Q^*) = R^* - R$.

Nous pouvons donc affirmer que

$$Q^* = Q \qquad \text{et} \qquad R^* = R.$$

b) *Existence d'une solution.* — Si $A = 0$ ou si $d^o(A) < d^o(B)$ nous avons en évidence la solution $Q = 0$, $R = A$.

Supposons maintenant $A \neq 0$ et $d^o(A) \geqslant d^o(B)$. L'égalité $A = BQ + R$ que nous cherchons à obtenir, exige en particulier l'égalité des termes de plus haut degré de A et de $BQ + R$, c'est-à-dire de A et de BQ. Nous sommes ainsi conduits à ordonner A et B, et aussi tous les polynômes qui interviendront par la suite, suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée, de façon que *premier terme* signifie *terme de plus haut degré.*

$$\left.\begin{aligned} A &= a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0 \\ B &= b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0; \quad b_p \neq 0 \end{aligned}\right\} n \geqslant p$$

Le premier terme de A est divisible par le premier terme de B. Calculons le quotient q_1 (qui est le premier terme du polynôme Q, si celui-ci existe) et formons la différence

$$A - Bq_1 = R_1 \qquad (1)$$

(nous n'attacherons pas une importance particulière à l'expression $\frac{a_n}{b_p} x^{n-p}$ de q_1).

Les premiers termes de Bq_1 et de A étant égaux, nous avons

$$\text{soit } R_1 = 0, \quad \text{soit } d^o(R_1) < d^o(A).$$

Si $R_1 = 0$ ou si $d^o(R_1) < d^o(B)$ nous obtenons la solution $Q = q_1$, $R = R_1$.

Dans le cas contraire, itérons, en remplaçant A par R_1, qui est appelé *premier dividende partiel* : calculons le quotient q_2 du premier terme de R_1 par le premier terme de B et formons la différence

$$R_1 - Bq_2 = R_2. \qquad (2)$$

Les premiers termes de Bq_2 et de R_1 étant égaux, nous avons

$$\text{soit } R_2 = 0, \quad \text{soit } d^o(R_2) < d^o(R_1).$$

Si $R_2 = 0$ ou si $d^o(R_2) < d^o(B)$, il suffit d'ajouter membre à membre les égalités (1) et (2) pour obtenir

$$A - B(q_1 + q_2) = R_2,$$

ce qui met en évidence la solution $Q = q_1 + q_2$, $R = R_2$.

Dans le cas contraire, itérons, en remplaçant R_1 par R_2 qui est appelé *deuxième dividende partiel.* Et ainsi de suite....

Étant donné que $d^o(A) > d^o(R_1) > d^o(R_2)$...

nous sommes conduits, par un nombre fini d'itérations, à un polynôme R_h qui vérifie

$$\text{soit } R_h = 0, \quad \text{soit } d^o(R_h) < d^o(B).$$

En additionnant membre à membre les égalités

$$A - Bq_1 = R_1; \qquad R_1 - Bq_2 = R_2; \qquad \ldots; \qquad R_{h-1} - Bq_h = R_h$$

nous obtenons

$$A - B(q_1 + q_2 + \ldots + q_h) = R_h$$

ce qui met en évidence la solution $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_h$, $R = R_h$.

RÈGLE. — *On calcule le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on retranche du dividende le produit du diviseur par le terme calculé. Si le degré du polynôme obtenu est inférieur à celui du diviseur ou si ce polynôme est* 0, *l'opération est terminée. Dans le cas contraire, ce polynôme est le premier dividende partiel, on divise son premier terme par celui du diviseur, et on trouve ainsi le deuxième terme du quotient. On retranche du premier dividende partiel le produit du diviseur*

par le deuxième terme du quotient. On continue de la même façon jusqu'à ce qu'on obtienne une différence dont le degré est inférieur à celui du diviseur ou une différence égale à O. Cette dernière différence est le reste de la division.

EXEMPLE. — Soit à diviser $A = 2x^4 + 5x^3 - 10x + 1$ par $B = 2x^2 - 5x + 5$

A	$2x^4 + 5x^3 - 10x + 1$	$2x^2 - 5x + 5$	B
$-Bq_1$	$-2x^4 + 5x^3 - 5x^2$		
R_1	$5x^3 - 10x + 1$	$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}$	
$-Bq_2$	$-5x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{2}x$	$q_1 \quad q_2 \quad q_3$	
R_2	$\frac{25}{2}x^2 - \frac{45}{2}x + 1$		
$-Bq_3$	$-\frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{4}x - \frac{125}{4}$		
R	$\frac{35}{4}x - \frac{121}{4}$		

Cette opération permet d'écrire l'égalité des deux polynômes :

$$2x^4 + 5x^2 - 10x + 1 = (2x^2 - 5x + 5)\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) + \frac{35}{4}x - \frac{121}{4}.$$

REMARQUE. — Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_h$ les h premiers termes du dividende A, par $B_1, B_2, \ldots B_h$ ceux du diviseur B et par $q_1, q_2, \ldots q_h$ ceux du quotient Q. Les degrés de A_h et de B_h sont respectivement $n - h + 1$, $p - h + 1$, le degré de q_h est $n - p - h + 1$. Si le terme de degré $n - k + 1$ manque dans A, $A_k = O$; nous faisons la même convention pour les polynômes B et Q.

Le terme q_h s'obtient en divisant par B_1 le terme de degré $n - h + 1$ du dividende partiel $A - B(q_1 + q_2 + \ldots + q_{h-1})$; ce terme est $A_h - B_2q_{h-1} - B_3q_{h-2} - \ldots - B_hq_1$. Il résulte de là que les h premiers termes du quotient sont déterminés par les h premiers termes du dividende et du diviseur; pour les calculer, on peut négliger, s'il y en a, les termes qui suivent les h premiers dans les deux polynômes donnés.

En particulier, on ne change pas le quotient d'une division euclidienne en prenant au dividende et au diviseur les premiers termes en nombre égal à ceux du quotient.

96. *Application à la divisibilité.* — THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme A soit divisible par le polynôme $B \neq O$ est que le reste de la division euclidienne de A par B soit O.**

La condition est nécessaire. Si A est divisible par B il existe un polynôme Q tel que

$$A = BQ, \quad \text{ou encore} \quad A = BQ + O;$$

Q et O sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

La condition est suffisante. Si la division euclidienne de A par B s'écrit

$$A = BQ + O \quad \text{ou encore} \quad A = BQ,$$

A est divisible par B.

Conséquence. — Pour exprimer qu'un polynôme A de degré n est divisible par un polynôme B de degré p ($p \leqslant n$), on divise A par B, le reste est en général un polynôme

de degré $p-1$; pour que ce soit le polynôme O il faut que le coefficient de x^{p-1}, celui de x^{p-2}, etc., celui de x et le terme indépendant de x soient nuls. En général, on sera ainsi conduit à écrire p relations entre les coefficients des deux polynômes.

97. *Quotient et reste dans une division euclidienne.* — 1° On constate que, si $B \neq O$ et si $P \neq O$, les deux relations

$$A = BQ + R; \quad R = O \quad \text{ou} \quad d^o(R) < d^o(B)$$

équivalent aux deux relations

$$(AP) = (BP)Q + (RP); \quad RP = O \quad \text{ou} \quad d^o(RP) < d^o(BP).$$

En prenant successivement pour point de départ l'une ou l'autre des deux divisions, on en déduit :

THÉORÈME. — **Si dans une division euclidienne, l'on multiplie (resp. divise, à condition que cela soit possible) le dividende et le diviseur par un même polynôme $P \neq O$, le quotient n'est pas changé, le reste est multiplié (resp. divisé) par P.**

2° Considérons les deux divisions :

$$A = BQ + R; \quad R = O \quad \text{ou} \quad d^o(R) < d^o(B)$$
$$A' = BQ' + R'; \quad R' = O \quad \text{ou} \quad d^o(R') < d^o(B).$$

Nous en déduisons, quelles que soient les constantes α et α',

$$\alpha A + \alpha' A' = B(\alpha Q + \alpha' Q') + \alpha R + \alpha' R';$$
$$\alpha R + \alpha' R' = O \quad \text{ou} \quad d^o(\alpha R + \alpha' R') < d^o(B)$$

ce qui prouve que *le reste de la division de* $\alpha A + \alpha' A'$ *par* B est $\alpha R + \alpha' R'$.

Application I. — En choisissant $\alpha = 1$ et $\alpha' = -1$, nous constatons que le reste de la division de $A - A'$ par B est $R - R'$, ce qui démontre l'équivalence logique :

$A - A'$ divisible par B $\iff$ $R - R' = O$ $\iff$ $R = R'$. Énonçons :

THÉORÈME. — **Les restes de la division euclidienne de deux polynômes A et A′ par un même polynôme B sont égaux si et seulement si la différence des polynômes A et A′ est divisible par B.**

Application II. P étant un polynôme quelconque, le reste de la division du polynôme BP par B est le polynôme O, *le reste de la division du polynôme* $A + BP$ *par* B *est donc le reste de la division de* A *par* B.

Application III. — Conservons les notations du 1° : R étant le reste de la division de A par B, *les restes de la division de* PA *et de* PR *par* B *sont égaux* puisque la différence $PA - PR = (PQ)B$ est un multiple de B.

3° La propriété démontrée au 2° dans le cas de deux polynômes s'étend de proche en proche. Nous énoncerons, sous la forme la plus générale :

THÉORÈME. — **Étant donnés d'une part les restes R_k des divisions euclidiennes des p polynômes A_k par un même polynôme B, d'autre part p constantes arbitraires α_k, le reste de la division du polynôme $\Sigma \alpha_k A_k$ par B est le polynôme $\Sigma \alpha_k R_k$.**

98. *Division par* $x - a$. *Applications.* — 1° Dans la division euclidienne du polynôme

$$F(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

par le polynôme du premier degré $x - a$, le reste R est soit O soit un polynôme de degré 0; en d'autres termes R est une constante, c'est-à-dire, rappelons-le, un élément d'un sous-ensemble K* de K[x] isomorphe au corps K.

Dans l'égalité

$$F(x) = (x - a)\,Q(x) + R$$

qui traduit la division, remplaçons le polynôme x par le polynôme a. Nous obtenons l'égalité de deux polynômes composés qui sont les éléments $F(a)$ et R de K*. Autrement dit on a

$$R = F(a) = \alpha_n a^n + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0.$$

Énonçons le théorème suivant sur lequel, ainsi que nous le verrons plus loin, reposent d'importantes propositions :

THÉORÈME. — **Le reste de la division euclidienne d'un polynôme à l'indéterminée x par $x - a$ est la constante obtenue en substituant a à x dans l'expression de ce poiynôme.**

2° *Application I.* **Zéros d'un polynôme.** — DÉFINITION. — **On dit que $a \in K$ est zéro du polynôme $F(x)$ quand $F(a) = 0$.**

Il résulte du 1° le théorème suivant :

THÉORÈME. — **Pour que $a \in K$ soit zéro du poiynôme $F(x)$, ii faut et ii suffit que ceiui-ci soit divisibie par $x - a$.**

3° *Application II.* — Quel que soit l'entier positif n, $x^n - a^n$ est divisible par $x - a$. L'égalité

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \qquad (1)$$

est d'ailleurs l'une des égalités les plus importantes de l'algèbre élémentaire.

Le reste de la division de $x^n + a^n$ par $x - a$ est $2a^n$. L'égalité

$$x^n + a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-1}) + 2a^n$$

résulte de la division de $x^n + a^n$ par $x - a$. On l'obtient aussi en ajoutant $2a^n$ aux deux membres de l'égalité (1).

Si n est pair, soit $n = 2p$,

$$x^{2p} - a^{2p} = (x + a)(x^{2p-1} - ax^{2p-2} + a^2x^{2p-3} \ldots - a^{2p-1})$$

et si n est impair, soit $n = 2p + 1$,

$$x^{2p+1} + a^{2p+1} = (x + a)(x^{2p} - ax^{2p-1} + a^2x^{2p-2} \ldots + a^{2p}).$$

Ces égalités se déduisent d'ailleurs de l'égalité (1) en remplaçant a par $-a$.

4° *Application III.* — **Reste de la division de $F(x)$ par $x^p - a$.**

D'après le théorème démontré au n° 97, 3°, le reste de la division par $x^p - a$ du polynôme $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ est $R(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k R_k$, R_k désignant le reste de la division du monôme x^k par $x^p - a$.

Pour calculer R_k, effectuons la division de l'entier k par l'entier p; désignons par q et r le quotient et le reste de cette division et écrivons

$$x^k = (x^p)^q x^r, \qquad r < p.$$

La division du polynôme y^q par le polynôme $y - a$ conduit à l'égalité

$$y^q = (y - a)Q(y) + a^q.$$

En utilisant la composition des polynômes nous en déduisons

$$(x^p)^q = (x^p - a)Q(x^p) + a^q$$

et

$$x^k = (x^p - a)\, x^r Q(x^p) + a^q x^r$$

ce qui montre que, compte tenu de $r < p$, nous avons

$$R_k(x) = a^q x^r \qquad \text{et} \qquad R(x) = \Sigma \alpha_k a^q x^r.$$

RÈGLE. — *Le reste de la division du polynôme $F(x)$ par le polynôme $x^p - a$ est le polynôme obtenu en remplaçant dans $F(x)$, autant de fois qu'on le peut, x^p par a.*

5° *Application IV.* — **Substitution dans le polynôme $A(x)$ d'un zéro du polynôme $B(x)$.** — L'égalité de la division euclidienne

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x); \qquad R = 0 \qquad \text{ou} \qquad d^\circ R < d^\circ B$$

montre que, si a est un zéro du polynôme B, on a

$$A(a) = R(a).$$

RÈGLE. — *Si l'on doit calculer la valeur prise par un polynôme $A(x)$ quand on y substitue un nombre a, zéro d'un polynôme $B(x)$ de degré moindre que celui de $A(x)$, on peut faire la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ et substituer a dans le reste de cette division; les calculs sont souvent plus simples car le degré de $R(x)$ est inférieur à celui de $B(x)$.*

Par exemple les zéros de $B(x) = 2x^2 - 5x + 5$ sont $a = \dfrac{5 + \varepsilon i\sqrt{15}}{4}$, ε désignant $+1$ ou -1. Pour calculer $A(a)$, $A(x)$ étant le polynôme $2x^4 + 5x^2 - 10x + 1$, on calcule $R(a)$, $R(x)$ étant le reste, calculé précédemment de la division de $A(x)$ par $B(x)$:

$$R(x) = \frac{35}{4}x - \frac{121}{4};$$

$$A(a) = R(a) = \frac{35}{4}\left(\frac{5 + \varepsilon i\sqrt{15}}{4}\right) - \frac{121}{4} \qquad \text{ou} \qquad \frac{-309 + 35\varepsilon i\sqrt{15}}{16}.$$

IV. DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES

99. ***Division suivant les puissances croissantes.*** — **1° Introduction.** A et B étant deux polynômes donnés, dans l'étude précédente nous avons associé à tout polynôme Q le nombre $d^o(A - BQ)$ et mis en évidence la possibilité de choisir Q de façon que ce degré soit aussi petit que possible. Nous allons cette fois nous intéresser à la valuation $v(A - BQ)$ et montrer, que l'on peut la rendre supérieure à tout nombre naturel h donné à l'avance, moyennant un choix convenable du polynôme Q.

2° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donnés un entier naturel h, un polynôme quelconque A et un polynôme B tel que $v(B) = 0$, il existe un couple et un seul de polynômes Q et R vérifiant les deux conditions**

$$A = BQ + x^{h+1}R; \qquad Q = O \qquad \text{ou} \qquad d^o(Q) \leqslant h.$$

Le déterminer c'est diviser A par B suivant les puissances croissantes et à l'ordre h; A est le dividende, B le diviseur, Q le quotient à l'ordre h, $x^{h+1}R$ le reste à l'ordre h.

a) *Unicité d'une solution éventuelle.* Supposons que deux procédés différents conduisent respectivement à

$$A = BQ + x^{h+1}R; \qquad Q = O \qquad \text{ou} \qquad d^o(Q) \leqslant h$$

et

$$A = BQ^* + x^{h+1}R^*; \qquad Q^* = O \qquad \text{ou} \qquad d^o(Q^*) \leqslant h.$$

Nous obtenons par différence

$$B(Q - Q^*) = x^{h+1}(R^* - R); \qquad Q - Q^* = O \qquad \text{ou} \qquad d^o(Q - Q^*) \leqslant h.$$

Si nous avions $Q - Q^* \neq O$ nous en déduirions

d'une part $\qquad R^* - R \neq O \implies v[x^{h+1}(R^* - R)] > h$

d'autre part $\quad v[B(Q - Q^*)] = v(B) + v(Q - Q^*) = v(Q - Q^*) \leqslant h.$

(la valuation d'un polynôme est en effet au plus égale à son degré). Nous sommes conduits à une contradiction. Nous pouvons donc affirmer que

$$Q^* = Q \qquad \text{et} \qquad R^* = R.$$

b) *Existence d'une solution.* Si $A = O$ ou si $v(A) > h$, nous pouvons écrire $A = x^{h+1}R$ et nous avons en évidence la solution formée de $Q = O$ et de R.

Supposons maintenant $A \neq O$ et $v(A) \leqslant h$. L'égalité $A = BQ + x^{h+1}R$, que nous cherchons à obtenir, exige en particulier l'égalité des termes de plus bas degré de A et de $BQ + x^{h+1}R$, c'est-à-dire de A et de BQ. Nous sommes ainsi conduits à ordonner A et B, et aussi tous les polynômes qui interviendront par la suite, suivant les puissances croissantes de l'indéterminée, de façon que *premier terme* signifie *terme de plus bas degré* :

$A = a_l x^l + a_{l+1}x^{l+1} + \ldots + a_n x^n; \qquad a_l \neq 0, \qquad l \leqslant h \qquad$ et $\qquad a_n \neq 0$

$B = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p; \qquad b_0 \neq 0$ (hypothèse) $\qquad$ et $\qquad b_p \neq 0.$

Le premier terme de A est divisible par le premier terme de B. Calculons le quotient q_1 (qui est le premier terme du polynôme Q, si celui-ci existe) et formons la différence

$$A - Bq_1 = R_1 \qquad (1)$$

(nous n'attacherons pas une importance particulière à l'expression $\frac{a_i}{b_0}x^i$ de q_1). Les premiers termes de Bq_1 et de A étant égaux, nous avons

$$\text{soit } R_1 = 0, \text{ soit } v(R_1) > v(A).$$

Si $R_1 = 0$ ou si $v(R_1) > h$, nous pouvons écrire $R_1 = x^{h+1}R$ et nous avons en évidence la solution formée de $Q = q_1$ et de R.

Dans le cas contraire, itérons, en remplaçant A par R_1, qui est appelé *premier dividende partiel* : calculons le quotient q_2 du premier terme de R_1 par le premier terme de B et formons la différence

$$R_1 - Bq_2 = R_2. \qquad (2)$$

Notons que $d^o(q_1) < d^o(q_2) = v(R_1) \leqslant h$.

Les premiers termes de Bq_2 et R_1 étant égaux, nous avons

$$\text{soit } R_2 = 0, \qquad \text{soit } v(R_2) > v(R_1).$$

Si $R_2 = 0$ ou si $v(R_2) > h$, nous pouvons écrire $R_2 = x^{h+1}R$. Il suffit d'ajouter membre à membre les égalités (1) et (2) pour obtenir

$$A - B(q_1 + q_2) = R_2$$

ce qui met en évidence la solution formée de $Q = q_1 + q_2$ et de R.

Dans le cas contraire, itérons, en remplaçant R_1 par R_2, qui est appelé *deuxième dividende partiel.* Et ainsi de suite....

Étant donné que $v(A) < v(R_1) < v(R_2) < \ldots$
nous obtenons, par un nombre fini d'itérations, un polynôme R_k qui vérifie soit $R_k = 0$, soit $v(R_k) > h$, c'est-à-dire qui peut s'écrire $R_k = x^{h+1}R$.

En additionnant membre à membre les égalités

$$A - Bq_1 = R_1; \qquad R_1 - Bq_2 = R_2; \qquad \ldots; \qquad R_{k-1} - Bq_k = R_k$$

nous obtenons

$$A - B(q_1 + q_2 + \ldots + q_k) = R_k.$$

Comme $d^o\, q_1 < d^o\, q_2 < \ldots < d^o\, q_k = v(R_{k-1}) \leqslant h$, il apparaît la solution formée de $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_k$ et de R.

RÈGLE. — *La règle pratique à suivre pour effectuer l'opération est la même que pour la division suivant les puissances décroissantes, on arrête les calculs quand l'on trouve un reste égal à* 0 *ou contenant* x^{h+1} *en facteur.*

REMARQUE I. — Si l'entier h' est supérieur à l'entier h, lorsque le quotient Q et le reste $x^{h+1}R$ à l'ordre h ont été calculés, il suffit pour calculer le quotient et le reste à l'ordre h' de poursuivre l'opération, ce qui revient à diviser $x^{h+1}R$ par B à l'ordre h'.

REMARQUE II. — Pour trouver le quotient dans la division à l'ordre h de A par B, il suffit de réduire A et B à l'ensemble de leurs termes de degré au plus égal à h. Si A' et B' désignent les polynômes ainsi formés,

$$A = A' + x^{h+1}A_1, \qquad B = B' + x^{h+1}B_1.$$

La division de A par B suivant les puissances croissantes peut s'écrire

$$A' + x^{h+1}A_1 = (B' + x^{h+1}B_1).Q + x^{h+1}R,$$

ou

$$A' = B'Q + x^{h+1}(R - A_1 + B_1Q)$$

ce qui montre que Q est bien le quotient à l'ordre h de A' par B'.

REMARQUE III. — Si la suite des opérations conduit à $R_k = O$, on peut écrire $A = BQ$, A est divisible par B.

Inversement si un polynôme A est divisible par un polynôme B, le quotient peut s'obtenir en effectuant la division de A par B, soit suivant les puissances décroissantes, soit suivant les puissances croissantes (à un ordre convenablement choisi).

EXEMPLE I. — *Division suivant les puissances croissantes et à l'ordre* 2 *de* $A = 1 + x$ *par* $B = 1 - x^2 + x^4$

$$\begin{array}{lllllll|lll}
A & 1 + x & & & & & & 1 & -x^2 & +x^4 \quad B \\
\hline
-Bq_1 & -1 & +x^2 & & -x^4 & & & 1 & +x & +x^2 \\
\hline
R_1 & +x & +x^2 & & -x^4 & & & q_1 & q_2 & q_3 \\
-Bq_2 & -x & & +x^3 & & -x^5 & & & & \\
\hline
R_2 & & +x^2 & +x^3 & -x^4 & -x^5 & & & & \\
-Bq_3 & & -x^2 & & +x^4 & & -x^6 & & & \\
\hline
R_3 & & & +x^3 & & -x^5 & -x^6 & & &
\end{array}$$

Cette opération permet d'écrire l'égalité des deux polynômes

$$1 + x = (1 - x^2 + x^4)(1 + x + x^2) + x^3(1 - x^2 - x^3).$$

EXEMPLE II. — *Division suivant les puissances croissantes de* $A = 1 - x\cos\theta$ *par* $B = 1 - 2x\cos\theta + x^2$.

$$\begin{array}{lllll|ll}
A & 1 & -x\cos\theta & & & 1 - 2x\cos\theta + x^2 & B \\
\hline
-Bq_1 & -1 & +2x\cos\theta & -x^2 & & 1 + x\cos\theta & \\
\hline
R_1 & & x\cos\theta & -x^2 & & q_1 \quad q_2 & \\
-Bq_2 & & -x\cos\theta & +2x^2\cos^2\theta & -x^3\cos\theta & & \\
\hline
R_2 & & & x^2\cos 2\theta & -x^3\cos\theta & &
\end{array}$$

Le terme q_3 du quotient est $x^2\cos 2\theta$; on voit apparaître une loi de formation pour les termes successifs du quotient. Supposons donc que le terme q_n du quotient soit $x^{n-1}\cos(n-1)\theta$, le reste R_n correspondant étant $x^n\cos n\theta - x^{n+1}\cos(n-1)\theta$, et reprenons l'opération

$$\begin{array}{lll|l}
R_n & x^n\cos n\theta - x^{n+1}\cos(n-1)\theta & & 1 - 2x\cos\theta + x^2 \\
\hline
-Bq_{n+1} & -x^n\cos n\theta + 2x^{n+1}\cos\theta\cos n\theta & -x^{n+2}\cos n\theta & x^n\cos n\theta \\
\hline
R_{n+1} & x^{n+1}[2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta] & -x^{n+2}\cos n\theta & q_{n+1}
\end{array}$$

En transformant en somme le produit $2\cos\theta\cos n\theta$ le coefficient de x^{n+1} devient $\cos(n+1)\theta$, si bien que le reste R_{+1} s'écrit

$$x^{n+1}\cos(n+1)\theta - x^{n+2}\cos n\theta.$$

On passe de q_n et R_n à q_{n+1} et R_{n+1} en changeant n en $n+1$, ce qui justifie la loi de formation écrite. Par suite, quel que soit n, on a l'égalité

$$1 - x\cos\theta = (1 - 2x\cos\theta + x^2)(1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \ldots + x^n\cos n\theta) + x^{n+1}[\cos(n+1)\theta - x\cos n\theta].$$

En donnant à x la valeur 1, on peut déduire de cette égalité une formule sommatoire donnant

$$S = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta,$$

soit

$$S = \frac{1 - \cos\theta + \cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)},$$

ou en transformant en produits les différences qui figurent au numérateur

$$S = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}. \text{ (n° 88)}$$

V. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

100. ***Étude théorique des communs diviseurs de plusieurs polynômes de*** $K[x]$. — **1° Position du problème.** — Étant donnés les n polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, nous nous proposons d'étudier les polynômes P qui divisent chacun des A_i, c'est-à-dire les polynômes P tels qu'il existe des polynômes Q_i vérifiant

$$A_i = PQ_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Remarque I. — Parmi les polynômes cherchés figurent *a priori* les constantes non nulles.

Remarques II. — Si les A_i sont tous égaux à O, ils admettent tout élément de $K[x]$ pour commun diviseur. Dans toute la suite nous éliminerons ce cas trivial.

2° Étude de l'ensemble $\mathfrak{I}$ des polynômes ΣA_iU_i. — Les relations (1) permettent d'écrire, en désignant par $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des polynômes arbitrairement choisis dans $K[x]$,

$$\sum_{i=1}^{n} A_iU_i = \sum_{i=1}^{n} PQ_iU_i = P\sum_{i=1}^{n} Q_iU_i, \tag{2}$$

d'où l'énoncé suivant :

Théorème I. — **Tout commun diviseur des n polynômes donnés $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, divise le polynôme $\sum_{i=1}^{n} A_iU_i$, et cela quels que soient les n polynômes U_i.**

Nous sommes ainsi conduits à étudier l'ensemble $\mathfrak{I}$ des polynômes

$$\sum_{i=1}^{n} A_iU_i \begin{cases} A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ polynômes donnés} \\ U_1, U_2, \ldots, U_n \text{ polynômes quelconques.} \end{cases}$$

Notons que $\mathfrak{J}$ contient le polynôme O.

En éliminant le cas trivial, nous avons supposé que l'un des A_i, au moins, est distinct de O; $\mathfrak{J}$ contient donc au moins un élément distinct de O (en effet $A_i \in \mathfrak{J}$). Nous en déduisons qu'il existe un polynôme D $\left\{\begin{matrix} D \in \mathfrak{J} \\ D \neq O \end{matrix}\right\}$ tel que tout élément de $\mathfrak{J}$, autre que O, a un degré au moins égal à celui de D. Ce polynôme D n'est pas forcément unique.

B étant un élément quelconque de $\mathfrak{J}$, la division euclidienne de B par D s'écrit

$$B = DQ + R; \quad R = O \quad \text{ou} \quad d^o(R) < d^o(D). \tag{3}$$

Les hypothèses $B \in \mathfrak{J}$ et $D \in \mathfrak{J}$. qui se traduisent par

$$B = \Sigma A_i U_i \qquad \text{et} \qquad D = \Sigma A_i V_i,$$

entraînent $\quad R = B - DQ = \Sigma A_i (U_i - QV_i) \Longrightarrow R \in \mathfrak{J}.$

$\left\{\begin{matrix} R \in \mathfrak{J} \\ R \neq O \end{matrix}\right\}$ entraînerait $d^o(R) \geqslant d^o(D)$, en contradiction avec (3).

Nous avons donc nécessairement

$$R = O \iff B \text{ est un multiple de D.}$$

Comme, inversement, tout multiple de $D = \Sigma A_i V_i$ s'écrit $\Sigma A_i V_i$ et est aussi un élément de $\mathfrak{J}$ nous pouvons énoncer :

THÉORÈME II. — **L'ensemble $\mathfrak{J}$ des polynômes**

$$\sum_{i=1}^{n} A_i U_i \left\{\begin{matrix} A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ polynômes donnés} \\ U_1, U_2, \ldots, U_n \text{ polynômes quelconques} \end{matrix}\right.$$

est formé par les multiples d'un polynôme unique D.

Conséquence. — Tous les polynômes de $\mathfrak{J}$ distincts de O et de degré minimum s'obtiennent en multipliant D par une constante non nulle.

3° **Notion de plus grand commun diviseur.** — Le théorème I nous apprend que tout diviseur commun des n polynômes donnés A_i divise tout élément de l'ensemble $\mathfrak{J}$ des $\Sigma A_i U_i$. Il divise donc, en particulier, le polynôme D mis en évidence par le théorème II, puisque D est un élément de $\mathfrak{J}$. Inversement un diviseur quelconque de D divise tous les éléments de $\mathfrak{J}$ (qui sont des multiples de D) et en particulier les polynômes A_i. Énonçons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Parmi les communs diviseurs de n polynômes donnés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui ne sont pas tous égaux à O, il y en a un, D, dont le degré est supérieur ou égal à celui de tout autre commun diviseur; les communs diviseurs de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les diviseurs de D; on dit que D est le plus grand commun diviseur des polynômes donnés.**

On note, en abrégé, $D = \text{P.G.C.D.}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ou $D = \text{P. G. C .D.}(A_i)$.

Rappelons que D n'est défini qu'à une constante multiplicative près.

*4° Complément sur les idéaux de polynômes. — *a*) De l'étude faite au n° 39 il résulte qu'un sous-ensemble non vide $\mathfrak{J}$ de l'anneau commutatif K [x] en constitue un idéal s'il possède les deux propriétés suivantes :

$$\alpha)\ A \in \mathfrak{J} \quad \text{et} \quad B \in \mathfrak{J} \implies A - B \in \mathfrak{J};$$
$$\beta)\ A \in \mathfrak{J} \quad \text{et} \quad P \in K[x] \implies AP \in \mathfrak{J}.$$

En particuller, $A \in \mathfrak{J} \implies A - A \in \mathfrak{J}$ ou $O \in \mathfrak{J}$.

Par exemple, K [x] d'une part, $\{ O \}$ d'autre part, sont des idéaux de K [x].

b) Il est aisé de vérifier que, les A_i étant n polynômes donnés, l'ensemble $\mathfrak{J}$ des polynômes $\Sigma A_i U_i$ qui a été introduit au 2° possède les deux propriétés caractéristiques d'un idéal de K [x].

c) Le théorème II du 2° c'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Théorème. *Tout idéal $\mathfrak{J}$ de* K [x] *est formé des multiples d'un polynôme unique.*

Cette proposition est triviale si l'idéal $\mathfrak{J}$ se réduit au polynôme $\{ O \}$. Ce cas étant écarté, on reprend la démonstration du théorème II, à cela près que, ici, D étant un polynôme de $\mathfrak{J}$, distinct de O, de degré minimum, et B un élément quelconque de $\mathfrak{J}$, la division euclidienne de B par D donnant le quotient Q et le reste R,

$$\text{d'après } \beta)\ \{ D \in \mathfrak{J} \text{ et } Q \in K[x] \} \implies DQ \in \mathfrak{J}$$
$$\text{d'après } \alpha)\ \{ DQ \in \mathfrak{J} \text{ et } B \in \mathfrak{J} \} \implies R = B - DQ \in \mathfrak{J}.$$

Remarque. — Lorsque dans un anneau A, commutatif, unitaire, un idéal $\mathfrak{J}$ est engendré par les éléments ax où a est un élément de $\mathfrak{J}$ et où x parcourt A, on dit que l'idéal $\mathfrak{J}$ est *principal*, ce qui permet d'énoncer :

Tout idéal de K [x] *est principal.*

101. *Calcul pratique du P. G. C. D.* — 1° Cas de deux polynômes. — Nous nous appuierons sur la proposition suivante :

Lemme. **α désignant une constante non nulle quelconque et P un polynôme quelconque, l'ensemble des communs diviseurs de deux polynômes donnés A et B coïncide avec l'ensemble des communs diviseurs des polynômes B et $C = \alpha A - BP$.**

En effet tout commun diviseur de A et B divise B et $\alpha A - BP = C$. D'autre part tout commun diviseur de B et C divise C et BP; il divise donc $C + BP = \alpha A$ et, par conséquent, il divise A.

En particulier, en choisissant $\alpha = 1$ et $P = Q$, quotient de la division euclidienne de A par B, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème. — **Si R est le reste de la division euclidienne de A par B, l'ensemble des communs diviseurs de A et B coïncide avec l'ensemble des communs diviseurs de B et R.**

Nous sommes ainsi conduits, comme en arithmétique, à l'algorithme (ou procédé de calcul) d'Euclide. Effectuons la suite de divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned}
A &= BQ_1 + R_1; \quad d^o(R_1) < d^o(B)\\
B &= R_1Q_2 + R_2; \quad d^o(R_2) < d^o(R_1)\\
R_1 &= R_2Q_3 + R_3; \quad d^o(R_3) < d^o(R_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_{h-2} &= R_{h-1}Q_h + R_h; \quad d^o(R_h) < d^o(R_{h-1})\\
R_{h-1} &= R_hQ_{h+1}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons nécessairement un reste $R_{h+1} = 0$, car il n'existe pas une suite infinie de polynômes B, R_1, R_2, ... dont les degrés décroissent strictement.

Nous constatons, de proche en proche, que les communs diviseurs de A et B sont les communs diviseurs de R_{h-1} et R_h, c'est-à-dire, d'après la dernière égalité, les diviseurs de R_h; nous avons donc $D = R_h$.

EXEMPLE. — $A = x^a - 1$, $B = x^b - 1$, *a* et *b étant deux entiers naturels tels que* $a > b$.

De l'étude faite au n° 98, 4° il résulte que le reste de la division de A par B est le polynôme $R_1 = x^{r_1} - 1$, r_1 étant le reste de la division de l'entier *a* par l'entier *b*.

Le reste de la division de B par R_1 est le polynôme $R_2 = x^{r_2} - 1$, r_2 étant le reste de la division de l'entier *b* par l'entier r_1; on continue ainsi jusqu'au polynôme $R_h = x^{r_h} - 1$ qui divise le polynôme précédent $R_{h-1} = x^{r_h \cdot} - 1$ lorsque l'entier r_h divise l'entier r_{h-1}; finalement le P. G. C. D. des polynômes $x^a - 1$ et $x^b - 1$ est le polynôme $x^d - 1$, *d* étant le P. G. C. D. des entiers *a* et *b*.

REMARQUE. — D'après le lemme démontré au début on peut, à toute étape du calcul, remplacer le couple (R_{k-1}, R_k) par le couple (R'_{k-1}, R_k), avec $R'_{k-1} = \alpha R_{k-1} - PR_k$, α étant une constante non nulle quelconque et P un polynôme quelconque.

En particulier on peut, avant d'effectuer la division de R_{k-1} par R_k, multiplier R_{k-1} par une constante non nulle quelconque. On peut même, au cours de la division, remplacer l'un des dividendes partiels par son produit par une constante, en effet ce dividende partiel est de la forme $\alpha R_{k-1} - PR_k$ et on est en droit de considérer qu'il a été substitué à R_{k-1}.

Cette remarque présente un intérêt pratique, elle permet d'éviter les coefficients fractionnaires qui se prêtent moins bien aux calculs que les coefficients entiers.

2° **Cas général de *n* polynômes** A_1, A_2, ..., A_n. — Les communs diviseurs de A_1 et A_2 étant les diviseurs de leur plus grand commun diviseur D_2 nous avons

$$\text{P. G .C. D. } (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \text{P. G. C. D. } (D_2, A_3, \ldots, A_n).$$

Les diviseurs communs de D_2 et A_3 étant les diviseurs de leur plus grand commun diviseur D_3 nous avons

$$\text{P. G. C. D. } (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \text{P. G. C .D. } (D_3, A_4, \ldots, A_n).$$

En continuant nous aboutissons à

$$\text{P. G. C. D. } (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \text{P. G. C. D. } (D_{n-1}, A_n).$$

On peut donc remplacer le calcul du P. G. C. D. de *n* polynômes par le calcul (effectué $n - 1$ fois) du P. G. C. D. de deux polynômes.

102. ***Polynômes premiers entre eux.*** — 1° DÉFINITION. — **On dit que deux polynômes sont premiers entre eux (resp. que plusieurs polynômes sont premiers entre eux dans leur ensemble) lorsque leur P. G. C. D. est de degré 0, c'est-à-dire lorsque leurs seuls communs diviseurs sont les constantes non nulles.**

REMARQUE. — Si des polynômes sont premiers entre eux deux à deux ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais il est clair que des polynômes peuvent être premiers entre eux dans leur ensemble sans être premiers entre eux deux à deux. Tels sont $(x+1)^2$, (x^2-1) et $(x-2)^3$.

2° Le P. G. C .D. de n polynômes A_i étant un élément de l'ensemble $\mathfrak{I}$ des combinaisons linéaires $\Sigma A_i U_i$ de ces polynômes, si n polynômes A_i sont premiers entre eux dans leur ensemble il existe n polynômes V_i tels que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i V_i = I, \qquad (1)$$

le polynôme I étant le polynôme de K $[x]$ associé à l'élément 1 du corps K.

Inversement, étant donnés n polynômes A_i, s'il existe n polynômes V_i liés aux A_i par l'égallté (1), tout commun diviseur des A_i doit diviser I et ne peut être qu'une constante non nulle. Les A_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. Énonçons :

THÉORÈME DE BEZOUT. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que n polynômes A_i soient premiers entre eux dans leur ensemble est qu'il existe n polynômes V_i tels que**

$$\sum_{i=1}^{n} A_i V_i = I. \qquad (1)$$

3° *Application.* THÉORÈME. — **Si un polynôme A est premier séparément avec deux polynômes B_1 et B_2 il est premier avec leur produit.**

L'hypothèse se traduit par l'existence de polynômes U_1 et V_1, U_2 et V_2 tels que

$$U_1A + V_1B_1 = I, \qquad U_2A + V_2B_2 = I.$$

En multipliant membre à membre on obtient une relation de la forme $UA + VB_1B_2 = I$, avec $U = U_1U_2A + U_1V_2B_2 + U_2V_1B_1$ et $V = V_1V_2$.

Cette relation prouve que A et B_1B_2 sont premiers entre eux.

GÉNÉRALISATION. — Deux produits de polynômes tels que chaque facteur de l'un soit premier avec chaque facteur de l'autre sont premiers entre eux.

Soient en effet $P = \prod_{i=1}^{p} A_i$; $\quad Q = \prod_{j=1}^{q} B_j$; A_i et B_j premiers entre eux, $\forall i$ et j.

Le raisonnement précédent montre que A_i est premier avec B_1B_2, puis avec $(B_1B_2)B_3$ c'est-à-dire avec $B_1B_2B_3$, ... enfin avec Q. Cela posé, Q est premier avec A_1A_2, puis avec $(A_1A_2A_3)$ c'est-à-dire avec $A_1A_2A_3$, ... enfin avec P.

En particulier si deux polynômes A et B sont premiers entre eux, A^p et B^q sont premiers entre eux, quels que soient les entiers naturels p et q. C'est ainsi que si a et b sont des éléments distincts de K, les polynômes $A = x - a$ et $B = x - b$ sont premiers entre eux (un diviseur commun de A et B devant

diviser $A - B = b - a$, polynôme de degré 0); on en déduit que $(x - a)^p$ et $(x - b)^q$ sont premiers entre eux.

103. *Propriétés du P. G. C. D.* — 1° THÉORÈME I. — **Si l'on multiplie (resp. divise, à condition que cela soit possible) les polynômes A_i par un même polynôme $P \neq 0$, le P. G. C. D des A_i est multiplié (resp. divisé) par P.**

Dans le cas où il s'agit de deux polynômes on constate, de proche en proche, que dans chacune des divisions de l'algorithme d'Euclide le dividende et le diviseur sont multipliés (resp. divisés) par P. Il en résulte (97) que le reste est multiplié (resp. divisé) par P. Cela est vrai en particulier pour le dernier reste qui est le P. G. C .D. des deux polynômes considérés.

L'extension de la propriété au cas de n polynômes provient de ce que tous les P. G. C. D. intermédiaires qui interviennent dans le calcul (101, 2°) sont multipliés (resp. divisés) par P.

COROLLAIRE. — **Les quotients de n polynômes par leur P. G. C. D. sont premiers entre eux dans leur ensemble.**

RÉCIPROQUE. — **Si les quotients de n polynômes par un de leurs diviseurs communs sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce diviseur commun est le P. G. C. D.**

En effet nous avons par hypothèse

$$A_i = PA'_i; \qquad \text{P. G. C. D. } (A'_i) = I.$$

En appliquant le théorème I nous en déduisons

$$\text{P. G. C. D. } (PA'_i) = IP \qquad \text{ou} \qquad \text{P. G. C. D. } (A_i) = P.$$

2° THÉORÈME II. — **Si un polynôme divise le produit de deux autres polynômes et s'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.**

Soit C un polynôme qui est premier avec un polynôme A et divise le produit AB. On a

$$\text{P. G. C. D. } (C, A) = I \Longrightarrow \text{P. G. C. D. } (CB, AB) = B \quad \text{(théorème I).}$$

Le polynôme C divise le produit CB (dont il est un des facteurs); il divise le produit AB (hypothèse); C divise donc P. G. C. D. (CB, AB) = B.

Ce théorème II est attribué à Gauss.

3° **Application.** — Considérons deux polynômes A et B premiers entre eux; il existe (102, 2°) au moins un couple (U_0, V_0) de polynômes tels que

$$U_0A + V_0B = I.$$

S'il existe un autre couple (U, V) de polynômes vérifiant

$$UA + VB = I, \tag{1}$$

on obtient par différence

$$(U - U_0)A = (V_0 - V)B.$$

Le polynôme B divise $(V_0 - V)B$, donc $(U - U_0)A$, et comme il est premier avec A, il divise $U - U_0$, autrement dit, il existe un polynôme P tel que

$$U = U_0 + PB, \quad \text{ce qui entraîne} \quad V = V_0 - PA.$$

Inversement, quel que soit le polynôme P,

$$U_0A + V_0B = I \implies (U_0 + PB)A + (V_0 - PA)B = I.$$

On a ainsi démontré qu'*il existe une infinité de couples* (U, V) *de polynômes vérifiant* (1); on sait les calculer à partir de l'un quelconque d'entre eux.

En particulier, dans le cas général où $d^o(A) \geqslant 1$ et $d^o(B) \geqslant 1$, ce qui implique $U_0 \neq 0$ et $V_0 \neq 0$, introduisons, au lieu de P, quelconque, le quotient Q de la division euclidienne de V_0 par A :

$$V_0 = QA + T \implies (U_0 + QB)A + TB = I.$$

A cause des degrés, la deuxième égalité exige $T \neq 0$ et $U_0 + QB \neq 0$. On a

$$d^o(T) < d^o(A) \implies d^o(TB) < d^o(A) + d^o(B) \implies d^o(U_0 + QB) < d^o(B)$$

ce qui montre que Q est aussi le quotient de U_0 par $-B$; posons

$$U_0 = -BQ + S; \quad \text{on a } S \neq 0 \text{ et } d^o(S) < d^o(B);$$

il existe donc un couple (S, T) *de polynômes vérifiant*

$$SA + TB = I; \quad d^o(S) < d^o(B); \quad d^o(T) < d^o(A) \qquad (2)$$

Montrons que ce couple est unique. Si l'on avait

$$S^*A + T^*B = I; \quad d^o(S^*) < d^o(B); \quad d^o(T^*) < d^o(A) \qquad (3)$$

le polynôme B diviserait, comme au début de cette étude, la différence $S - S^*$, ce qui conduirait à une contradiction sur le degré si $S - S^* \neq 0$. Énonçons :

ÉGALITÉ DE BEZOUT. — **A et B étant deux polynômes premiers entre eux, autres que des constantes, il existe un couple de polynômes S, T, et un seul, vérifiant**

$$SA + TB = I; \quad d^o(S) < d^o(B); \quad d^o(T) < d^o(A).$$

REMARQUE. — Si A est une constante non nulle, soit $A = aI$, nous partirons du couple $S = \frac{1}{a} I$, $T = 0$; la condition $d^o(T) < d^o(A)$ est remplacée par $T = 0$; la condition $d^o(S) < d^o(B)$ est remplie, sauf si le polynôme B est, lui aussi, une constante.

GÉNÉRALISATION. — Si A et B sont deux polynômes ayant D pour P. G. C. D., on se ramène à la théorie précédente en posant $A = A_1D$, $B = B_1D$,

A_1 et B_1 sont premiers entre eux; il existe, en écartant le cas où l'un des polynômes donnés divise l'autre, un couple et un seul de polynômes (S, T) tels que

$$SA_1 + TB_1 = I; \quad d^o(S) < d^o(B_1); \quad d^o(T) < d^o(A_1).$$

Par suite, *il existe un couple et un seul de polynômes* (S, T) *tels que*

$$SA + TB = D; \begin{cases} d^o(S) < d^o(B) - d^o(D) \\ d^o(T) < d^o(A) - d^o(D). \end{cases}$$

En reprenant les divisions de l'algorithme d'Euclide on constate de proche en proche, que l'on peut exprimer chacun des restes successifs, et en particulier $R_h = D$, en fonction linéaire de A et B. A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier par récurrence que ce procédé fournit exactement $D = SA + TB$.

EXEMPLE : $A = x^3 + 1$, $B = x^2 + 1$

$A = BQ_1 + R_1$; $Q_1 = x$; $R_1 = -x + 1$

$B = R_1Q_2 + R_2$; $Q_2 = -x - 1$; $R_2 = 2$.

Les polynômes A et B sont donc premiers entre eux. Cherchons tous les couples (U, V) de polynômes vérifiant

$$UA + VB = I$$

Écrivons $R_1 = A - BQ_1 = A - Bx$

$R_2 = B - R_1Q_2 = B - (A - Bx)(-x - 1) = A(x + 1) + B(-x^2 - x + 1)$.

D'où la solution $S = \frac{1}{2}(x + 1)$; $T = \frac{1}{2}(-x^2 - x + 1)$.

Les autres solutions sont

$U = S + PB$, $V = T - PA$, P étant un polynôme quelconque.

4° THÉORÈME III. — **Si un polynôme est divisible séparément par des polynômes premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.**

Soit F un polynôme divisible séparément par des polynômes A, B, C, D premiers entre eux deux à deux.

F étant divisible par A, il existe un polynôme A_1, tel que

$$F = A.A_1;$$

par hypothèse B divise AA_1 et il est premier avec A, il divise A_1. Il existe un polynôme B_1, tel que

$$A_1 = B.B_1.$$

De même que B, le polynôme C divise AA_1, il est premier avec A ; il divise A_1, c'est-à-dire le produit BB_1 ; comme il est premier avec B, il divise B_1. Il existe un polynôme C_1, tel que

$$B_1 = C.C_1.$$

On montre de même successivement que D divise A_1, B_1 et C_1. Il existe un polynôme D_1, tel que

$$C_1 = D.D_1.$$

Par des substitutions successives on obtient les égalités

$$B_1 = CDD_1, \quad A_1 = BCDD_1, \quad F = ABCD.D_1.$$

La dernière exprime que F est divisible par le produit ABCD. La proposition est démontrée.

5° THÉORÈME IV. — **Si un polynôme est divisible séparément par les polynômes $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, ..., $(x-l)^\lambda$, a, b, ..., l étant distincts, il est divisible par le produit $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$.**

Nous avons montré en effet que, a, b, ..., l, étant distincts, les polynômes $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, ..., $(x-l)^\lambda$ sont premiers entre eux deux à deux. Il s'agit donc d'un cas particulier du théorème précédent.

6° THÉORÈME V. — **Si un polynôme A admet p zéros distincts, ou bien A = O, ou bien le degré de A est au moins égal à p.**

Nous avons vu que le polynôme A admet pour zéro l'élément a du corps K si et seulement s'il est divisible par le polynôme $x - a$.

Cela posé, si un polynôme A admet les zéros distincts $a_1, a_2, \dots, a_p$ il est divisible séparément par les polynômes $x - a_1$, $x - a_2$, ..., $x - a_p$ et par conséquent par leur produit, qui est un polynôme de degré p. Cela exige que A, ou bien soit le polynôme O, ou bien ait un degré n au moins égal à p.

COROLLAIRE I. — Un polynôme de degré n admet au plus n zéros distincts.

COROLLAIRE II. — **Si deux polynômes de K$[x]$, dont les degrés ne dépassent pas n, prennent les mêmes valeurs numériques pour $n+1$ valeurs distinctes de K, ils sont égaux.**

En effet la différence des deux polynômes admet $n + 1$ zéros distincts; elle ne peut être que le polynôme O ou un polynôme de degré au moins égal à $n + 1$, ce qui est exclu *a priori* par le fait que les degrés des polynômes donnés ne dépassent pas n.

COROLLAIRE III. — **Si le corps K contient une infinité d'éléments distincts deux polynômes qui définissent la même application de K dans K sont égaux, autrement dit l'égalité numérique entraîne alors l'égalité formelle.**

En effet deux polynômes qui définissent la même application de K dans K prennent la même valeur numérique pour toute valeur de K.

7° **Polynôme d'interpolation de Lagrange.** — Proposons-nous de rechercher s'il existe des polynômes de K$[x]$ qui prennent n valeurs numériques imposées u_i pour n valeurs distinctes données a_i de K$(i = 1, 2, \dots, n)$.

Il est évident que, j étant un entier naturel, $j \in [1, n]$, le polynôme

$$F_j(x) = u_j \frac{(x-a_1) \dots (x-a_{j-1})\,(x-a_{j+1}) \dots (x-a_n)}{(a_j-a_1) \dots (a_j-a_{j-1})\,(a_j-a_{j+1}) \dots (a_j-a_n)}$$

prend la valeur 0 aux points a_i, $i \neq j$, et qu'il prend la valeur u_j au point a_j.

On en déduit que le polynôme $F(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)$ remplit les conditions imposées.

Le degré de F (x) étant au plus $n - 1$, d'après 6° (corollaire II), F (x) est le

seul polynôme de degré inférieur à n répondant à la question; autrement dit $F(x)$ est le polynôme de degré minimum remplissant les conditions imposées.

104. ***Plus petit commun multiple.*** — 1° **Définition.** — Étant donnés les n polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, parmi lesquels ne figure pas O, nous nous proposons d'étudier l'ensemble $\mathfrak{J}$ des polynômes M qui sont multiples de chacun des A_i, c'est-à-dire des polynômes M tels qu'il existe n polynômes Q_i vérifiant

$$M = A_i Q_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$\mathfrak{J}$ n'est pas vide, puisqu'il contient d'une part O, et d'autre part le produit $A_1 A_2 \ldots A_n$. On vérifie que

$$\begin{cases} M \in \mathfrak{J} \text{ et } M' \in \mathfrak{J} & \Longrightarrow \quad M - M' \in \mathfrak{J} \\ M \in \mathfrak{J} \text{ et } P \in K[x] & \Longrightarrow \quad MP \in \mathfrak{J}. \end{cases}$$

Il en résulte que $\mathfrak{J}$ est un idéal de $K[x]$, distinct de l'idéal $\{O\}$. Par suite (**100**, 4°) $\mathfrak{J}$ est formé des multiples d'un polynôme unique N. D'où

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Parmi les communs multiples de n polynômes donnés $A_1, \ldots, A_n$, distincts de O, il en existe un, N, dont le degré est inférieur ou égal à celui de tout autre commun multiple; les communs multiples de $A_1, \ldots, A_n$ sont les multiples de N. On dit que N est le plus petit commun multiple des polynômes donnés.**

On note, en abrégé, $N = P.P.C.M.\ (A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Le polynôme N, comme le plus grand commun diviseur n'est défini qu'à une constante multiplicative près.

2° **Détermination pratique de** P.P.C.M. (A, B). — Étant donnés les polynômes A et B, distincts de O, étudions les polynômes M tels qu'il existe deux polynômes P et Q vérifiant

$$M = AP; \qquad M = BQ \tag{1}$$

En introduisant $D = P.G.C.D.\ (A, B)$, on a

$$A = DA', \qquad B = DB'; \qquad P.G.C.D.\ (A', B') = I.$$

Des relations (1) on déduit $DA'P = DB'Q$ et comme $D \neq O$, $A'P = B'Q$.

Le polynôme B' divise le produit A'P et est premier avec le polynôme A'; il divise le polynôme P. Il existe un polynôme F tel que

$$P = FB' \quad \Longrightarrow \quad Q = FA'$$

et par suite : $$M = AB'F = BA'F \tag{2}$$

Inversement, quel que soit le polynôme F, le produit (AB') F qui est égal à (BA') F est un multiple de A et un multiple de B.

Nous concluons de là :

$$P.P.C.M.\ (A, B) = AB' \text{ ou } BA'.$$

Autrement dit, *le plus petit commun multiple de deux polynômes s'obtient en divisant leur produit par leur plus grand commun diviseur.*

Lorsque deux polynômes sont premiers entre eux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit.

3° **Calcul pratique de** P.P.C.M. $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Si N_2 désigne $P.P.C.M.\ (A_1, A_2)$, l'ensemble des multiples communs de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coïncide avec l'ensemble des multiples communs de $N_2, A_3, \ldots, A_n$ et ainsi de suite.

VI. POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES SUR LE CORPS K

105. *Polynômes irréductibles sur un corps.* — DÉFINITION. — **Un polynôme non constant de $K[x]$ est dit irréductible sur le corps K s'il n'est pas possible de le considérer comme le produit de deux polynômes non constants.**

Autrement dit, $P \in K[x]$ est irréductible sur K s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes αP et $\alpha 1$, α désignant un élément non nul de K.

REMARQUE I. — **Tout polynôme de degré 1 est irréductible, quel que soit le corps K.**

REMARQUE II. — K′ étant un sous-corps de K, l'anneau $K'[x]$ des polynômes à une indéterminée sur K′ est un sous-anneau de $K[x]$. Il peut arriver qu'un même polynôme soit irréductible sur K′ et réductible sur K. Au contraire tout polynôme qui est irréductible sur K l'est sur K′.

EXEMPLE. — Le polynôme $x^2 - 2$ est réductible sur R, car il s'écrit $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; il est irréductible sur Q. Le polynôme $x^2 + 1$ est irréductible sur Q et R, mais il est réductible sur C.

2° **Propriétés.** — THÉORÈME I. — **Un polynôme irréductible est premier avec tout polynôme qu'il ne divise pas.**

En effet le P. G. C. D. d'un polynôme irréductible P et d'un polynôme quelconque A, étant un diviseur de P, ne peut être que I ou P (à la multiplication près par une constante non nulle).

THÉORÈME II. — **Si un polynôme irréductible divise un produit de polynômes, il divise l'un des facteurs.**

Supposons d'abord que le polynôme irréductible P divise le produit AB. Nous venons de voir que le P. G. C. D. de P et A est, soit P, soit I. Dans le premier cas P divise A. Dans le deuxième cas il existe deux polynômes U et V tels que

$$UA + VP = I$$

ce qui entraîne, en multipliant les deux membres par B,

$$U(AB) + (BV)P = B.$$

Le polynôme P divise AB et P et par conséquent B qui est une combinaison linéaire de ces polynômes. La proposition est ainsi démontrée dans le cas d'un produit de deux facteurs.

Supposons maintenant que le polynôme irréductible P divise le produit ABC. Il divise donc soit C, soit AB, auquel cas il divise A ou B.... Par récurrence on étend la proposition à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

3° Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles.

THÉORÈME. — **Tout polynôme non constant, M, de $K[x]$ peut être décomposé, d'une manière et d'une seule, sous forme du produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles normalisés de $K[x]$.**

a) *Existence d'une décomposition.* — Nous remarquerons que si un polynôme non constant est réductible, il admet au moins un diviseur irréductible (l'un de ses diviseurs non constants qui ont le degré le plus petit possible).

Cela posé, si M est irréductible la proposition est démontrée. Dans le cas contraire il existe au moins un polynôme irréductible P_1 tel que

$$M = P_1Q_1; \qquad d^o(P_1) > 0 \iff d^o(Q_1) < d^o(M).$$

Si Q_1 est irréductible la proposition est démontrée. Dans le cas contraire il existe au moins un polynôme irréductible P_2 tel que

$$Q_1 = P_2Q_2; \qquad d^o(Q_2) < d^oQ_1.$$

Si Q_2 est irréductible on a la décomposition $M = P_1P_2Q_2$. Dans le cas contraire on itère. Comme

$$d^o(M) > d^o(Q_1) > d^o(Q_2) \ldots$$

on obtient, au bout d'un nombre fini d'itérations, la décomposition en facteurs irréductibles :

$$M = P_1P_2 \ldots P_hQ_h.$$

En normalisant les polynômes obtenus et en groupant les polynômes normalisés égaux on peut écrire, A, B, ..., L désignant des polynômes irréductibles normalisés distincts et k une constante :

$$M = kA^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda.$$

b) *Unicité.* — Supposons que, par un autre procédé, on ait obtenu une seconde décomposition de la même forme :

$$M = k_1A_1^{\alpha_1}B_1^{\beta_1} \ldots L_1^{\lambda_1}.$$

Écrivons

$$kA^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda = k_1A_1^{\alpha_1}B_1^{\beta_1} \ldots L_1^{\lambda_1}. \qquad (1)$$

Le polynôme irréductible A divise le premier membre de l'égalité précédente. Il divise donc le second membre et, d'après le théorème II, il en divise l'un des facteurs. Ce facteur ne peut être k_1, à cause de $d^o(A) > 0$. Du fait de la normalisation, A est égal à l'un des polynômes $A_1, B_1, \ldots L_1$. Ce raisonnement montre qu'il est impossible qu'un polynôme figure comme facteur dans l'un des membres de l'égalité (1), sans figurer dans l'autre.

Les deux décompositions font intervenir les mêmes polynômes irréductibles et s'écrivent

$$kA^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda = k_1A^{\alpha_1}B^{\beta_1} \ldots L^{\lambda_1}.$$

Supposons $\alpha \neq \alpha_1$, par exemple $\alpha > \alpha_1$. Après division par A^{α_1} on a l'égalité

$$kA^{\alpha-\alpha_1}B^{\beta} \ldots L^{\lambda} = k_1 B^{\beta_1} \ldots L^{\lambda_1}$$

ce qui constitue une contradiction, A divisant le premier membre sans diviser le second. On a donc nécessairement $\alpha = \alpha_1$ et, de la même façon, $\beta = \beta_1 \ldots \lambda = \lambda_1$. Il en résulte $k = k_1$. Les deux décompositions sont identiques.

APPLICATIONS. — Les polynômes irréductibles interviennent dans la théorie de la divisibilité des polynômes d'une indéterminée comme les nombres premiers de la décomposition des nombres naturels dans la théorie arithmétique de la divisibilité de ces nombres. En particulier, comme on le reconnaît immédiatement :

I. — Pour que le polynôme F soit divisible par le polynôme G, il faut et il suffit, F et G étant décomposés en facteurs irréductibles normalisés, que tout facteur de la décomposition de G appartienne à la décomposition de F avec un exposant au moins égal à celui qu'il a dans la décomposition de G.

II. — Pour former le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes décomposés en facteurs irréductibles normalisés, on multiplie les facteurs communs à ces diverses décompositions, chacun étant affecté du plus faible des exposants qu'il a dans ces décompositions.

III. — Pour former le plus petit commun multiple de plusieurs polynômes décomposés en facteurs irréductibles normalisés, on multiplie tous les facteurs de ces diverses décompositions, chacun étant affecté du plus élevé des exposants qu'il a dans ces décompositions.

4° **Extensions algébriques d'un corps** K. — D'après le n° 38, 2° les relations d'équivalence sur l'anneau commutatif K $[x]$, compatibles avec les lois de structure, sont les relations binaires de la forme :

« A $\mathcal{R}$ B signifie A − B $\in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ idéal de K $[x]$ »

En l'occurrence $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des multiples d'un polynôme unique M (100, 4°). Montrons que *l'anneau-quotient*, que nous noterons K $[x]$/M, *est un corps si et seulement si le polynôme* M *est irréductible.*

I. Si M n'est pas irréductible, il existe des polynômes non constants M_1 et M_2 tels que $M = M_1M_2$ et on a (en désignant par $\overline{A}$ la classe d'équivalence dont un représentant est A) :

$\overline{M_1}.\overline{M_2} = \overline{0} \Longrightarrow$ K $[x]$/M admet des diviseurs de zéro et n'est pas un corps.

II. Si M est irréductible, tout polynôme P non multiple de M, $(\overline{P} \neq \overline{0})$, est premier avec M : il existe U et V tels que PU + MV = I (n° 102). D'où $\overline{P}.\overline{U} = \overline{I}$.

$\overline{P}$ a un inverse et K $[x]$/M est un corps.

La proposition est ainsi démontrée. Elle permet de poser :

DÉFINITION. — M *étant un polynôme irréductible sur* K, *le corps* K $[x]$/M *est dit extension algébrique du corps* K.

Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice que, pour K = R et $M(x) = x^2 + 1$, le corps R $[x]$/M est isomorphe au corps des complexes, qui peut ainsi être considéré comme une extension algébrique du corps R.

VII. INTRODUCTION DES POLYNÔMES A PLUSIEURS INDÉTERMINÉES

106. ***Les polynômes à deux indéterminées.*** — 1° Tant que nous n'avons pas abordé l'étude des deux divisions (nos 95 à 99), nous n'avons pas utilisé (si ce n'est à propos de la symétrisation des polynômes de degré 0) le fait que tout élément du corps K, distinct de 0, est symétrisable dans la multiplication sur K. Nous aurions donc pu tout aussi bien introduire les polynômes à une indéterminée sur un anneau A unitaire et intègre (rappelons qu'on appelle intègre (38) un anneau commutatif sans diviseur de zéro); l'ensemble A[x] de ces polynômes possède encore une structure d'anneau unitaire et intègre (1).

Désignons ici par $\mathfrak{A}$ l'ensemble K [x] des polynômes à une indéterminée sur le corps commutatif K. Il s'agit d'un anneau unitaire et intègre. Nous sommes donc en mesure de définir l'anneau $\mathfrak{A}[y]$ des polynômes à une seconde indéterminée, ensemble d'éléments qui peuvent s'écrire

$$\sum_{j=0}^{m} (a_{0,j} + a_{1,j}x + \ldots + a_{n,j}x^n)\, y^j. \qquad (1)$$

On constate qu'il existe une correspondance bijective entre ces éléments et les suites doubles sur K dans lesquelles il n'y a qu'un nombre fini d'éléments différents de 0.

2° Cela posé, adoptons la définition suivante :

DÉFINITION. — **Étant donné un corps commutatif K, on appelle polynôme à deux indéterminées sur K toute suite double sur K qui n'admet qu'un nombre fini d'éléments différents de 0.**

Nous adopterons la notation provisoire

$$A = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{0,2}, a_{1,1}, a_{2,0}, \ldots, 0, \ldots).$$

Les éléments $a_{i,j}$ du corps K sont dits *coefficients* du polynôme A. La plus grande des sommes $i + j$ telle que $a_{i,j} \neq 0$ est le *degré* du polynôme A. On désigne par K [x, y] l'ensemble des polynômes à deux indéterminées sur le corps K. D'après la définition générale de l'égalité (n° 6), si A et B sont deux polynômes de K [x, y], nous écrirons

$$A = B \iff \forall i \text{ et } j \qquad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

DÉFINITION. — **Étant donnés deux éléments A et B de K [x, y] dont les coefficients d'indices i, j sont $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ on appelle somme et produit de A et B les**

(1) On ne parle pas de structure d'espace vectoriel sur un anneau; mais si dans la définition d'un espace vectoriel sur un corps commutatif K on remplace K par un anneau commutatif unitaire A, on obtient ce qu'on appelle un A-*module*.

éléments de $K[x, y]$ dont les coefficients d'indices i, j sont respectivement

$$a_{i,j} + b_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{q=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} a_{q,r}\, b_{i-q,\, j-r}.$$

On appelle produit de A par un élément α du corps K, l'élément de $K[x, y]$ dont le coefficient d'indices i, j est

$$\alpha a_{i,j}.$$

En raisonnant comme dans le cas de $K[x]$ on démontre :

THÉORÈME I. — L'ensemble $K[x, y]$ est un anneau commutatif unitaire.

THÉORÈME II. — L'ensemble $K[x, y]$ est un espace vectoriel sur le corps K.

On arrive ainsi à exprimer tout élément de $K[x, y]$ sous la forme d'une somme de polynômes

$$A = \Sigma a_{i,j}\, e_{i,j}$$

$e_{i,j}$ étant l'élément de $K[x, y]$ dont tous les coefficients sont égaux à 0, sauf le coefficient d'indices i et j qui est égal à 1. La définition de la multiplication montre que

$$e_{i,j} = (e_{1,0})^i\, (e_{0,1})^j.$$

En désignant par x et y les polynômes $e_{1,0}$ et $e_{0,1}$, ce qui fournit une interprétation des indéterminées, on a la notation définitive

$$A = \Sigma a_{i,j} x^i y^j.$$

L'élément neutre $e_{0,0}$ de la multiplication est écrit I.

3° En écrivant l'élément A de l'anneau $K[x, y]$ sous la forme

$$A = \sum_{j=0}^{m} (a_{0,j} + a_{1,j}\, x + \ldots + a_{n,j} x^n) y^j$$

ce qui s'exprime en disant que A est ordonné par rapport à y, nous constatons que la correspondance biunivoque entre l'anneau $K[x, y]$ des polynômes à deux indéterminées sur le corps K et l'anneau $\mathfrak{A}[y]$ des polynômes à une indéterminée y sur l'anneau $K[x] = \mathfrak{A}$ est un isomorphisme pour les lois d'addition et de multiplication.

En ordonnant A par rapport à x,

$$A = \sum_{i=0}^{n} (a_{i,0} + a_{i,1}\, y + \ldots + a_{i,m}\, y^m) x^i$$

nous constatons de même que $K[x, y]$ est isomorphe pour ces mêmes lois à l'anneau $\mathfrak{A}_1[x]$ des polynômes à une indéterminée x sur l'anneau $K[y] = \mathfrak{A}_1$.

Ces isomorphismes permettent d'identifier $K[x, y]$ soit à $\mathfrak{A}[y]$ soit à $\mathfrak{A}_1[x]$.

L'anneau $\mathfrak{A} = K[x]$ étant un anneau d'intégrité, il en résulte que l'anneau $\mathfrak{A}[y]$ est aussi un anneau d'intégrité, et par suite aussi, par isomorphisme l'anneau $K[x, y]$.

REMARQUE. — De la même façon que le corps K est isomorphe au sous-ensemble de K $[x]$ formé par les constantes, K $[x]$ et K $[y]$ sont isomorphes à des sous-anneaux de K $[x, y]$ auxquels nous les identifierons. En particulier, on peut désigner par le même symbole O les polynômes nuls des trois anneaux précédents.

4° **Composition des polynômes.** — Au polynôme $A = \Sigma a_{ij}x^iy^j$, élément de K $[x, y]$ on peut associer l'application de K $[x, y] \times$ K $[x, y]$ dans K $[x, y]$, qui à tout couple X, Y d'éléments de K $[x, y]$ associe l'élément de K $[x, y]$

$$A(X, Y) = \Sigma a_{ij}X^iY^j.$$

REMARQUE. — En adoptant en particulier x et y pour polynômes X et Y (cf. n° 94, 1°), on constate que A (x, y) n'est autre que A, ce qui permet d'écrire indifféremment A ou A (x, y).

107. ***Les polynômes à m indéterminées.*** — 1° Les définitions et les résultats précédents s'étendent par récurrence à un nombre m quelconque, mais fini, d'indéterminées.

A un isomorphisme près, l'anneau $K[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m]$ peut être défini soit comme un ensemble de suites multiples, soit comme l'anneau unitaire et intègre $\mathfrak{A}[x_m]$ des polynômes à l'indéterminé x_m sur l'anneau unitaire et intègre $K[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}] = \mathfrak{A}$.

2° On peut reprendre, à propos des polynômes à m indéterminées, la définition de la divisibilité qui a été donnée au n° 95, 1°.

Le problème de la divisibilité dans $K[x_1, \ldots, x_m]$ est très compliqué. Aussi nous bornerons-nous à démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME I. — **Pour que le polynôme A (x, y, z) soit divisible par le polynôme $z - B(x, y)$, il faut et il suffit que le polynôme composé A (x, y, B) soit égal au polynôme nul O.**

a) La condition est nécessaire. En effet si

$$A(x, y, z) = [z - B(x, y)]\,Q(x, y, z)$$

les deux polynômes composés obtenus en remplaçant dans les deux membres z par $B(x, y)$ sont égaux, ce qui s'écrit

$$A(x, y, B) = O.$$

b) La condition est suffisante. Supposons $A(x, y, B) = O$.

Ordonnons le polynôme $A(x, y, z)$ suivant les puissances décroissantes de z et divisons-le par $z - B(x, y)$. D'après la règle de la division chaque terme du

quotient s'obtient en divisant par z, soit le premier terme de A, soit le premier terme d'un dividende partiel; un raisonnement par récurrence montre que ce premier terme est un polynôme de la forme $z^h A_h(x, y)$ et qu'il fournit le terme $z^{h-1}A_h(x, y)$ du quotient.

Le quotient est donc un polynôme non seulement par rapport à z mais aussi par rapport à x et y. Quant au reste, qui est l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le quotient, il est également un polynôme par rapport à x, y, z et comme son degré par rapport à z est 0, il ne contient que x et y. Écrivons l'égalité de la division

$$A(x, y, z) = [z - B(x, y)]\,Q(x, y, z) + R(x, y).$$

Les deux polynômes composés obtenus en remplaçant dans les deux membres z par $B(x, y)$ sont égaux, ce qui, compte tenu de $A(x, y, B) = O$ s'écrit $R(x, y) = O$ et démontre la propriété.

THÉORÈME II. — **Si le polynôme $A(x, y, z)$ est divisible séparément par les trois polynômes $x - y$, $y - z$, $z - x$, il est divisible par leur produit.**

Le polynôme $A(x, y, z)$ étant divisible par $x - y$ il existe un polynôme $F(x, y, z)$ tel que

$$A(x, y, z) = (x - y)\,F(x, y, z). \qquad (1)$$

Le polynôme $A(x, y, z)$ étant divisible par $y - z$ on a, d'après le théorème précédent, $A(x, y, y) = O$ ce qui, compte tenu de (1) s'écrit

$$(x - y)\,F(x, y, y) = O$$

et, puisque $x - y \neq O$,

$$F(x, y, y) = O.$$

Cela prouve que $F(x, y, z)$ est divisible par $y - z$; il existe un polynôme $G(x, y, z)$ tel que

$$F(x, y, z) = (y - z)\,G(x, y, z)$$

et (2) $$A(x, y, z) = (x - y)(y - z)\,G(x, y, z).$$

$A(x, y, z)$ étant divisible par $z - x$ on a $A(x, y, x) = O$, c'est-à-dire

$$(x - y)(y - x)\,G(x, y, x) = O$$

et puisque $(x - y)(y - x) \neq O$,

$$G(x, y, x) = O.$$

Cela prouve que $G(x, y, z)$ est divisible par $z - x$. Il existe un polynôme $Q(x, y, z)$ tel que

$$G(x, y, z) = (z - x)\,Q(x, y, z)$$

et $$A(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)\,Q(x, y, z)$$

ce qui démontre la proposition.

3° THÉORÈME. — **Si le corps K contient une infinité d'éléments distincts, deux polynômes à m indéterminées qui définissent la même application de K^m dans K sont égaux; autrement dit l'égalité numérique entraîne l'égalité formelle.**

Utilisons le raisonnement par récurrence. La propriété a été démontrée dans

le cas de une indéterminée. Supposons-la vraie dans le cas de $m-1$ indéterminées.

Cela posé, soient A et B deux polynômes aux indéterminées $x_1, \ldots, x_m$ qui définissent la même application de K^m dans K; autrement dit le polynôme $F = A - B$ prend la valeur numérique 0 en tout point de K^m. Ordonnons F suivant les puissances de x_m :

$$F(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) = \sum_{i=0}^{p} G_i(x_1, \ldots, x_{m-1}) x_m^i;$$

$\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ étant des éléments quelconques de K, le polynôme composé

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, x_m) = \sum_{i=0}^{p} G_i(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) x_m^i$$

est un polynôme à une indéterminée sur K qui prend la valeur 0 en tout point x_m de K. Ses coefficients sont donc des 0. Autrement dit chacun des polynômes $G_i(x_1, \ldots, x_{m-1})$ prend la valeur 0 en tout point $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ de K^{m-1}. Il est donc égal à O. Il en résulte

$$F = O \qquad \text{et} \qquad A = B.$$

La proposition est démontrée dans toute sa généralité.

VIII. DÉRIVATION. FORMULE DE TAYLOR

108. *Dérivée d'un polynôme à une indéterminée.* — 1° Introduction. — En analyse on définit la dérivée au point x de la fonction f, application de R dans R, par

$$f'(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}.$$

La définition suivante, tout en étant calquée sur la définition fonctionnelle de la dérivée, est purement algébrique.

Soit $A(x) \in K[x]$ un polynôme à une indéterminée sur le corps K. $A(x+y)$ est un polynôme à deux indéterminées, élément de $K[x, y]$. Ordonnons-le suivant les puissances croissantes de y :

$$A(x+y) = A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + \ldots + A_n(x)y^n. \qquad (1)$$

Les polynômes composés obtenus en faisant $y = 0$ dans les deux membres sont égaux; on a donc $A_0(x) = A(x)$. On constate que $A(x+y) - A(x)$ est divisible par y, le quotient étant

$$A_1(x) + A_2(x)y + \ldots + A_n(x)y^{n-1}.$$

En faisant $y = 0$ dans ce quotient on obtient le polynôme $A_1(x) \in K[x]$ qui sera dit dérivée du polynôme $A(x) \in K[x]$; on le notera $A'(x)$. Autrement dit :

2° DÉFINITION. — **La dérivée du polynôme $A(x) \in K[x]$ est le polynôme $A'(x) \in K[x]$ obtenu comme coefficient de y quand on ordonne $A(x+y) \in K[x, y]$ suivant les puissances de l'indéterminée y.**

Cas particuliers : 1° $A(x) = 0 \Longrightarrow A(x + y) = 0 \Longrightarrow A'(x) = 0.$
2° $A(x) = x \Longrightarrow A(x + y) = x + y \Longrightarrow A'(x) = I.$

THÉORÈME. — **A et B étant deux polynômes quelconques de $K[x]$ et α un élément quelconque de K :**

$$(A + B)' = A' + B'; \quad (AB)' = A'B + AB'; \quad (\alpha A)' = \alpha A'.$$

Posons $S = A + B; \quad P = AB; \quad Q = \alpha A.$

Les égalités $A(x + y) = A(x) + A'(x)y + A^*(x, y)y^2$
$B(x + y) = B(x) + B'(x)y + B^*(x, y)y^2$

entraînent des égalités de la forme

$$A(x + y) + B(x + y) = [A(x) + B(x)] + [A'(x) + B'(x)]y + S^*(x, y)y^2$$
$$A(x + y)B(x + y) = A(x)B(x) + [A'(x)B(x) + A(x)B'(x)]y + P^*(x, y)y^2$$
$$\alpha A(x + y) = \alpha A(x) + [\alpha A'(x)]y + Q^*(x, y)y^2$$

qui s'écrivent

$$S(x + y) = S(x) + S'(x)y + S^*(x, y)y^2 \qquad S'(x) = A'(x) + B'(x)$$
$$P(x + y) = P(x) + P'(x)y + P^*(x, y)y^2 \qquad P'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x).$$
$$Q(x + y) = Q(x) + Q'(x)y + Q^*(x, y)y^2 \qquad Q'(x) = \alpha A'(x)$$

ce qui démontre la proposition.

Cas particulier. — Si $A = B$, $(AB)' = A'B + AB'$ devient $(A^2)' = 2AA'$. Plus généralement on démontre par récurrence

$$(A^p)' = pA^{p-1}A', \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

En particulier $(x^p)' = px^{p-1}$.

APPLICATION. — Soit $A(x) = a_0 I + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.
On en déduit $A'(x) = a_1 I + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}$.
Par suite $A' = 0 \iff a_1 = 0, 2a_2 = 0, \ldots, na_n = 0$.

Si le corps K est de caractéristique nulle (n° 40), cette condition équivaut à $A = a_0 I$. En revanche, pour un corps de caractéristique non nulle, il existe des polynômes non constants dont la dérivée est 0.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous limiterons au cas où le corps K est de caractéristique nulle.

3° **Dérivées successives.** — La dérivée du polynôme A' est dite dérivée seconde, ou d'ordre 2, de A; on la note A'' ou $A^{(2)}$; on a

$$A''(x) = 2 \times 1\, a_2 I + 3 \times 2\, a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Plus généralement la dérivée p-ième ou d'ordre p est la dérivée de la dérivée d'ordre $p - 1$; on la note $A^{(p)}$. En supposant $p < n$

$$A^{(p)}(x) = p!\, a_p I + (p + 1)p \ldots 3.2\, a_{p+2} x + \ldots$$
$$+ n(n-1) \ldots (n-p+1)a_n x^{n-p}.$$

La dérivée n-ième est une constante : $A^{(n)}(x) = n!\, a_n\, I$.
Tout polynôme dérivée d'ordre supérieure à n est O.

REMARQUE. — Nous avons montré $(A + B)' = A' + B'$.
Nous en déduisons :

$$\forall p \geqslant 1, \quad (A + B)^{(p)} = A^{(p)} + B^{(p)}.$$

Cette relation s'étend à la dérivée p-ième d'une somme d'un nombre quelconque de polynômes.

4° **Formule de Taylor pour un polynôme à une indéterminée.** — Pour traiter cette question, nous anticiperons sur l'étude des espaces vectoriels de dimension finie.

Nous considérons un polynôme $A \in K[x]$, de degré n et un élément a de K.

La partie de $K[x]$ formée par O et par les polynômes dont le degré n'excède pas n constitue un espace vectoriel de dimension $n + 1$, sur K, et tout système de $n + 1$ polynômes de $K[x]$ dont les degrés sont respectivement 0, 1, ..., n constitue une base de cet espace vectoriel (156, 3°); c'est, en particulier, le cas pour le système

$$\mathcal{V} = \{ 1,\ x - a,\ (x - a)^2,\ \ldots,\ (x - a)^n \}.$$

Il en résulte que le polynôme A s'exprime, d'une et une seule manière, comme une combinaison linéaire des polynômes qui constituent $\mathcal{V}$, soit

$$A(x) = b_0 + \sum_{p=1}^{n} b_p (x - a)^p \tag{1}$$

En composant par $x = a$, on en déduit : $b_0 = A(a)$. (2)

D'autre part, d'après le n° 108, 3°, on peut associer à tout naturel p compris entre 1 et n un polynôme B_p tel que

$$A^{(p)}(x) = p!\, b_p + (x - a)\, B_p(x).$$

On en déduit :

$$A^{(p)}(a) = p!\, b_p \qquad \text{ou} \qquad b_p = \frac{A^{(p)}(a)}{p!} \tag{2'}$$

Compte-tenu de (2) et (2'), (1) s'écrit

$$A(x) = A(a) + \frac{A'(a)}{1}(x - a) + \frac{A''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{A^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{3}$$

relation qui est appelée *formule de Taylor*.

Pour $a = 0$, on obtient la formule, dite de Mac-Laurin,

$$A(x) = A(0) + \frac{A'(0)}{1!}x + \frac{A''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{A^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{4}$$

qui détermine un polynôme de $K[x]$, de degré n, quand on connaît sa valeur numérique et celle de ses dérivées au point 0 de K.

109. *Dérivées partielles d'un polynôme à plusieurs indéterminées.* — 1° Soit, pour fixer les idées, un élément A de l'anneau $K[x, y, z]$ des polynômes à trois indéterminées sur le corps K. Les dérivées partielles du premier ordre de ce polynôme sont par définition les polynômes obtenus en calculant la dérivée de A considéré successivement comme un polynôme à l'indéterminée x, à l'indéterminée y, à l'indéterminée z. On les représente respectivement par A'_x, A'_y, A'_z. Le polynôme A'_x est un élément de $K[x, y, z]$; il admet trois dérivées partielles du premier ordre que l'on représente par les notations A''_{xx}, A''_{xy}, A''_{xz}; on dit qu'il s'agit de dérivées partielles du second ordre du polynôme A.

EXEMPLE

$$A = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d$$
$$A'_x = 2(ax + b''y + b'z + c)$$
$$A'_y = 2(b''x + a'y + bz + c')$$
$$A'_z = 2(b'x + by + a''z + c'')$$

et

$$A''_{xx} = 2a; \quad A''_{xy} = 2b''; \quad A''_{xz} = 2b'$$
$$A''_{yx} = 2b''; \quad A''_{yy} = 2a'; \quad A''_{yz} = 2b$$
$$A''_{zx} = 2b'; \quad A''_{zy} = 2b; \quad A''_{zz} = 2a''.$$

Ce calcul montre que, tout au moins pour le polynôme considéré, $A''_{xy} = A''_{yx}$, $A''_{xz} = A''_{zx}$, $A''_{yz} = A''_{zy}$.

Il est clair que l'on peut définir des dérivées partielles des divers ordres. Une dérivée partielle d'ordre p peut s'indiquer par la notation $A^{(p)}_{xyxy\ldots zx}$, les indices inférieurs indiquant les variables par rapport auxquelles on calcule successivement les dérivées.

Montrons que le fait constaté plus haut est général, c'est-à-dire que *l'ordre des dérivations n'influe pas sur le résultat.* Observons tout d'abord que l'on peut passer d'un ordre à un autre par des échanges de deux dérivations consécutives. Si ce sont des dérivations par rapport aux indéterminées x, y, il suffit pour démontrer que le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel on les effectue, de considérer le polynôme aux indéterminées x, y obtenu avant ces dérivations, soit F et de vérifier que

$$F''_{xy}(x, y) = F''_{yx}(x, y).$$

Soit $F(x, y) = \sum ax^\alpha y^\beta$,

d'une part $F'_x(x, y) = \sum a\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$, $F''_{xy}(x, y) = \sum a\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$

et d'autre part $F'_y(x, y) = \sum a\beta x^\alpha y^{\beta-1}$, $F''_{yx}(x, y) = \sum a\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$.

Notation. — La dérivée d'ordre p du polynôme $A \in K[x, y, z]$ obtenue en effectuant dans un ordre quelconque α dérivations par rapport à x, β dérivations par rapport à y et γ dérivations par rapport à z peut-être obtenue en commençant par les α dérivations par rapport à x et continuant par les β dérivations par rapport à y pour terminer par les γ dérivations par rapport à z; on la représente par la notation

$$A^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}.$$

2° **Formule de Taylor pour un polynôme à plusieurs indéterminées.** — Reprenons, pour fixer les idées, un élément de K $[x, y, z]$, soit

$$A(x, y, z) = \Sigma\, k_{\alpha,\beta,\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

la somme Σ étant étendue à tous les triplets (α, β, γ) de naturels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma$ soit au plus égal au degré n de A.

Soit, d'autre part, a, b, c trois éléments de K. A partir de

$$A(x, y, z) = \Sigma\, k_{\alpha,\beta,\gamma}\, [(x - a) + a]^\alpha\, [(y - b) + b]^\beta\, [(z - c) + c]^\gamma,$$

on obtient, en utilisant la formule du binôme de Newton, une nouvelle expression de A de la forme

$$A(x, y, z) = \Sigma\, h_{\lambda,\mu,\nu}\, (x - a)^\lambda\, (y - b)^\mu\, (z - c)^\nu, \qquad (1)$$

la somme Σ étant, ici, étendue à tous les triplets (λ, μ, ν) de naturels positifs ou nuls tels que : $0 \leqslant \lambda + \mu + \nu \leqslant n$.

Pour l'un de ces triplets, (λ, μ, ν), le coefficient correspondant, $h_{\lambda,\mu,\nu}$ s'obtient en calculant, à partir de (1),

$$A^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(a, b, c).$$

Pour cela, considérons le polynôme

$$F(x, y, z) = (x - a)^\alpha\, (y - b)^\beta\, (z - c)^\gamma.$$

I. Si $\alpha < \lambda$, ou si $\beta < \mu$, ou si $\gamma < \nu$ on a

$$F^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(x, y, z) = 0.$$

II. Si $\alpha \geqslant \lambda$, $\beta \geqslant \mu$, $\gamma \geqslant \nu$, le polynôme

$$F^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(x, y, z)$$

n'est pas nul, mais — à moins que $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, $\gamma = \nu$ — il est divisible par l'un des polynômes $x - a$, $y - b$, $z - c$ si bien que

$$F^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(a, b, c) = 0.$$

III. Enfin si $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, $\gamma = \nu$, on a

$$F^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(x, y, z) = \lambda!\ \mu!\ \nu!$$

On en déduit

$$A^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(a, b, c) = \lambda!\ \mu!\ \nu!\ h_{\lambda,\mu,\nu}$$

et en portant dans (1)

$$A(x, y, z) = \sum \frac{1}{\lambda!\ \mu!\ \nu!}\, A^{(\lambda+\mu+\nu)}_{x^\lambda y^\mu z^\nu}(a, b, c).(x - a)^\lambda\, (y - b)^\mu\, (z - c)^\nu$$

cette relation est appelée *formule de Taylor* pour le polynôme A (x, y, z).

110. ***Polynômes homogènes.*** — 1° DÉFINITION. — **Un polynôme à plusieurs indéterminées est dit homogène si tous ses monômes ont le même degré.**

Par exemple le polynôme $x^3yz + y^3zx + z^3xy$ est homogène de degré 5. Plus généralement, un polynôme A aux trois indéterminées x, y, z, de degré n, est homogène si tous ses monômes sont de la forme $ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, α, β, γ étant des entiers positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = n$. Pour abréger, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$A = \sum ax^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

2° Calculons

$$A'_x = \sum \alpha a x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma; \quad A'_y = \sum \beta a x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma; \quad A'_z = \sum \gamma a x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1}.$$

Nous en déduisons, de proche en proche, que les dérivées partielles d'ordre $p \leqslant n$ d'un polynôme homogène de degré n sont des polynômes homogènes de degré $n - p$.

3° **Formule d'Euler.** — On constate

$$xA'_x + yA'_y + zA'_z = \sum(\alpha + \beta + \gamma) ax^\alpha y^\beta z^\gamma$$

ce qui permet d'écrire l'égalité d'Euler pour un polynôme homogène de degré n

$$\boxed{x\,A'_x(x, y, z) + y\,A'_y(x, y, z) + z\,A'_z(x, y, z) = n\,A(x, y, z).}$$

REMARQUE. — Étant donné le polynôme non homogène, élément de $K[x, y]$,

$$f(x, y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f \qquad (1)$$

rendre ce polynôme homogène, c'est lui associer le polynôme homogène de $K[x, y, z]$

$$F(x, y, z) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dxz + 2\,e\,yz + fz^2 \qquad (2)$$

obtenu en multipliant chaque monôme de f par une puissance convenable de l'indéterminée z, dite indéterminée d'homogénéité, de façon que tous les monômes deviennent de degré 2.

Plus généralement, on peut rendre homogène un polynôme de degré n quelconque.

On repasse de F à f (on dit alors qu'on détruit l'homogénéité de F) en remplaçant z par 1 :

$$F(x, y, 1) = f(x, y).$$

On vient d'établir ainsi une correspondance biunivoque entre les polynômes non homogènes à 2 (resp. q) indéterminées et les polynômes homogènes à 3 (resp. $q + 1$) indéterminées.

De l'égalité d'Euler écrite pour le polynôme $F(x, y, z)$, homogène de degré n, soit

$$n\,F(x, y, z) = x\,F'_x(x, y, z) + yF'_y(x, y, z) + z\,F'_z(x, y, z)$$

nous déduisons, en remplaçant z par 1,

$$n\,F(x, y, 1) = xF'_x(x, y, 1) + yF'_y(x, y, 1) + zF'_z(x, y, 1).$$

Nous savons que $F(x, y, 1) = f(x, y)$.

Nous constatons aisément que

$$F'_x(x, y, 1) = f'_x(x, y) \qquad \text{et} \qquad F'_y(x, y, 1) = f'_y(x, y).$$

Pour la symétrie des notations nous poserons $f'_z(x, y) = F'_z(x, y, 1)$ et nous écrirons ainsi l'égalité :

$$\boxed{n f(x, y) = x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) + f'_z(x, y).}$$

111. — *Polynômes symétriques.* — 1° DÉFINITION. — Un polynôme F à m indéterminées, ($m \geqslant 2$), est dit symétrique quand il est invariant dans toute substitution sur les indéterminées, c'est-à-dire quand

$$\forall\, s \in \mathfrak{S}_m \qquad F(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(m)}) = F(x_1, \ldots, x_m).$$

Les notations s et $\mathfrak{S}_m$ ont été introduites au n° 45.

C'est ainsi que

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2yz - 2zx - 2xy$$

est un polynôme symétrique à 3 indéterminées.

Si le polynôme symétrique $F(x_1, \ldots, x_m)$ contient le monôme $kx_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, dans lesquel les exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers positifs ou nuls, F contient chacun des monômes, (au nombre de $m!$, mais pas nécessairement distincts), de la forme

$$k(x_{s(1)})^{\alpha_1} \ldots (x_{s(m)})^{\alpha_m},$$

où s désigne un élément quelconque de $\mathfrak{S}_m$.

On peut donc écrire

$$F = \sum k\, U \qquad \text{avec} \qquad U(x_1, \ldots, x_m) = \sum x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m},$$

(les monômes qui constituent le polynôme symétrique U étant deux à deux distincts).

Nous pouvons toujours supposer que, dans le polynôme symétrique U, on a

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_m = 0,$$

ce que nous rappellerons en écrivant

$$U = S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}.$$

En particulier, nous appellerons *polynômes symétriques simples* les polynômes

$$S_\alpha = x_1^\alpha + \ldots + x_m^\alpha, \qquad (\alpha : \text{entier naturel}).$$

Nous utilserons d'autre part les *polynômes symétriques élémentaires*

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_m; \quad \sigma_2 = x_1x_2 + \ldots + x_1x_m + x_2x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m;$$
$$\ldots; \quad \sigma_m = x_1 \ldots x_m.$$

2° THÉORÈME. — **Tout polynôme symétrique s'exprime au moyen des polynômes symétriques simples, sous la forme d'un polynôme composé.**

Il suffit d'établir la proposition dans le cas du polynôme symétrique $S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ que nous avons introduit au 1°. Procédons par récurrence sur p.

I. La proposition est triviale pour $p = 1$.

II. Nous admettons la proposition jusqu'à l'entier $p - 1$ inclus, et nous calculons le produit

$$S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \times S_{\alpha_p}.$$

Nous obtenons (éventuellement une seule fois, ou plusieurs fois), d'une part $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p}$, d'autre part

$$S_{\alpha_1+\alpha_p, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}}; \quad S_{\alpha_1, \alpha_2+\alpha_p, \ldots \alpha_{p-1}}; \quad \ldots; \quad S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}+\alpha_p}.$$

La proposition s'étend ainsi au polynôme $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p}$.

Exemple. — Dans le cas de $p = 2$ nous avons

$$S_\alpha \times S_\beta = (x_1^\alpha + \ldots + x_m^\alpha)(x_1^\beta + \ldots + x_m^\beta) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta} + S_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 2\,S_{\alpha,\alpha} + S_{2\alpha} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

3° THÉORÈME FONDAMENTAL. — **A tout polynôme symétrique à m indéterminées, $F(x_1, \ldots, x_m)$, on peut associer un et un seul polynôme à m indéterminées, $G(x_1, \ldots, x_m)$ tel que F coïncide avec le polynôme $G(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ obtenu en composant G par les polynômes symétriques élémentaires de degré m.**

En ce qui concerne l'existence d'un polynôme G il suffit, d'après le 2°, de l'établir dans le cas particulier où $F(x_1, \ldots, x_m)$ est réduit à une fonction symétrique simple S_α.

Remarquons que S_1 et σ_1 coïncident.

a) Existence d'un polynôme G dans le cas de $m = 2$. (1)

Considérons le polynôme aux trois indéterminées X, x, y

$$(X - x)(X - y).$$

En ordonnant suivant les puissances de X nous avons l'égalité entre les polynômes

$$(X - x)(X - y) = X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2. \tag{1}$$

Les polynômes obtenus en composant les deux membres de (1) par $X = x$, puis par $X = y$, sont égaux, soit, en désignant par O le polynôme nul,

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = O, \qquad y^2 - \sigma_1 y + \sigma_2 = O. \tag{2}$$

Par addition :

$$S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\,\sigma_2 = O; \qquad \text{d'où} \qquad S_2 = \sigma_1^2 - 2\,\sigma_2.$$

(1) En première lecture, on pourra s'en tenir à $m = 2$ et $m = 3$.

Multiplions les deux membres de chacune des égalités (2) respectivement par x et y; puis ajoutons membre à membre :

$$S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad S_3 = \sigma_1^3 - 3\,\sigma_1\sigma_2.$$

Plus généralement, multiplions les deux membres de chacune des égalités (2) respectivement par $x^{\alpha-2}$ et $y^{\alpha-2}$, ($\alpha \geqslant 3$), et ajoutons :

$$S_\alpha - \sigma_1 S_{\alpha-1} + \sigma_2 S_{\alpha-2} = 0,$$

ce qui établit, par récurrence, la possibllité d'exprimer S_α en fonction de σ_1 et σ_2.

b) **Existence d'un polynôme G dans le cas de $m = 3$.**

Nous partons ici de

$$(X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 \qquad (1')$$

et nous en déduisons les égalités de polynômes

$$\left.\begin{aligned} x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 &= 0 \\ y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y - \sigma_3 &= 0 \\ z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

D'où

$$S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\,\sigma_3 = 0;$$
$$S_\alpha - \sigma_1 S_{\alpha-1} + \sigma_2 S_{\alpha-2} - \sigma_3 S_{\alpha-3} = 0, \quad (\alpha \geqslant 4).$$

On a vu que $S_1 = \sigma_1$. Par un calcul direct, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\,(yz + zx + xy).$$

ce qui s'écrit : $$S_2 = \sigma_1^2 - 2\,\sigma_2.$$

On en déduit, par récurrence, qu'il est possible d'exprimer S_α en fonction de σ_1, σ_2, σ_3.

En particulier : $$S_3 = \sigma_1^3 - 3\,\sigma_1\sigma_2 + 3\,\sigma_3.$$

****c*) **Existence d'un polynôme G dans le cas général.**

Nous partons de l'égalité entre polynômes aux $m + 1$ indéterminées X, x_1, ..., x_m,

$$\prod_{k=1}^{m} (X - x_k) = X^m - \sigma_1 X^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m \qquad (3)$$

Écrivons que les dérivées partielles, par rapport à X, des deux membres de (3) sont des polynômes égaux. Nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi_k = mX^{m-1} - (m-1)\,\sigma_1 X^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\,\sigma_{m-1} \qquad (4)$$

Φ_k désignant le quotient du polynôme

$$X^m - \sigma_1 X^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m$$

par le polynôme $X - x_k$. La division donne :

$$\Phi_k = X^{m-1} + (x_k - \sigma_1) X^{m-2} + \ldots + (x_k^p - \sigma_1 x_k^{p-1} + \ldots + (-1)^p \sigma_p) X^{m-p-1} + \ldots$$
$$\ldots + (x_k^{m-1} - \sigma_1 x_k^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\sigma_{m-1}).$$

Le second membre de (4) est ainsi égal au polynôme

$$mX^{m-1} + (S_1 - m\sigma_1)X^{m-2} + \ldots + (S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots + (-1)^p m\sigma_p)X^{m-p-1} + \ldots$$
$$\ldots + (S_{m-1} - \sigma_1 S_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} m\sigma_{m-1}),$$

ce qui se traduit par l'égalité des coefficients des diverses puissances de X, soit

$$\begin{cases} S_1 - \sigma_1 = 0 \\ S_2 - \sigma_1 S_2 + 2\sigma_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \ldots\ldots + (-1)^p p\sigma_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} - \sigma_1 S_{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1}(m-1)\sigma_{m-1} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

D'autre part, en composant les deux membres de (3) par $X = x_k$:

$$x_k^m - \sigma_1 x_k^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m = 0 \tag{6}$$

D'où, par addition,

$$S_m - \sigma_1 S_{m-1} + \ldots + (-1)^m m\sigma_m = 0 \tag{7}$$

et, plus généralement, les égalités (6) ayant été multipliées membre à membre par x_k^β, ($\beta \geqslant 1$), et ajoutées :

$$S_{m+\beta} - \sigma_1 S_{m+\beta-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m S_\beta = 0 \tag{8}$$

Les formules (5), (7) et (8) montrent la possibilité d'exprimer S_α en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Elles constituent ce que l'on appelle les *formules de Newton.*

d) Unicité du polynôme G *associé à un polynôme symétrique* F. Nous l'admettrons sans démonstration.

IX. RÉDUCTION DES POLYNÔMES SUR LES CORPS C ET R

112. ***Zéros des polynômes.*** — Nous considérons l'anneau K $[x]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps K de caractéristique nulle. Rappelons la définition et le théorème suivants (n° 98) :

DÉFINITION. — **On dit que $a \in$ K est zéro du polynôme $f(x)$ quand $f(a) = 0$.**

THÉORÈME. — **L'élément $a \in$ K est zéro du polynôme $f(x)$ si et seulement si $f(x)$ est divisible par $x - a$.**

1° Ordre de multiplicité d'un zéro. — DÉFINITION. — **On dit que $a \in$ K est zéro d'ordre p du polynôme $f(x)$ quand $f(x)$ est divisible par $(x-a)^p$ sans l'être par $(x-a)^{p+1}$.**

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme $g(x)$ tel que

$$f(x) = (x-a)^p g(x); \qquad g(a) \neq 0.$$

On dit que a est zéro *simple, double, triple* suivant que son ordre est 1, 2, 3; plus généralement un zéro d'ordre supérieur à 1 est dit *multiple.*

2° Condition pour qu'un élément donné a de K soit zéro d'ordre p du polynôme $f(x)$. — THÉORÈME I. — **Une condition nécessaire et suffisante**

pour que $a \in K$ soit zéro d'ordre p du polynôme $f(x)$ est que a soit zéro d'ordre $p-1$ du polynôme dérivé $f'(x)$ et que de plus $f(a) = 0$.

a) *La condition est nécessaire.* Si a est zéro d'ordre p de $f(x)$, il existe un polynôme $g(x)$ tel que

$$f(x) = (x-a)^p g(x); \qquad g(a) \neq 0.$$

Nous avons donc $f(a) = 0$. D'autre part, calculons

$$f'(x) = p(x-a)^{p-1} g(x) + (x-a)^p g'(x)$$

que nous pouvons écrire

$$f'(x) = (x-a)^{p-1} h(x) \text{ avec } h(x) = pg(x) + (x-a)g'(x).$$

Nous avons $h(a) = pg(a)$. Étant donné que $g(a) \neq 0$ et que le corps K est de caractéristique nulle, nous en déduisons $h(a) \neq 0$; a est zéro d'ordre $p-1$ de $f'(x)$.

En particulier un zéro simple de $f(x)$ n'est pas zéro de $f'(x)$.

b) *La condition est suffisante.* Supposons que le zéro a de $f(x)$ soit zéro d'ordre $p-1$ du polynôme dérivé $f'(x)$. Soit q l'ordre inconnu du zéro a pour le polynôme $f(x)$. D'après la première partie a est zéro d'ordre $q-1$ pour $f'(x)$. Nous déduisons de cela que $q-1 = p-1$ ou $q = p$.

THÉORÈME II. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in K$ soit zéro d'ordre p du polynôme $f(x)$ est**

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(p-1)}(a) = 0, \quad f^{(p)}(a) \neq 0. \qquad (1)$$

a) *La condition est nécessaire.* Si a est zéro d'ordre p de $f(x)$, il est, d'après le théorème I, zéro d'ordre $p-1$, $p-2$, ..., 1 de $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(p-1)}(x)$. Les relations (1) sont donc vérifiées.

b) *La condition est suffisante.* Par hypothèse les relations (1) sont vérifiées. $f(a) = 0$ implique que a est zéro de $f(x)$. Soit p' l'ordre inconnu de ce zéro. D'après la première partie, la première dérivée de $f(x)$ qui ne prend pas la valeur 0 pour $x = a$ est la dérivée d'ordre p'. Nous concluons de là que $p' = p$.

REMARQUE I. — On pourrait présenter la deuxième partie comme une conséquence immédiate de la formule de Taylor qui donne, en tenant compte des hypothèses (1),

$$f(x) = \frac{(x-a)^p}{p!}\left[f^{(p)}(a) + \frac{x-a}{p+1} f^{(p+1)}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-p}}{(p+1)(p+2)\ldots n} f^{(n)}(a)\right].$$

REMARQUE II. — Étant donné un polynôme $f(x)$, quelle que soit la constante C, tous les polynômes $F(x) = f(x) + C$ ont même dérivée $F'(x) = f'(x)$. Supposons que a soit zéro d'ordre $p-1$ pour $f'(x)$; c'est seulement pour $C = -f(a)$ que $F(a) = 0$. Pour cette valeur particulière de C l'élément a de K est zéro d'ordre p pour $F(x)$; pour toute autre valeur de C, a n'est pas zéro de $F(x)$.

113. ***Réduction des polynômes de*** $\mathbf{C}[x]$. 1° Nous admettons, conformément au programme, le théorème fondamental suivant (une démonstration qui fait appel à des notions d'analyse est donnée au tome II, appendice II, n° 295).

THÉORÈME DE D'ALEMBERT. — **Tout polynôme à une indéterminée sur le corps des complexes, de degré au moins égal à 1, a au moins un zéro.**

Autrement dit, soit $f(x)$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, dont les coefficients sont des nombres complexes, il existe au moins un nombre complexe a_1 tel que $f(a_1) = 0$, ou encore tel que $f(x)$ soit divisible par $x - a_1$.

2° On en déduit qu'il existe un polynôme $f_1(x) \in \mathbf{C}[x]$ tel que

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x); \qquad d^\circ(f_1) = n - 1.$$

Si $n > 1$, le polynôme $f_1(x)$ a au moins un zéro a_2 (pas forcément distinct de a_1); il existe par suite un polynôme $f_2(x)$ tel que

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x); \qquad d^\circ(f_2) = n - 2.$$

En continuant ainsi on aboutit à

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n(x); \qquad d^\circ(f_n) = 0.$$

Autrement dit, f_n est une constante non nulle. En la désignant par k on peut écrire

$$f(x) = k(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n); \qquad k \neq 0. \tag{1}$$

Dans la décomposition (1) groupons les polynômes égaux. Nous obtenons la décomposition

$$f(x) = k(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda; \qquad k \neq 0; \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = n \tag{2}$$

dans laquelle $a, b, \ldots, l$ désignent des nombres complexes distincts.

L'unicité de cette décomposition (2) résulte (105, 3°) de ce que les polynômes $x - a, \ldots, x - l$ sont normalisés et irréductibles (puisque de degré 1). Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[x]$ sont les polynômes de degré 1. Tout polynôme à coefficients complexes, de degré $n \geqslant 1$, est décomposable, de façon unique, en produit d'un complexe non nul et de polynômes normalisés du premier degré à coefficients complexes.**

3° La décomposition (2) peut s'écrire

$$f(x) = (x - a)^\alpha g(x); \quad g(x) = k(x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda. \tag{3}$$

On constate $g(a) \neq 0$ et on en déduit que α est l'ordre de multiplicité du zéro a de $f(x)$; d'où l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — **Tout polynôme de $\mathbf{C}[x]$ de degré $n \geqslant 1$ a exactement n zéros à condition de compter chacun d'eux avec son ordre de multiplicité.**

4° L'étude qui précède nous apprend que les polynômes de $C[x]$ admettant les zéros donnés $a, b, l, \ldots$, avec les ordres de multiplicité donnés $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont tous les polynômes de la forme

$$k(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-l)$$

k désignant une constante quelconque, non nulle.

On passe donc de l'un de ces polynômes à un autre en multipliant le premier par une constante. Il en résulte :

THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes sur C admettent les mêmes zéros, chacun au même ordre, est que les coefficients de même indice dans les deux polynômes soient proportionnels.**

5° **Généralisation. Notion de corps algébriquement clos.** — DÉFINITION. — **Un corps commutatif K est dit algébriquement clos si tout polynôme à une indéterminée sur K, de degré au moins égal à 1, a au moins un zéro.**

En raisonnant comme au 2° et au 3°, on démontre que **si K est un corps algébriquement clos, tout polynôme P de $K[x]$, de degré $n \geqslant 1$, est décomposable, de façon unique, en produit d'un élément non nul de K et de polynômes normalisés du premier degré de $K[x]$.** P admet n zéros, à condition de compter chacun d'eux avec son ordre de multiplicité.

Nous admettrons sans démonstration le résultat suivant :

Tout corps commutatif K peut être considéré comme sous-corps d'un corps commutatif algébriquement clos, unique à un isomorphisme près, appelé clôture algébrique de K.

C'est ainsi que C est la clôture algébrique de R.

114. ***Réduction des polynômes de*** $R[x]$. — 1° R étant un sous-corps de C, tout polynôme de degré n de $R[x]$ est aussi un polynôme de $C[x]$. A ce titre il admet n zéros dans le corps C.

2° THÉORÈME. — **Si $P(x)$ est un polynôme à coefficients réels et si a et $\bar{a}$ sont deux nombres complexes conjugués, $P(a)$ et $P(\bar{a})$ sont conjugués.**

Reprenons la démonstration donnée au n° 79, 4°.

Soit $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k, \quad p_k \in R.$$

a^k et $\bar{a}^k$ sont conjugués, ainsi que leurs produits par le nombre réel p_k; $P(a)$ et $P(\bar{a})$ sont ainsi les sommes de nombres complexes deux à deux conjugués, et par suite sont conjugués.

3° Considérons alors le polynôme $f(x) \in R[x]$, de degré n. Les polynômes dérivés sont aussi des éléments de $R[x]$. Quand dans l'un d'eux, on substitue à x les nombres complexes conjugués a et $\bar{a}$ on obtient deux nombres complexes conjugués. L'un de ces derniers est 0 si, et seulement si l'autre est 0. Il en résulte qu'il y a équivalence logique entre les conditions

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha-1)}(a) = 0; \quad f^{(\alpha)}(a) \neq 0 \qquad (1)$$

et les conditions

$$f(\bar{a}) = 0, \quad f'(\bar{a}) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha-1)}(\bar{a}) = 0; \quad f^{(\alpha)}(\bar{a}) \neq 0 \qquad (2)$$

qui sont respectivement des conditions nécessaires et suffisantes pour que a et $\bar{a}$ soient zéros d'ordre α du polynôme $f(x)$. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — **Si un nombre complexe a est zéro d'ordre α d'un polynôme à coefficients réels, il en est de même du nombre complexe conjugué $\bar{a}$.**

4° Dans la décomposition en facteurs premiers du polynôme à coefficients réels $f(x)$, considéré comme élément de $\mathbf{C}[x]$, séparons les couples de zéros complexes conjugués; $(a, \bar{a})$ étant l'un d'eux, groupons

$$(x - a)^\alpha (x - \bar{a})^\alpha = [(x - a)(x - \bar{a})]^\alpha.$$

Le polynôme

$$(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a} = x^2 + px + q,$$

dont les coefficients p et q sont réels, est irréductible sur $\mathrm{R}[x]$ puisqu'il n'admet aucun zéro sur le corps R, et que de ce fait il n'admet sur $\mathrm{R}[x]$ aucun diviseur du premier degré.

En conservant les facteurs qui correspondent aux zéros réels de $f(x)$, on obtient ainsi une décomposition du type

$$f(x) = k\,(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_l)^{\alpha_l}\,(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_m}. \qquad (3)$$

L'unicité de cette décomposition (3) résulte (**105, 3°**) du fait que les facteurs qui y interviennent sont normalisés et irréductibles sur $\mathrm{R}[x]$.

Retenons l'important résultat suivant :

THÉORÈME. — **Les seuls polynômes irréductibles de $\mathrm{R}[x]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ans zéro réel. Tout polynôme à coefficients réels, de degré $n \geqslant 1$, est décomposable de façon unique en produit d'un nombre réel non nul et de polynômes normalisés à coefficients réels, du premier degré, ou du second degré sans zéro réel.**

5° EXEMPLE I. — *Trinôme bicarré.* — Soit

$$x^4 + px^2 + q$$

un trinôme bicarré dans lequel p et q sont des nombres réels.

1° $p^2 - 4q > 0$. Le trinôme

$$y^2 + py + q$$

a des zéros réels distincts y' et y'', il est égal au produit $(y - y')(y - y'')$ par suite

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - y')(x^2 - y'').$$

Suivant que les zéros y' et y'' sont tous deux positifs, tous deux négatifs ou l'un positif et l'autre négatif les décompositions demandées sont

$$(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})(x + \sqrt{y''}), \quad (x^2 - y')(x^2 - y'')$$

ou

$$(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x^2 - y'').$$

2° $p^2 - 4q < 0$. Le coefficient q est positif et la somme $x^4 + q$ peut être regardée

comme celle des termes extrêmes du développement du carré de $x^2 + \sqrt{q}$. Le trinôme bicarré peut s'écrire

$$(x^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)x^2.$$

D'après l'hypothèse faite la différence $2\sqrt{q} - p$ est positive et l'on peut écrire la décomposition

$$x^4 + px^2 + q = [x^2 + x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}]\,[x^2 - x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}].$$

Ainsi

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \quad \text{ou} \quad (x^2 + x\sqrt{2} + 1)\,(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$
$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1)$$
$$x^{12} - 1 = (x^6 - 1)\,(x^6 + 1) = (x^2 - 1)\,(x^4 + x^2 + 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 - x^2 + 1)$$

d'où la décomposition

$$x^{12} - 1 = (x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)\,(x^2+x+1)\,(x^2-x+1)\,(x^2+x\sqrt{3}+1)\,(x^2-x\sqrt{3}+1).$$

EXEMPLE II. — *Mettre sous forme de produit de facteurs réels de degré 2 au plus le polynôme*

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^2 + x^2.$$

Nous pouvons chercher les zéros de $f(x)$ en écrivant

$$f(x) = [(x^2 - 3x + 2) + ix]\,[(x^2 - 3x + 2) - ix];$$

résolvons l'équation

$$x^2 + (i - 3)x + 2 = 0, \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{i-3}{2}\right)^2 = -\frac{3i}{2}. \tag{4}$$

Les racines carrées de $-\frac{3i}{2} = \frac{3}{4}(-2i)$ sont $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i)$, et par suite les racines de l'équation (4) sont

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Les zéros de $f(x)$ sont x_1, x_2 et les nombres qui leur sont respectivement conjugués $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$; x_1 et $\overline{x_1}$ sont les zéros d'un trinôme à coefficients réels

$$x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1\overline{x_1} = x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}.$$

De même x_2 et $\overline{x_2}$ sont les zéros du trinôme

$$x^2 - (x_2 + \overline{x_2})x + x_2\overline{x_2} = x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 4 - 2\sqrt{3},$$

et finalement

$$f(x) = [x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}]\,[x^2 - (3 - \sqrt{3})x + 4 - 2\sqrt{3}].$$

EXEMPLE III. — Signalons encore les deux décompositions suivantes auxquelles on parvient en calculant les racines n-ièmes de l'unité et réunissant les facteurs qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées

$$x^{2p} - 1 = (x-1)\,(x+1)\prod_{k=1}^{k=p-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{p} + 1\right)$$

$$x^{2p+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{k=p}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2p+1} + 1\right)$$

EXEMPLE IV. — Étudions enfin le polynôme incomplet du troisième degré

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

I. — Les coefficients p et q étant complexes, on peut chercher sous la forme $u + v$ les zéros de f;

$$f(u + v) = u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p).$$

Tout zéro de f est donc

$$\xi = u + v, \qquad u \text{ et } v \text{ vérifiant } uv = -\frac{p}{3}, \qquad u^3 + v^3 = -q.$$

Les nombres u^3 et v^3 sont nécessairement les zéros T_1 et T_2 du trinôme

$$T^2 + qT - \frac{p^3}{27}.$$

Inversement, si T_1 et T_2 sont connus, on associera une racine cubique u de T_1, et une racine cublque v de T_2 de façon que $uv = -\frac{p}{3}$; $\xi = u + v$ est un zéro de f.

On associera ensuite

uj et vj^2 d'où $\xi' = uj + vj^2$
uj^2 et vj d'où $\xi'' = uj^2 + vj$.

II. — Discutons la nature des zéros obtenus en supposant réels les coefficients p et q.

a) Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, T_1 et T_2 sont réels.

On peut prendre $u = \sqrt[3]{T_1}$, $v = \sqrt[3]{T_2}$, d'où
$\xi = \sqrt[3]{T_1} + \sqrt[3]{T_2}$ est un zéro réel de f.

Les autres zéros ξ' et ξ'' sont imaginaires conjugués.

b) Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, $T_1 = T_2 = -\frac{q}{2}$; on peut prendre $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, ou, comme l'hypothèse entraîne $-\frac{q}{2} = \left(\frac{3q}{2p}\right)^3$, $u = v = \frac{3q}{2p}$ d'où le zéro réel $\xi = \frac{3q}{p}$.

Les autres zéros ξ' et ξ'' sont confondus avec le nombre $\frac{3q}{2p}(j + j^2) = -\frac{3q}{2p}$, zéro double de f.

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \implies f = \left(x + \frac{3q}{2p}\right)^2\left(x - \frac{3q}{p}\right). \qquad \text{(cf. 128, 2°)}$$

c) Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, T_1 et T_2 sont imaginaires conjugués. On vérifiera que si u est une racine cubique de T_1, $v = \frac{-p}{3u}$ est l'imaginaire conjuguée $\left(-\frac{p}{3} = u\bar{u} \text{ ou } -\frac{p}{3} = |u|^2\right)$.

Par suite $\xi = u + v$ est réel, et il en est de même des zéros ξ' et ξ'' définis en (I).

Nous résumerons cette étude par le tableau suivant :

Nature des zéros de $x^3 + px + q$, (p, q *réels*).

$4p^3 + 27q^2 > 0$	1 zéro réel 2 zéros imaginaires conjugués
$4p^3 + 27q^2 = 0$	1 zéro double 1 zéro simple } réels
$4p^3 + 27q^2 < 0$	3 zéros réels

EXERCICES

1. — On considère les polynômes

$$P = \bar{2}\,x^2 + \bar{3}\,x + \bar{1}, \quad Q = \bar{3}\,x^2 - \bar{4}\,x + \bar{2}, \quad R = \bar{1}.x^2 + \bar{2}\,x - \bar{4},$$

définis sur le corps K, étudié à l'exercice n° 15, p. 62.

Mettre sous forme réduite et ordonnée les polynômes

$$PQ, \quad P^2 + Q^2, \quad PQR.$$

2. — Soit $Z[x]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée définis sur l'anneau Z des entiers relatifs.

a) Déterminer a pour que le polynôme

$$x^4 + 4\,x^3 + 7\,x^2 + ax + 3$$

soit le produit de deux polynômes du second degré appartenant à $Z[x]$.

b) Même question relativement au polynôme

$$x^4 - 4\,x^3 + ax^2 - 4\,x + 8.$$

c) Déterminer a et b pour que le polynôme

$$2\,x^4 + ax^3 + 12\,x^2 + bx + 15$$

soit décomposable en un produit de deux polynômes du second degré dans $Z[x]$.

3. — Le polynôme

$$2\,x^5 + 3\,x^4 - 18\,x^3 + 22\,x^2 - 11\,x + 2,$$

défini sur l'anneau Z des entiers relatifs, est-il décomposable en un produit de polynômes définis sur Z?

4. — Quels sont les zéros du polynôme :

$$P_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}?$$

5. — Soit $P(z)$ un polynôme à une indéterminée sur le corps C des complexes, de degré au plus égal à n, tel que

$$|z| = 1 \implies |P(z)| < M,$$

M étant un nombre réel positif donné. Démontrer que le module de chacun des coefficients de P est inférieur à M.

[*On remplacera z par les racines de l'équation* $z^{n+1} = 1$.]

6. — Déterminer deux polynômes P et Q, définis sur R, satisfaisant à la relation

$$[P(x)]^2 - 1 = (x^2 - 1)\,[Q(x)]^2.$$

7. — Chercher des relations entre les nombres complexes p, q, r, s, nécessaires et suffisantes pour que le polynôme

$$x^4 + 4\,px^3 + 6\,qx^2 + 4\,rx + s$$

soit le carré d'un autre polynôme.

8. — Démontrer que chacun des polynômes A écrits ci-dessous est divisible par le polynôme B correspondant

a) $\quad A = x^{3p+2} + x^{3q+1} + x^{3r}; \quad B = x^2 + x + 1 \quad (p, q, r, \in N).$

(Généraliser.)

b) $\quad A = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2\,x - 1; \quad B = x(x+1)(2\,x+1)$

(Déterminer le quotient).

c) $A = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1; \qquad B = (x-1)^2$

(Former le quotient).

d) $A = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n; \qquad B = (x-1)^3.$

e) $A = x^{n+1}\,\mathrm{sh}\,na - x^n\,\mathrm{sh}(n+1)a + \mathrm{sh}\,a; \qquad B = x^2 - 2x\,\mathrm{ch}\,a + 1.$

(Former le quotient).

f) $A = x^n\,\mathrm{sh}\,a - x\,\mathrm{sh}\,na + \mathrm{sh}(n-1)a; \qquad B = x^2 - 2x\,\mathrm{ch}\,a + 1.$

(Former le quotient).

9. — Déterminer le quotient (à l'ordre n) de la division des polynômes P et Q ordonnés suivant les puissances croissantes :

a) $P = x\sin\theta \qquad Q = 1 - 2x\cos\theta + x^2.$

b) $P = \sum_{0}^{n} x^k \qquad Q = \sum_{0}^{n} (-1)^k x^k.$

c) $P = \sum_{0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad Q = \sum_{0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$

10. — Déterminer des nombres réels p et q et un entier naturel n de manière que le polynôme $x^{3n} + px^{1n} + q$ soit divisible par $x^3 + x^2 + 1$.

11. — Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme

$$A = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n}$$

est-il divisible par le polynôme $B = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$?

12. — Étant donné deux polynômes A et B, trouver tous les polynômes C tels que chacun des trois polynômes divise le produit des deux autres.

13. — Démontrer que si le polynôme symétrique $P(x, y)$ est divisible par $(x - y)$, il est divisible par $(x - y)^2$.

14. — On dit que le polynôme $P(x, y)$ est *alterné* s'il satisfait à l'égalité

$$P(y, x) = -P(x, y).$$

Démontrer que si le polynôme $P(x, y)$ est alterné, il est divisible par $x - y$ et que le quotient est un polynôme symétrique.

Décomposer le polynôme

$$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$$

en un produit de polynômes du premier degré.

15. — On donne trois polynômes A, B, C. Peut-on déterminer des polynômes P et Q tels que $AP + BQ = C$?

Cas particulier : $A = x^3$, $B = x + 1$, $C = 1$.

16. — Déterminer tous les polynômes $U(x)$ et $V(x)$ satisfaisant à l'égalité :

$$x^n U(x) + (1 - x)^n V(x) = 1.$$

En particulier, déterminer ceux dont les degrés sont minimaux.

CHAPITRE VII

FRACTIONS RATIONNELLES

I. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

115. ***Fractions rationnelles sur un corps*** K — **1° Définitions.** — L'ensemble K[x] des polynômes à une indéterminée sur le corps K est un anneau d'intégrité. Or nous avons appris (41, 6°) à construire le corps des fractions d'un tel anneau.

Nous sommes ainsi conduits à énoncer :

DÉFINITION. — **On appelle fraction rationnelle à une indéterminée sur le corps** K **tout élément du corps des fractions de l'anneau d'intégrité** K[x].

Le corps des fractions rationnelles sur K se désigne par la notation K[[x]].

Une fraction rationnelle à m indéterminées est un élément du corps des fractions de l'anneau d'intégrité K[$x_1, \ldots, x_m$]; on note ce nouveau corps K[[$x_1, \ldots, x_m$]].

Rappelons brièvement quelques résultats. O et I désignent les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sur l'anneau K[x].

a) Les fractions rationnelles de K[[x]] sont les classes d'équivalence créées dans l'ensemble des couples (A, B) de polynômes ($B \neq O$), par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ ainsi définie :

(A, B) $\mathcal{R}$ (A′, B′) si et seulement si $AB' = A'B$.

On convient de noter cette relation d'équivalence sous la forme

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

On dit que $\frac{A}{B}$ est un *représentant* de la fraction rationnelle; A et B sont respectivement le *numérateur* et le *dénominateur* de ce représentant.

b) La multiplication et l'addition des fractions rationnelles sont définies par

$$\frac{A}{B} \times \frac{A'}{B'} = \frac{AA'}{BB'}; \qquad \frac{A}{B} + \frac{A'}{B'} = \frac{AB' + A'B}{BB'}.$$

Ces lois sont compatibles avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

c) En associant au polynôme A la fraction rationnelle représentée par $\frac{A}{I}$, on détermine un isomorphisme d'anneaux de K[x] sur la partie K* [[x]] de K[[x]] formée par les fractions rationnelles dont un représentant a pour

dénominateur I; on peut ainsi identifier $\frac{A}{I}$ et A de même que $K^*[[x]]$ et $K[x]$. Le quotient des polynômes A et B est ainsi le quotient des fractions rationnelles représentées par $\frac{A}{I}$ et $\frac{B}{I}$, donc la fraction rationnelle représentée par $\frac{A}{B}$.

2° **Fraction rationnelle irréductible.** — Considérons la fraction rationnelle dont un représentant est $\frac{A}{B}$ et désignons par D le P. G. C. D. des polynômes A et B. Nous avons

$$A = DA_0; \quad B = DB_0; \quad A_0 \text{ et } B_0 \text{ premiers entre eux.}$$

L'égalité $AB_0 = A_0B$ entraîne $\frac{A}{B} = \frac{A_0}{B_0}$; autrement dit $\frac{A_0}{B_0}$ est un autre représentant de la fraction rationnelle.

Soit alors $\frac{A'}{B'}$ un représentant quelconque de cette même fraction. Nous avons

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A_0}{B_0} \Longrightarrow A'B_0 = A_0B'.$$

Le polynôme A_0 divise $A'B_0$ et est premier avec B_0; il divise A' :

$$A' = MA_0 \Longrightarrow B' = MB_0. \qquad (1)$$

Inversement à tout polynôme $M \neq 0$ correspond un représentant $\frac{MA_0}{MB_0}$ de la fraction rationnelle considérée. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Les termes d'un représentant quelconque d'une fraction rationnelle s'obtiennent en multipliant par un même polynôme arbitraire (non nul) deux polynômes A_0 et B_0 premiers entre eux; $\frac{A_0}{B_0}$ est dit représentant irréductible de la fraction rationnelle.**

REMARQUE. — Les relations (1) montrent que A' et B' sont premiers entre eux si et seulement si M est une constante non nulle, ce qui montre l'unicité du représentant irréductible (à une multiplication près de ses termes par une même constante non nulle).

3° **Fraction rationnelle paire, impaire.** — DÉFINITION. — **Une fraction rationnelle est dite paire** (resp. impaire) **si le numérateur et le dénominateur de son représentant irréductible sont deux polynômes pairs** (resp. de parité différente).

4° **Notations.** — Par abus de langage nous dirons dorénavant :

a) *la fraction rationnelle* $\frac{A}{B}$ au lieu de *la fraction rationnelle dont un représentant est* $\frac{A}{B}$;

b) *les fractions rationnelles égales* $\frac{A}{B}$ *et* $\frac{A'}{B'}$ au lieu de *les représentants* $\frac{A}{B}$ *et* $\frac{A'}{B'}$ *de la même fraction rationnelle*;

c) *la fraction rationnelle irréductible* $\frac{A}{B}$ au lieu de *la fraction rationnelle dont le représentant irréductible est* $\frac{A}{B}$.

116. *Fractions rationnelles symétriques.* — DÉFINITION. — **Une fraction rationnelle à m indéterminées, ($m \geqslant 2$), est dite symétrique quand elle est invariante dans toute substitution sur les indéterminées.**

THÉORÈME. — **Toute fraction rationnelle symétrique (non nulle) admet un représentant formé de deux polynômes symétriques.**

Soit F une fraction rationnelle symétrique, élément de $K[[x_1, \ldots, x_m]]$ et $\frac{P}{Q}$ un représentant de F. On suppose $F \neq O$ et on pose $p = \inf(d^oP, d^oQ)$.

I. Si l'un des polynômes P ou Q est symétrique, l'autre l'est aussi (sans quoi F ne serait pas symétrique); la proposition est établie.

II. Supposons que ni P, ni Q n'est symétrique. C'est qu'il existe une transposition $\tau \in \mathfrak{S}_m$ telle que :

$$Q(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(m)}) \neq Q(x_1, \ldots, x_m).$$

Supposons, pour fixer les idées, que τ échange x_1 et x_2. Nous avons

$$F = \frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{P(x_2, x_1, \ldots, x_m)}{Q(x_2, x_1, \ldots, x_m)}$$

D'où
$$F = \frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_m) - P(x_2, x_1, \ldots, x_m)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) - Q(x_2, x_1, \ldots, x_m)}.$$

Les deux polynômes U et V, qui constituent le nouveau représentant de F, sont divisibles par $x_1 - x_2$, ce qui résulte de

$$U(x_1, x_1, \ldots, x_m) = O \qquad \text{et} \qquad V(x_1, x_1, \ldots, x_m) = O.$$

Soient P_1 et Q_1 les quotients de U et V pour $x_1 - x_2$. F admet $\frac{P_1}{Q_1}$ pour représentant.

Si P_1 et Q_1 ne sont pas symétriques, nous pouvons itérer et construire un nouveau représentant $\frac{P_2}{Q_2}$ de F... Deux cas sont possibles, compte-tenu de ce que les degrés diminuent d'une unité à chaque itération :

α) En moins de p opérations nous obtenons un représentant formé de polynômes symétriques de degrés au moins égaux à 1.

β) Au bout de p opérations nous obtenons un représentant $\frac{P_p}{Q_p}$ de F formé

de deux polynômes dont l'un est une constante non nulle, et, par suite, un polynôme symétrique; il en est nécessairement de même pour l'autre polynôme.

La proposition est ainsi établie dans tous les cas.

117. *Fonction rationnelle.* — 1° DÉFINITION. — **Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible sur le corps K; la fonction qui à tout élément ξ de K, qui n'est pas zéro du polynôme B, fait correspondre $\frac{A(\xi)}{B(\xi)} \in K$ est appelée fonction rationnelle.**

REMARQUE. — Sur un corps K qui admet une infinité d'éléments distincts considérons deux fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$ telles que

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = \frac{A'(\xi)}{B'(\xi)}, \quad \forall \xi \in K, \ \xi \text{ n'étant zéro ni de B ni de B'.}$$

Les polynômes AB' et A'B prennent la même valeur numérique en tous les points de K qui ne sont ni zéro de B ni zéro de B' et par suite en une infinité de points de K. Il en résulte (103, 6°) qu'ils sont égaux, ce qui entraîne que les fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$ sont égales.

2° Plus généralement nous pourrions définir :

a) la fraction rationnelle $\frac{A(X)}{B(X)}$ composée d'un polynôme X par une fraction rationnelle irréductible $\frac{A}{B}$;

b) la fraction rationnelle $A\left(\frac{X}{Y}\right)$ composée d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{X}{Y}$ par un polynôme A;

c) la fraction rationnelle $\frac{A\left(\frac{X}{Y}\right)}{B\left(\frac{X}{Y}\right)}$ composée d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{X}{Y}$ par une fraction rationnelle irréductible $\frac{A}{B}$.

118. *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur un corps* K *quelconque.* — 1° *Lemme I et définition.* — **Toute fraction rationnelle F peut se mettre d'une façon et d'une seule sous la forme d'un polynôme E ou de la somme d'un polynôme E et d'une fraction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Le polynôme E est dit partie entière de la fraction rationnelle F; on note $E = \mathcal{E}(F)$.**

Soit en effet $F = \frac{P}{Q}$, avec $Q \neq 0$. Les relations

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_0}{Q}; \qquad P_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad d^\circ(P_0) < d^\circ(Q) \qquad (1)$$

sont équivalentes aux relations

$$P = QE + P_0; \qquad P_0 = O \qquad \text{ou} \qquad d^o(P_0) < d^o(Q)$$

qui sont vérifiées si, et seulement si E et P_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q.

REMARQUE I. — Les communs diviseurs de P_0 et Q sont les communs diviseurs de P et Q. Il en résulte que si $\frac{P}{Q}$ est irréductible, $\frac{P_0}{Q}$ l'est aussi.

REMARQUE II. — Il résulte du lemme I que

$$\mathcal{E}\left(\frac{P}{Q}\right) = O \iff d^o(P) < d^o(Q) \qquad \text{ou} \qquad P = O$$
$$E = \mathcal{E}(F) \iff \mathcal{E}(F - E) = O.$$

La partie entière $\mathcal{E}(F)$ de la fraction rationnelle F est caractérisée par le fait qu'on peut écrire

$$F = \mathcal{E}(F) + F_0, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{E}(F_0) = O. \tag{2}$$

REMARQUE III. — La somme de deux fractions rationnelles dont la partie entière est O est une fraction rationnelle dont la partie entière est O.

$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{P_0}{Q}; & d^o(P_0) < d^o Q \qquad \text{ou} \qquad P_0 = O \\ F'_0 = \dfrac{P'_0}{Q'}; & d^o(P'_0) < d^o Q' \qquad \text{ou} \qquad P'_0 = O \end{cases}$$

entraîne en effet

$$F_0 + F'_0 = \frac{Q'P_0 + QP'_0}{QQ'}; \qquad d^o(Q'P_0 + QP'_0) < d^o(QQ') \qquad \text{ou} \qquad Q'P_0 + QP'_0 = O.$$

REMARQUE IV. — *La somme de deux fractions rationnelles a pour partie entière la somme de leurs parties entières.*

$$\begin{cases} F = \mathcal{E}(F) + F_0; & \mathcal{E}(F_0) = O \\ F' = \mathcal{E}(F') + F'_0; & \mathcal{E}(F'_0) = O \end{cases}$$

entraîne en effet, d'après la remarque III,

$$F + F' = \mathcal{E}(F) + \mathcal{E}(F') + (F_0 + F'_0); \qquad \mathcal{E}(F_0 + F'_0) = O.$$

Le résultat énoncé à la Remarque II permet alors d'écrire la formule :

$$\mathcal{E}(F + F') = \mathcal{E}(F) + \mathcal{E}(F').$$

La propriété s'étend de proche en proche à la somme de n fractions rationnelles.

2° *Lemme II.* — **Toute fraction rationnelle irréductible $\frac{P}{Q}$ dont la partie entière est O et dont le dénominateur est le produit $Q = Q_1Q_2 \dots Q_n$ de n polynômes**

premiers entre eux deux à deux peut être considérée d'une façon et d'une seule comme la somme de n fractions rationnelles de parties entières égales à O, de dénominateurs respectifs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

a) *Existence d'une décomposition dans le cas de* $Q = Q_1Q_2$. Les polynômes Q_1 et Q_2 étant premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bezout, deux polynômes U_1 et U_2 tels que

$$U_1Q_2 + U_2Q_1 = I \implies \frac{I}{Q_1Q_2} = \frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_2} \implies \frac{P}{Q} = \frac{PU_1}{Q_1} + \frac{PU_2}{Q_2}.$$

D'après le lemme I, il existe des polynômes E_1, R_1, E_2, R_2 tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{PU_1}{Q_1} = E_1 + \dfrac{R_1}{Q_1}; & \mathcal{E}\left(\dfrac{R_1}{Q_1}\right) = O \\ \dfrac{PU_2}{Q_2} = E_2 + \dfrac{R_2}{Q_2}; & \mathcal{E}\left(\dfrac{R_2}{Q_2}\right) = O. \end{cases}$$

On constate par addition, en utilisant la remarque IV du 1°, que $E_1 + E_2$ est la partie entière de $\dfrac{P}{Q}$; cette partie entière étant O par hypothèse, on a finalement

$$\frac{P}{Q} = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_2}; \qquad \mathcal{E}\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) = O; \qquad \mathcal{E}\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) = O. \tag{3}$$

Dans la formule (3), R_1 et R_2 sont distincts de O, car si, par exemple, on avait $R_1 = O$, la fraction $\dfrac{P}{Q_1Q_2}$ serait égale à $\dfrac{R_2}{Q_2}$, et $\dfrac{P}{Q}$ ne serait pas irréductible. Par suite, dans la formule (3), on peut préciser

$$d^\circ R_1 < d^\circ Q_1 \qquad \text{et} \qquad d^\circ R_2 < d^\circ Q_2.$$

b) *Unicité de la décomposition dans le cas de* $Q = Q_1Q_2$. Supposons que, par un autre procédé, on ait trouvé une autre décomposition du même type que (3), soit

$$\frac{P}{Q} = \frac{R_1^*}{Q_1} + \frac{R_2^*}{Q_2}; \qquad \mathcal{E}\left(\frac{R_1^*}{Q_1}\right) = O; \qquad \mathcal{E}\left(\frac{R_2^*}{Q_2}\right) = O.$$

On obtient, par différence

$$\frac{R_1^* - R_1}{Q_1} = \frac{R_2 - R_2^*}{Q_2} \implies Q_2(R_1^* - R_1) = Q_1(R_2 - R_2^*).$$

Le polynôme Q_1 est premier avec Q_2 et il divise $Q_2(R_1^* - R_1)$; il en résulte qu'il divise $R_1^* - R_1$, ce qui, compte tenu de $\mathcal{E}\left(\dfrac{R_1^* - R_1}{Q_1}\right) = O$, n'est possible que si $R_1^* - R_1 = O$. Ainsi

$$R_1^* = R_1 \quad \text{ce qui entraîne} \quad R_2^* = R_2.$$

c) *Existence et unicité de la décomposition dans le cas général.* Soit $Q = Q_1Q_2 \dots Q_n$. Si la décomposition

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{Q_i}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{R_i}{Q_i}\right) = 0 \tag{1}$$

existe, elle peut s'écrire

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} + \frac{R_n}{Q_n}; \quad \frac{P'}{Q'} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{R_i}{Q_i}\right) \Longrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{P'}{Q'}\right) = 0.$$

Inversement, le polynôme Q_n qui est premier séparément avec $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$, est premier avec le produit $Q' = Q_1Q_2 \dots Q_{n-1}$. Il résulte du début de cette étude que l'on peut déterminer à partir de P et de $Q = Q'Q_n$, d'une façon et d'une seule, deux polynômes P' et R_n tels que

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} + \frac{R_n}{Q_n}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{P'}{Q'}\right) = 0; \quad \mathcal{E}\left(\frac{R_n}{Q_n}\right) = 0. \tag{5}$$

Cela posé, il suffit de raisonner par récurrence et d'admettre que le lemme II a été démontré dans le cas où le dénominateur de la fraction est le produit de $n - 1$ polynômes pour être en mesure de déterminer à partir de P' et de Q', d'une manière et d'une seule, $n - 1$ polynômes $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ tels que

$$\frac{P'}{Q'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_i}{Q_i}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{R_i}{Q_i}\right) = 0. \tag{6}$$

De (5) et (6) on déduit l'existence et l'unicité de la décomposition (4).

REMARQUE. — La décomposition (4) peut même s'écrire, comme on l'a vu en *a*) pour $n = 2$,

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{Q_i}; \quad d^0(R_i) < d^0(Q_i).$$

3° *Lemme III.* — **Toute fraction rationnelle irréductible $\frac{A_0}{A^\alpha}$ (α naturel), dont la partie entière est 0, peut se mettre d'une façon et d'une seule sous la forme**

$$\frac{A_0}{A^\alpha} = \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{A_h}{A^h}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_h}{A}\right) = 0. \tag{7}$$

a) *Existence d'une décomposition de la forme* (7). La division euclidienne de A_0 par A donne

$$A_0 = AU_1 + A_\alpha; \quad d^0(A_\alpha) < d^0(A)$$

(ici $A_\alpha = 0$ est exclu du fait que A_0 et A sont premiers entre eux). Écrivons

$$\frac{A_0}{A^\alpha} = \frac{U_1}{A^{\alpha-1}} + \frac{A_\alpha}{A^\alpha}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_\alpha}{A}\right) = 0. \tag{8}$$

Si $\mathcal{E}\left(\frac{U_1}{A}\right) = 0$, la proposition est démontrée. Sinon la division de U_1 par A donne

$$U_1 = AU_2 + A_{\alpha-1}; \quad d^0(A_{\alpha-1}) < d^0(A) \quad \text{ou} \quad A_{\alpha-1} = 0$$

et on en déduit

$$\frac{A_0}{A^\alpha} = \frac{U_2}{A^{\alpha-2}} + \frac{A_{\alpha-1}}{A^{\alpha-1}} + \frac{A_\alpha}{A^\alpha}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_{\alpha-1}}{A}\right) = 0; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_\alpha}{A}\right) = 0. \qquad (9)$$

Si $\mathcal{E}\left(\frac{U_2}{A}\right) = 0$ la proposition est démontrée. Sinon on divise U_2 par A, et ainsi de suite. L'hypothèse $d^0(A_0) < \alpha\, d^0(A)$ entraîne

$$d^0(U_1) = d^0(A_0) - d^0(A) < (\alpha - 1)\, d^0(A); \quad d^0(U_2) < (\alpha - 2)\, d^0(A) \ldots$$

On finit par obtenir un quotient U dont le degré est inférieur à celui de A (dans le cas le plus défavorable il s'agit de $U_{\alpha-1}$, obtenu au moyen de $\alpha - 1$ divisions); on dispose alors d'une décomposition du type (7).

b) *Unicité.* Supposons que, par un autre procédé, on ait trouvé une autre décomposition du même type que (7), soit

$$\frac{A_0}{A^\alpha} = \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{A_h^*}{A^h}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A^*}{A}\right) = 0.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par A^α

$$A_0 = A \sum_{h=1}^{\alpha-1} A_h^* A^{\alpha-h-1} + A_\alpha^*; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_\alpha^*}{A}\right) = 0$$

ce qui montre que A_α^* est le reste de la division euclidienne de A_0 par A; d'où en vertu de l'unicité de ce reste, $A_\alpha^* = A_\alpha$.

En raisonnant de la même façon à partir de $\frac{A_0'}{A^{\alpha-1}} = \frac{A_0}{A^\alpha} - \frac{A_\alpha}{A^\alpha}$, on obtient $A_{\alpha-1}^* = A_{\alpha-1}$, et ainsi de suite.

4° *Théorème général et définition.* — **Étant donnée une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ irréductible sur le corps K, le dénominateur admettant la décomposition $Q = A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$ en facteurs A, B, ..., L irréductibles sur K, il existe dans l'anneau $K[x]$ un système et un seul de polynômes E, A_i, B_j, ..., L_k vérifiant les conditions (10)**

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\frac{P}{Q} = E + \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{A^\alpha} + & \mathcal{E}\left(\frac{A_i}{A}\right) = 0 & i = 1, 2, \ldots, \alpha; & A_\alpha \neq 0 \\
+ \frac{B_1}{B} + \frac{B_2}{B^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{B^\beta} + & \mathcal{E}\left(\frac{B_j}{B}\right) = 0 & j = 1, 2, \ldots, \beta; & B_\beta \neq 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+ \frac{L_1}{L} + \frac{L_2}{L^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{L^\lambda} & \mathcal{E}\left(\frac{L_k}{L}\right) = 0 & k = 1, 2, \ldots, \lambda; & L_\lambda \neq 0
\end{array}$$

Calculer ces polynômes c'est décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

a) *Existence d'une décomposition de la forme* (10). — Le lemme I permet d'écrire, d'une manière et d'une seule,

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_0}{Q}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{P_0}{Q}\right) = 0. \qquad (11)$$

Le polynôme E est la partie entière de $\frac{P}{Q}$.

Les polynômes irréductibles A, B, ... L sont premiers entre eux deux à deux; il en résulte que les polynômes A^α, B^β, ... L^λ sont premiers entre eux deux à deux et qu'ils peuvent jouer le rôle des polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ du lemme II. D'où la possibilité d'écrire, d'une manière et d'une seule,

$$\frac{P_0}{Q} = \frac{A_0}{A^\alpha} + \frac{B_0}{B^\beta} + \ldots + \frac{L_0}{L^\lambda}; \quad d^o(A_0) < d^o(A^\alpha), \text{ etc...} \qquad (12)$$

Pour chacune des fractions rationnelles qui intervient au second membre de (12), le lemme III permet d'écrire, d'une manière et d'une seule,

$$\frac{A_0}{A^\alpha} = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{A^\alpha}; \quad \mathcal{E}\left(\frac{A_i}{A}\right) = 0. \qquad (13)$$

On en déduit l'existence d'une décomposition du type (10).

b) *Unicité.* L'unicité provient de ce que toute décomposition de ce type obtenue par un moyen quelconque, peut être ramenée aux formes successives (11), (12), (13). Or chacune de ces formes est unique; la décomposition considérée ne diffère donc pas de la décomposition mise en évidence en a).

II. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE SUR LE CORPS DES COMPLEXES ET SUR CELUI DES RÉELS

119. *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur le corps* C *des complexes.* — 1° **Pôles.** — Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur C, irréductible. Nous savons (113) que le polynôme Q admet une décomposition unique en facteurs irréductibles sur C et que cette décomposition est de la forme

$$Q = k(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda.$$

Les nombres complexes $a, b, \ldots, l$ sont les zéros sur C du polynôme Q; les entiers naturels $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont les ordres de multiplicité de ces zéros; k est une constante complexe non nulle, que nous pouvons supposer égale à 1 puisque les deux termes d'une fraction rationnelle irréductible peuvent être multipliés par une constante non nulle arbitraire.

DÉFINITION. — **On dit que $a \in C$ est pôle d'ordre α d'une fraction rationnelle irréductible sur C quand a est zéro d'ordre α du dénominateur de la fraction.**

2° **Partie polaire relative à un pôle.** — Les polynômes A, B, ..., L de la théorie générale sont ici $(x - a)$, $(x - b)$, ..., $(x - l)$; du fait que ces

polynômes sont du premier degré, il résulte que les polynômes $A_h \ldots$ de la théorie générale, qui vérifient $\mathcal{E}\left(\frac{A_h}{A}\right) = 0$, sont des constantes.

Nous avons donc la décomposition en éléments simples

$$\frac{P}{Q} = E + F_a + F_b + \ldots + F_l \qquad (1)$$

avec

$$F_a = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}, \ldots, F_l = \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}$$
$$A_\alpha \neq 0, \ \ldots, \ L_\lambda \neq 0$$

et cette décomposition est unique.

La fraction rationnelle F_a étant obtenue en composant la fraction rationnelle $\frac{1}{x-a}$ par le polynôme de degré α, sans terme constant,

$$\Phi_a(u) = A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_\alpha u^\alpha,$$

nous dirons que F_a *est un polynôme en* $\frac{1}{x-a}$, sans terme constant.

Nous constatons que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q} - F_a$ n'admet pas le pôle a, puisqu'elle s'écrit $E + F_b + \ldots + F_l$. Inversement soit F_a^* un polynôme en $\frac{1}{x-a}$, sans terme constant, tel que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q} - F_a^*$ n'admet pas le pôle a. Cette fraction rationnelle s'écrit alors, en tenant compte de (1)

$$\frac{P}{Q} - F_a^* = (E + F_b + \ldots + F_l) + (F_a - F_a^*). \qquad (2)$$

$E + F_b + \ldots + F_l$ n'admet pas le pôle a.

$F_a - F_a^*$ admettrait le pôle a si F_a et F_a^* n'étaient pas égaux. Nécessairement $F_a^* = F_a$, et par suite F_a peut être caractérisé comme étant le polynôme en $\frac{1}{x-a}$, sans terme constant, qui, retranché de la fraction rationnelle F, donne une fraction rationnelle n'ayant plus a pour pôle.

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible sur le corps des complexes; on peut associer à chacun de ses pôles a, d'ordre α, un polynôme en $\frac{1}{x-a}$ sans terme constant, et un seulement, soit F_a, tel que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q} - F_a$ n'admet pas le pôle a. Ce polynôme, dont le degré est égal à α, est appelé partie polaire** (ou partie principale) **de la fraction rationnelle relative au pôle a.**

Toute fraction rationnelle irréductible sur C peut être considérée comme la somme de sa partie entière et des parties polaires relatives à ses divers pôles.

REMARQUE I. — Ajouter un polynôme à une fraction rationnelle équivaut à ajouter ce polynôme à la partie entière; on n'altère ainsi ni les pôles ni les parties polaires relatives à ces pôles.

REMARQUE II. — Si F_a est la partie polaire de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ relative au pôle a, c'est aussi la partie polaire relative à ce pôle de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}+\frac{U}{V}$ obtenue en ajoutant à la première une fraction rationnelle n'admettant pas a pour pôle. En effet du fait que $\frac{P}{Q}-F_a$ et $\frac{U}{V}$ n'admettent pas le pôle a, il résulte qu'il en est de même pour

$$\left(\frac{P}{Q}+\frac{U}{V}\right)-F_a.$$

3° **Calcul direct de la partie polaire relative au pôle a, d'ordre α.** — On a $Q(x)=(x-a)^\alpha G(x)$; $G(a)\neq 0$; $P(a)\neq 0$, et

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{(x-a)^\alpha}\frac{P(x)}{G(x)}. \qquad (3)$$

En considérant $x-a=X$ comme une indéterminée auxiliaire, on peut écrire

$$P(x)=P(a+X)=\varphi(X); \qquad G(x)=G(a+X)=\psi(X).$$

En divisant suivant les puissances croissantes de X, et à l'ordre $\alpha-1$, le polynôme $\varphi(X)$ par le polynôme $\psi(X)$ on obtient

$$\varphi(X)=\psi(X)[A_\alpha+A_{\alpha-1}X+\ldots+A_1X^{\alpha-1}]+X^\alpha\theta(X),$$

les A_i étant des constantes. $\left(A_o=\frac{P(a)}{Q(a)}\neq 0\right)$.

En revenant à x, on en déduit, en posant $\theta(x-a)=H(x)$

$$P(x)=G(x)\,[A_\alpha+A_{\alpha-1}(x-a)+\ldots+A_1(x-a)^{\alpha-1}]+(x-a)^\alpha H(x), \quad (4)$$

relation qui, compte tenu de (3), entraîne

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{H(x)}{G(x)}.$$

Posons $$F_a=\frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}.$$

La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}-F_a=\frac{H}{G}$ n'admet pas le pôle a, puisque $G(a)\neq 0$. Il en résulte que F_a est la partie polaire de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ relative au pôle a.

EXEMPLE. — *Décomposer* $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ *en éléments simples sur* C.

$P=1$; $Q=(x^2+x+1)^2$; $d^o(P)<d^o(Q)$; la partie entière est O.

Les zéros du dénominateur sont les nombres complexes conjugués

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et nous pouvons écrire la fraction sous la forme $\dfrac{1}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}$.

Pour trouver la partie principale relative au pôle double α, nous posons $x = \alpha + X$ et nous cherchons le quotient à l'ordre 1 dans la division, suivant les puissances croissantes de X, de 1 par $(\alpha - \beta + X)^2$; il nous suffit de chercher le quotient de 1 par $-3 + 2i\sqrt{3}X$ qui est $-\dfrac{1}{3} - 2i\dfrac{\sqrt{3}}{9}X$; la partie principale cherchée est donc

$$-\frac{1}{3(x-\alpha)^2} - \frac{2i\sqrt{3}}{9(x-\alpha)}.$$

Nous obtiendrons la partie principale relative au pôle β en observant que le calcul qui vient d'être fait pour le pôle α se répète pour le pôle β en changeant i en $-i$, et finalement la décomposition cherchée est

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{(x-\beta)^2}\right] - \frac{2i\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right].$$

4° **Cas d'un pôle simple :** $Q(x) = (x-a)G(x)$; $G(a) \neq 0$.

Nous avons ici :

$$\frac{P(x)}{(x-a)G(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{H(x)}{G(x)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{P(x)}{G(x)} = A + \frac{(x-a)H(x)}{G(x)}.$$

Nous en déduisons, en faisant $x = a$, $A = \dfrac{P(a)}{G(a)}$.

REMARQUE. — En écrivant que les polynômes égaux $Q(x)$ et $(x-a)G(x)$ ont pour dérivées des polynômes égaux nous obtenons

$$Q'(x) = (x-a)G'(x) + G(x).$$

Nous en déduisons $G(a) = Q'(a)$ et $A = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$, formule à utiliser si $Q'(x)$ est simple, par exemple si $Q(x) = lx^n + m$.

EXEMPLE : *décomposer* $\dfrac{1}{x^7-1}$ *en éléments simples sur* C.

$P = 1$; $Q = x^7 - 1$; $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$; la partie entière est O.

La fraction rationnelle admet les sept pôles simples $\omega_k = \cos\dfrac{2k\pi}{7} + i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$; $k = -3, \ldots, 0, \ldots, +3$.

La partie principale relative au pôle ω_k est $\dfrac{A_k}{x-\omega_k}$ avec

$$A_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{7\omega_k^6} = \frac{\omega_k^7}{7\omega_k^6} = \frac{\omega_k}{7}.$$

D'où la décomposition

$$\frac{1}{x^7-1} = \frac{1}{7}\sum_{k=-3}^{+3}\frac{\omega_k}{x-\omega_k}; \qquad \omega_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}.$$

120. *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur le corps* R *des réels.* — 1° **Pôles.** — Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle

sur R, irréductible. Nous savons (n° **114**) que le polynôme Q admet une décomposition unique en facteurs irréductibles sur R et que cette décomposition est de la forme

$$Q = k \prod (x - a)^{\alpha} \prod [(x - m)^2 + n^2]^{\mu}.$$

Les zéros de Q sur C sont : 1° les nombres réels $a, \ldots$; 2° les nombres complexes conjugués $m \pm in, \ldots$.

Ces nombres sont encore appelés pôles de $\frac{P}{Q}$ en vertu de la convention suivante :

Lorsque $\frac{P}{Q}$ *est une fraction rationnelle irréductible sur* R, *tout zéro de* Q *sur* C *est appelé pôle de* $\frac{P}{Q}$.

2° **Éléments simples de première et deuxième espèces.** — Les polynômes A, B, ..., L de la théorie générale sont ici d'une part des polynômes du premier degré sur R : $(x - a)$ ..., d'autre part des polynômes du second degré sur R : $(x - m)^2 + n^2$, ..., qui n'admettent aucun zéro sur R. La théorie générale du n° **118** conduit à la décomposition en éléments simples, unique,

$$\frac{P}{Q} = E + \sum F_a + \sum G_{m,n};$$

F_a est un polynôme de degré α en $\frac{1}{x - a}$, sans terme constant; l'étude de F_a faite au n° **119** s'applique sans changement; le mode de calcul des coefficients de F_a vu au n° **119**, 3° montre que tous ces coefficients sont réels; on continue à dire que F_a est la partie polaire de $\frac{P}{Q}$, relative au pôle réel a.

$G_{m,n}$ est, d'après la théorie générale, une somme de fractions rationnelles dans lesquelles le dénominateur est une puissance de $(x - m)^2 + n^2$ et le numérateur un polynôme de degré inférieur à deux, soit, les M_h et les N_h désignant des constantes,

$$G_{m,n} = \frac{M_1 x + N_1}{(x - m)^2 + n^2} + \frac{M_2 x + N_2}{[(x - m)^2 + n^2]^2} + \ldots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{[(x - m)^2 + n^2]^\mu},$$

les constantes M_μ et N_μ n'étant pas simultanément nulles (**118**, 3°).

DÉFINITION. — Dans la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur le corps R des réels, un terme de la décomposition de la forme $\frac{A_h}{(x - a)^h}$ est dit *élément simple de première espèce*, un terme de la décomposition de la forme $\frac{M_h x + N_h}{[(x - m)^2 + n^2]^h}$ est dit *élément simple de deuxième espèce*.

3° **Utilisation de la décomposition sur C pour obtenir la décomposition sur** R. — Toute fraction rationnelle sur R peut aussi être considérée comme fraction rationnelle sur C.

Pour un pôle réel, la partie polaire est la même, comme on l'a vu au 2°.

Considérons maintenant un terme $[(x-m)^2+n^2]^\mu$ de la décomposition de Q sur R, auquel est associé $G_{m,n}$ dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ sur R. Sur C, $G_{m,n}$ est une fraction rationnelle dont la partie entière est O, dont les pôles (d'ordre μ) sont les nombres complexes conjugués $m+in$ et $m-in$. D'où une décomposition sur C de la forme

$$G_{m,n} = F_{m,n} + \overline{F_{m,n}}.$$

$F_{m,n}$ est un polynôme de degré μ en $\frac{1}{x-(m+in)}$, sans terme constant, tel que la fraction rationnelle

$$\frac{P}{Q} - F_{m,n} = \left(\frac{P}{Q} - G_{m,n}\right) + \overline{F_{m,n}}$$

n'admet pas le pôle $m+in$. $F_{m,n}$ est donc (n° 119, 2°) la partie polaire relative au pôle $m+in$ dans la décomposition sur C de $\frac{P}{Q}$; $\overline{F_{m,n}}$ est de même la partie polaire relative au pôle $m-in$.

La somme des éléments simples de seconde espèce de la fraction rationnelle irréductible $\frac{P}{Q}$ associés au facteur $(x-m)^2+n^2$ de Q est la somme des parties polaires relatives aux pôles $m+in$ et $m-in$ de $\frac{P}{Q}$ sur le corps C.

EXEMPLE : *décomposer* $\frac{1}{x^7-1}$ *en éléments simples sur* R.

Sur C nous avons obtenu (119) :

$$\frac{1}{x^7-1} = \frac{1}{7}\left[\frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\omega_k}{x-\omega_k} + \frac{\omega_{-k}}{x-\omega_{-k}}\right)\right]; \quad k = 1, 2, 3$$

avec $\omega_k = \cos\frac{2k}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, ce qui montre que ω_{-k} et ω_k sont conjugués.

Groupons $\frac{\omega_k}{x-\omega_k} + \frac{\overline{\omega_k}}{x-\overline{\omega_k}} = \frac{x(\omega_k+\overline{\omega}_k) - 2\omega_k\overline{\omega}_k}{x^2 - x(\omega_k+\overline{\omega}_k) + \omega_k\overline{\omega}_k} = 2\frac{x\cos\frac{2k\pi}{7} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{7} + 1}$.

Nous obtenons sur R la décomposition

$$\frac{1}{x^7-1} = \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{7}\sum_{k=1}^{3}\frac{x\cos\frac{2k\pi}{7} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{7} + 1}.$$

121. ***Pratique de la décomposition en éléments simples sur*** R. — Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur R, irréductible.

1° *On calcule, s'il y a lieu, la partie entière par une division euclidienne.*

On obtient $$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_0}{Q}.$$

Rappelons (n° 119, 2°) que $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_0}{Q}$ ont les mêmes pôles et les mêmes parties polaires, ce qui permet de poursuivre le calcul soit sur $\frac{P}{Q}$, soit sur $\frac{P_0}{Q}$. Notons d'autre part qu'il n'est pas toujours nécessaire d'expliciter $\frac{P_0}{Q}$; si l'on veut seulement E, il suffit de prendre dans $P(x)$ et $Q(x)$ ordonnés suivant les puissances décroissantes un nombre de termes égal au nombre de termes (connu) de $E(x)$.

2° *On calcule le coefficient unique* A *de la partie polaire relative à un pôle simple* a *par la formule*

$$A = \frac{P(a)}{G(a)} \quad \text{ou} \quad A = \frac{P(a)}{Q'(a)} \qquad \text{(cf. n° 119, 3°).}$$

EXEMPLE. — *Décomposer* $\frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)}$ *en éléments simples sur* R.

a) *Recherche de la partie entière* : E est du premier degré, donc a 2 termes; on divise x^4 par $x^3 - 3x^2$, ce qui donne $E = x + 3$.

b) *Recherche des parties polaires.* Pour le pôle 0, on multiplie la fraction par x, ce qui donne $\frac{x^4 + x + 1}{(x-1)(x-2)}$, puis l'on substitue $x = 0$, d'où $A = \frac{1}{2}$ et l'élément simple $\frac{A}{x} = \frac{1}{2x}$.

Pour le pôle 1 on substitue $x = 1$ dans $\frac{x^4 + x + 1}{x(x-2)}$, ce qui donne -3.

Pour le pôle 2 on substitue $x = 2$ dans $\frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)}$, ce qui donne $\frac{19}{2}$.

Finalement la décomposition cherchée est :

$$x + 3 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{x-1} + \frac{19}{2(x-2)}.$$

3° *On cherche la partie polaire relative à chaque pôle multiple réel.* — On utilise la méthode exposée au n° 119, 3°. Il peut arriver que des considérations de parité simplifient les calculs.

EXEMPLE I. — *Décomposer* $\frac{x^4 + 1}{(x^2-1)^3}$ *en éléments simples sur* R.

a) La partie entière est 0.

b) La fraction possède deux pôles triples 1 et -1. Comme elle est paire, le changement de x en $-x$ laisse invariante la décomposition en éléments simples. Si celle-ci est

$$\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{A'}{(x+1)^3} + \frac{B'}{(x+1)^2} + \frac{C'}{x+1},$$

elle peut s'écrire, après avoir remplacé x par $-x$,

$$-\frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} - \frac{C}{x+1} - \frac{A'}{(x-1)^3} + \frac{B'}{(x-1)^2} - \frac{C'}{x-1}.$$

L'unicité donne $A' = -A$, $B' = B$, $C' = -C$. Il suffit donc de chercher la partie principale relative au pôle 1. Dans ce but on pose $x = 1 + X$ et, ayant écrit

$$\frac{(1+X)^4 + 1}{X^3(2+X)^3},$$

on cherche le quotient à l'ordre 2 dans la division suivant les puissances croissantes de X du polynôme $(1+X)^4+1$ par le polynôme $(2+X)^3$; il suffit pour cela de réduire ces deux polynômes à leurs termes de degré inférieur ou égal à 2, soit $2+4X+6X^2$ et $8+12X+6X^2$; le quotient est $\frac{1}{4}+\frac{X}{8}+\frac{3X^2}{8}$ d'où l'on déduit, en divisant par X^2 et en revenant à x, la partie principale relative au pôle 1

$$F_1=\frac{1}{4(x-1)^3}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{8(x-1)}.$$

Finalement la décomposition cherchée est

$$\frac{x^4+1}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{4(x-1)^3}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)^3}+\frac{1}{8(x+1)^2}-\frac{3}{8(x+1)}.$$

Exemple II. — *Décomposer* $\frac{1}{x^n(1-x)}$ *en élémenls simples sur* R, *n étant un entier naturel quelconque.* La partie entière est O. La partie principale relative au pôle simple 1 est $\frac{1}{1-x}$. Pour trouver la partie principale relative au pôle d'ordre n, nous avons à diviser 1 par le polynôme $1-x$ suivant les puissances croissantes de x et à chercher le quotient à l'ordre $n-1$; ce quotient est

$$1+x+\ldots+x^{n-1},$$

d'où, en divisant par x^n, la partie principale cherchée

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{x},$$

et finalement

$$\frac{1}{x^n(1-x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{x}.$$

4° *Si la fraction rationnelle n'admet que deux pôles complexes conjugués, on opère par divisions successives.* — Il s'agit de la méthode théorique qui a été exposée au n° 118, lemme III.

Exemple. — *Décomposer la fraction* $\frac{2x^5+3x^2-1}{(x^2+x+1)^3}$ *en élémenls simples sur* R.

La division euclidienne du numérateur par x^2+x+1 s'écrit

$$2x^5+3x^2-1=(x^2+x+1)(2x^3-2x^2+5)+(-5x-6),$$

d'où

$$\frac{2x^5+3x^2-1}{(x^3+x+1)^3}=\frac{2x^3-2x^2+5}{(x^2+x+1)^2}+\frac{-5x-6}{(x^3+x+1)^3}.$$

La division euclidienne du quotient précédemment obtenu par x^2+x+1 s'écrit

$$2x^3-2x^2+5=(x^2+x+1)(2x-4)+2x+9.$$

La décomposition cherchée est finalement

$$\frac{2x^5+3x^2-1}{(x^2+x+1)^3}=\frac{-5x-6}{(x^2+x+1)^3}+\frac{2x+9}{(x^2+x+1)^2}+\frac{2x-4}{x^2+x+1}.$$

5° *Calcul de proche en proche de* $G_{m,n}=\sum_{h=1}^{\mu}\frac{M_hx+N_h}{[(x-m)^2+n^2]^h}$, *dans le cas général où* $Q(x)=[(x-m)^2+n^2]^\mu G(x)$.

On sait qu'il existe deux constantes M_μ et N_μ et un polynôme $P_1(x)$ tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{M_\mu x+N_\mu}{[(x-m)^2+n^2]^\mu}=\frac{P_1(x)}{[(x-m)^2+n^2]^{\mu-1}G(x)},$$

ce qui équivaut à :

$$P(x) - (M_\mu x + N_\mu)\, G(x) = [(x-m)^2 + n^2]\, P_1(x). \qquad (1)$$

On détermine M_μ et N_μ en faisant successivement $x = m + in$ et $x = m - in$ dans (1). On itère ensuite, à partir de la fraction

$$\frac{P_1(x)}{[(x-m)^2 + n^2]^{\mu-1} G(x)}, \text{ etc....}$$

EXEMPLE. — *Décomposer en éléments simples, sur* R, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2}$.

a) Déterminons M, N et $P_1(x)$ tels que

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2} - \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2} = \frac{P_1(x)}{(x-1)^3(x^2-x+1)} \quad \text{ou}$$
$$x^2+1-(Mx+N)(x-1)^3 = (x^2-x+1)\,P_1(x). \qquad (1)$$

En faisant dans (1) $x = a$, avec $a^2 + 1 = a$, puis $x = \bar{a}$, on trouve

$$(M+N+1)a - M = 0; \quad (M+N+1)\bar{a} - M = 0 \Longrightarrow M = 0, \quad N = -1.$$

On en déduit $P_1(x) = 2$.

b) Itérons, autrement dit déterminons M', N' et $P_2(x)$ tels que

$$\frac{2}{(x-1)^3(x^2-x+1)} - \frac{M'x+N'}{x^2-x+1} = \frac{P_2(x)}{(x-1)^3} \quad \text{ou}$$
$$2-(M'x+N')(x-1)^3 = (x^2-x+1)\,P_2(x). \qquad (2)$$

En faisant dans (2) $x = a$, avec $a^2 + 1 = a$, puis $x = \bar{a}$, on trouve

$$(M'+N')a + 2 - M' = 0; \quad (M'+N')\bar{a} + 2 - M' = 0 \Longrightarrow M' = 2, \quad N' = -2.$$

On en déduit $P_2(x) = -2x + 4$ et

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{2x-2}{x^2-x+1} + \frac{-2x+4}{(x-1)^3}.$$

En écrivant $-2x + 4 = -2(x-1) + 2$ on obtient la décomposition définitive

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2} = \frac{-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{2x-2}{x^2-x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{x-1}.$$

6° **Méthode des coefficients indéterminés.** — Si l'on écrit la décomposition théorique de la fraction rationnelle, en laissant les coefficients indéterminés, et si après réduction au même dénominateur, on écrit que les numérateurs des deux membres sont des polynômes égaux, on trouve un certain nombre d'équations linéaires pour déterminer les coefficients. Ces équations ont certainement une solution et une seule puisque la décomposition est possible, et d'une seule façon; leur résolution fait connaître les coefficients de la décomposition.

Cette méthode peut être avantageuse lorsque le dénominateur a une forme simple, et surtout si la fraction a des pôles simples complexes.

Répétons que des considérations de parité peuvent simplifier les calculs.

EXEMPLE I. — *Décomposer* $\dfrac{1}{(x^2-2x\cos a+1)(x^2-2x\cos b+1)}$ *en éléments simples sur* $R\,(a \not\equiv b)$. La décomposition est de la forme

$$\frac{1}{(x^2-2a\cos a+1)(x^2-2x\cos b+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x\cos a+1} + \frac{Cx+D}{x^2-2x\cos b+1}.$$

Les numérateurs des deux membres, après réduction au même dénominateur, sont des polynômes égaux, soit

$$1 = (Ax + B)(x^2 - 2x\cos b + 1) + (Cx + D)(x^2 - 2x\cos a + 1).$$

Les quatre équations suivantes déterminent les constantes A, B, C, D :

$$\begin{cases} A + C = 0, & -2A\cos b - 2C\cos a + B + D = 0 \\ A + C - 2B\cos b - 2D\cos a = 0, & B + D = 1. \end{cases}$$

En tenant compte de la quatrième équation les deux premières donnent A et C, et en tenant compte de la première, les deux dernières donnent B et D.

On obtient ainsi la décomposition :

$$\frac{1}{2(\cos a - \cos b)}\left[\frac{-x + 2\cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1} + \frac{x - 2\cos b}{x^2 - 2x\cos b + 1}\right].$$

EXEMPLE II. — *Décomposer* $\dfrac{x^2 + h}{x^4 + 1}$ *en éléments simples sur* R, *h étant une constante réelle.*

Rappelons l'égalité

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \quad \text{ou} \quad (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1);$$

par suite la décomposition est de la forme

$$\frac{x^2 + h}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}. \qquad (1)$$

La fonction rationnelle étant paire, le changement de x en $-x$ doit laisser invariant le second membre de l'égalité (1); la première fraction devient $\dfrac{-Ax + B}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$, qui doit être égale à la seconde à cause de l'unicité. Par suite $C = -A$, $D = B$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient l'égalité

$$x^2 + h = (Ax + B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (-Ax + B)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

ou $$x^2 + h = -2Ax^2\sqrt{2} + 2B(x^2 + 1),$$

d'où $$B = \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{h - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement la décomposition cherchée est

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{(h-1)x + h\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{-(h-1)x + h\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right].$$

REMARQUE I. — Si dans la décomposition cherchée il ne reste plus qu'un, deux ou trois coefficients à calculer, il peut être commode d'attribuer à cet effet une, deux, ou trois valeurs numériques simples à l'indéterminée.

Soit, par exemple, à décomposer en éléments simples sur R

$$\frac{2x + 3}{(x - 3)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}. \qquad (1)$$

On détermine A en multipliant les deux membres par $x - 3$ et en remplaçant x par 3 dans l'égalité obtenue : on trouve $A = \dfrac{9}{13}$.

En remplaçant dans (1) x par 0 et tenant compte de la valeur trouvée pour A, on obtient $C = -\dfrac{10}{13}$. Enfin, anticipant sur le Cours d'Analyse, on peut multiplier par x

les deux membres de (1) et écrire que les deux fonctions rationnelles égales ainsi obtenues ont la même limite pour x infini. On trouve $0 = A + B \Longrightarrow B = -\frac{9}{13}$ et

$$\frac{2x+3}{(x-3)(x^2+x+1)} = \frac{9}{13}\frac{1}{x-3} - \frac{9x+10}{13(x^2+x+1)}$$

REMARQUE II. — Après avoir calculé un ou plusieurs éléments simples, il est toujours légitime de poursuivre la décomposition sur la fraction rationnelle obtenue en retranchant de la fraction donnée les éléments calculés. (Rem. II du n° 119, 2°).

122. ***Applications à l'analyse.*** — 1° Nous avons vu (n° 117) qu'à toute fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, irréductible sur C, on peut associer la fonction rationnelle, application de C dans C, qui, à tout $x \in C$ qui n'est pas zéro de Q, associe $\frac{P(x)}{Q(x)} \in C$. A la décomposition en éléments simples

$$\frac{P}{Q} = E + \sum F_a$$

de la fraction rationnelle correspond la décomposition

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum \Phi_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

de la fonction rationnelle. Le lecteur ayant déjà étudié le cours d'analyse pourra vérifier les deux propriétés suivantes :

a) E peut être caractérisé par le fait qu'il s'agit du seul polynôme tel que la fonction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)} - E(x)$ tende vers 0 quand x devient infini.

b) Φ_a peut être caractérisé par le fait qu'il s'agit du seul polynôme sans terme constant tel que la fonction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)} - \Phi_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ admette une limite finie quand x tend vers a.

2° Dans la plupart des questions où intervient une fraction rationnelle il est indispensable de faire appel à la décomposition en éléments simples. C'est ce que nous constaterons dans le cours d'Analyse à propos des questions suivantes :

a) dérivées successives d'une fonction rationnelle (II, n° 156, 4°);

b) recherche des primitives d'une fonction rationnelle (II, n° 169);

c) développement en série entière d'une fonction rationnelle (II, n° 220).

EXERCICES

1. — Soient a, b, α, β quatre nombres complexes distincts deux à deux. Trouver une relation nécessaire et suffisante entre ces nombres pour que l'on puisse écrire

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2}$$

Quelle est alors la décomposition sur le corps C de la fraction rationnelle

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}?$$

2. — Décomposer en éléments simples, sur le corps des réels, la fraction

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

3. — Étant donnés les nombres complexes distincts a, b, c, comment doit-on choisir A, B, C pour que la fraction

$$\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)^2 \text{ soit de la forme } \frac{P}{(x-a)^2}+\frac{Q}{(x-b)^2}+\frac{R}{(x-c)^2},$$

P, Q, R étant des constantes?

4. — Décomposer en éléments simples, sur le corps R, puis sur le corps C, la fraction

$$\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n}.$$

5. — On donne la fraction rationnelle

$$\frac{x^5-1}{(x^2+1)^2(x^3+1)^3}.$$

La décomposer en fractions ayant pour dénominateurs des puissances de x^2+1 ou de x^3+1.

6. — Déterminer des nombres p, q, r de telle manière que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{x^5+3x^4+x^3+px^2+qx+r}{x^3(x+1)^2(x-1)}$$

contienne le plus petit nombre possible de termes.

7. — Soit $P(x)$ un polynôme défini sur le corps C et ayant tous ses zéros distincts. Décomposer en éléments simples, sur C, la fraction rationnelle $\frac{P'(x)}{P(x)}$, P' désignant le polynôme dérivé de P.

Application. — On suppose que P a n zéros réels et distincts

$$x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n.$$

Alors P' a un zéro ξ entre x_i et x_{i+1}.
Démontrer que

$$x_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{n} < \xi < x_{i+1} - \frac{x_{i+1}-x_i}{n}.$$

Décomposer de même en éléments simples la fraction

$$\frac{P'^2-PP''}{P^2}.$$

8*. — Soit $P(x)$ un polynôme de degré n défini sur le corps C et ayant tous ses zéros réels et distincts. Montrer que, a étant un nombre réel positif donné, le polynôme $[P(x)]^2+a^2[P'(x)]^2$ a ses zéros complexes, tous de la forme $\alpha+i\beta$ avec $|\beta|<na$.

CHAPITRE VIII

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

123. DÉFINITION. — **Une équation algébrique sur le corps K est une équation de la forme**

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

où $f(x)$ est un polynôme de $K[x]$, autre qu'une constante.

$f(a) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in K$ soit racine de (1) mais aussi pour que a soit zéro de $f(x)$. Les racines de l'équation (1) ne diffèrent donc pas des zéros du polynôme $f(x)$. Par extension, un zéro multiple de $f(x)$ est appelé aussi racine multiple de l'équation algébrique associée, avec la même définition de l'ordre.

Le degré n du polynôme est appelé le *degré de l'équation.*

Dans toute la suite de ce chapitre, K sera le corps des complexes ou, plus généralement, un corps commutatif algébriquement clos (113, 5°). De cette façon, il résulte du théorème de d'Alembert et de ses conséquences que l'équation (1) a n racines puisque le polynôme $f(x)$ a n zéros distincts ou confondus.

I. ÉLIMINATION

124. ***Définition générale de l'élimination.*** — 1° **Cas de deux équations algébriques à une inconnue.** — Deux équations algébriques

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0 \qquad (1)$$

n'ont pas en général de racine commune.

Si elles en ont une, a, c'est que les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ ont un zéro commun, a; $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux divisibles par $x - a$, leur plus grand commun diviseur D l'est aussi.

Réciproquement, tout zéro de D est zéro commun de $f(x)$ et $g(x)$, donc racine commune aux deux équations (1).

Nous énoncerons : **Les zéros communs à deux polynômes sont les zéros de leur plus grand commun diviseur.**

Si les équations (1) sont à coefficients numériques, ou bien les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux, et les équations n'ont pas de racine com-

mune, ou bien, dans le cas contraire, les équations ont pour racines communes tous les zéros de D.

Si les équations (1) ont des coefficients variables, on peut chercher à les déterminer pour qu'elles aient au moins une racine commune; on est ainsi conduit à la définition suivante :

DÉFINITION. — **Étant données deux équations algébriques $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ dont les coefficients sont des fonctions de certains paramètres λ, μ, ..., éliminer x entre ces équations, c'est trouver une condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les paramètres λ, μ, ... pour que les équations considérées aient au moins une racine commune, et calculer éventuellement cette racine.**

2° **Définition générale de l'élimination.** — Plus généralement, **éliminer p inconnues entre m équations dépendant de certains paramètres, c'est former des conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier ces paramètres pour qu'il existe un système de valeurs de ces p inconnues vérifiant ces m équations, et calculer éventuellement ces p inconnues.**

En d'autres termes, c'est écrire que les m équations sont compatibles par rapport aux p inconnues.

3° EXEMPLES. — *a*) L'élimination se fait immédiatement lorsqu'on connaît les racines de l'une des équations. Par exemple, soit à éliminer x entre les équations

$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad ax + b = 0 \qquad (a \neq 0).$$

La seconde équation n'ayant que la racine $-\frac{b}{a}$, pour que ces deux équations aient une racine commune, il faut et il suffit que

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

b) Éliminer x entre les équations

$$(1) \qquad x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad x^2 + px + q = 0$$

c'est chercher pour quelles valeurs de p et q les équations (1) et (2) ont une racine commune. Or l'équation (1) admet pour racines les nombres 2 et -1. Ou bien l'équation (2) admettra la racine 2, et $8 + 2p + q = 0$, ou bien elle admettra la racine -1, et $-1 - p + q = 0$. Les équations proposées ont donc une racine commune si et seulement si q est égal à $-2p - 8$ ou à $1 + p$.

c) Éliminer x entre les équations

$$\cos x = \lambda \qquad \sin x = \mu,$$

c'est trouver quelle relation doit lier λ et μ pour que le point (λ, μ) appartienne au cercle trigonométrique, ce qui donne immédiatement

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

On est ramené au cas précédent si on doit éliminer x entre deux équations du premier degré en $\cos x$ et $\sin x$.

Dans un cas plus général, pour éliminer x entre deux équations qui contiennent seulement cette inconnue par l'intermédiaire des fonctions circulaires de x et qui sont rationnelles par rapport à ces fonctions, on peut prendre pour inconnue auxiliaire $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ et on est ramené à éliminer t entre deux équations algébriques par rapport à cette inconnue.

125. *Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur.* — Pour écrire que les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ dont les coefficients sont fonctions de certains paramètres ont au moins un zéro commun, on peut écrire que leur plus grand commun diviseur est du premier degré ou de degré supérieur à 1.

A cette fin, on effectue les divisions successives qui conduisent au plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $g(x)$. Ces opérations conduisent en général à une division qui donne lieu à l'égalité

$$R_{\lambda-1} = R_\lambda Q_{\lambda+1} + R_{\lambda+1}$$

où $R_{\lambda+1}$ est une constante, indépendante de x, mais qui est fonction des coefficients de $f(x)$ et de $g(x)$. Si $R_{\lambda+1} \neq 0$, $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux, ils n'ont pas de zéro commun; si $R_{\lambda+1} = 0$, le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $g(x)$ est le polynôme R_λ, les zéros de R_λ sont les zéros communs à $f(x)$ et $g(x)$. *La relation* $R_{\lambda+1} = 0$ *est donc une condition nécessaire et suffisante pour que les équations* $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ *aient au moins une racine commune.*

REMARQUE I. — Si les coefficients de $f(x)$ et $g(x)$ dépendent d'un seul paramètre λ, $R_{\lambda+1}$ est une fonction de λ; l'équation $R_{\lambda+1}(\lambda) = 0$ détermine les valeurs de λ pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ ont une racine commune au moins.

REMARQUE II. — Plus généralement, pour écrire que les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ont k racines communes au moins, on écrit que les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ admettent un plus grand commun diviseur de degré k au moins, en exprimant que le premier reste de degré inférieur à k obtenu au cours des divisions successives est le polynôme O.

EXEMPLE I. — *Éliminer x entre les équations algébriques*

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0 \qquad \textit{en supposant} \qquad g(x) = x^2 - a \qquad (a \neq 0).$$

On obtient le reste R de la division de f par g en écrivant d'abord

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$$

φ et ψ étant deux polynômes.

On sait alors (98, 4°) que

$$R(x) = \varphi(a) + x\psi(a).$$

1° Si $\psi(a) \neq 0$, R ne sera le p. g. c. d. de f et de g que si le zéro de R est zéro de g.
si $\varphi(a) = 0$, l'hypothèse $a \neq 0$ rend le problème impossible;
si $\varphi(a) \neq 0$, le résultat de l'élimination est

$$\varphi^2(a) - a\psi^2(a) = 0.$$

2° si $\psi(a) = 0$, R se réduit à la constante $\varphi(a)$.
si $\varphi(a) \neq 0$, f et g sont premiers entre eux et il n'existe pas de racine commune aux deux équations.
si $\varphi(a) = 0$, R est le polynôme O, g divise f, et les deux racines de la seconde équation sont racines de la première.

EXEMPLE II. — *Éliminer x entre les équations algébriques*

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0, \quad \textit{en supposant} \quad g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

On divise f par g, ce qui donne

$$f(x) = g(x)\,Q(x) + Ax + B.$$

1° si $A \neq 0$, le reste $Ax + B$ sera le p. g. c. d. de f et g si, et seulement si,

$$g\left(-\frac{B}{A}\right) = 0.$$

2° si $A = 0$, la condition supplémentaire $B = 0$ entraîne que g divise f; les deux équations proposées ont alors deux racines communes.

Exemple III. — *Déterminer p et q de façon que les équations* $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ *avec* $f(x) = x^4 + 3x^2 + p$ *et* $g(x) = x^3 + x + q$ *aient deux racines communes.*

La division de $f(x)$ par $g(x)$ conduit à l'égalité

$$f(x) = g(x) \times x + 2x^2 - qx + p.$$

Pour que $f(x)$ et $g(x)$ aient un plus grand commun diviseur de degré 2, il faut et il suffit que le reste de la division de $g(x)$ par $2x^2 - qx + p$ soit le polynôme O. Or ce reste est

$$\left(1 - \frac{p}{2} + \frac{q^2}{4}\right)x + q\left(1 - \frac{p}{4}\right);$$

p et q doivent donc vérifier les relations

$$1 - \frac{p}{2} + \frac{q^2}{4} = 0 \quad \text{et} \quad q\left(1 - \frac{p}{4}\right) = 0$$

et l'on obtient trois solutions :

1° $p = 2$, $q = 0$; $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$, $g(x) = (x^2 + 1)x$;

2° $p = 4$, $q = 2\varepsilon$, ε désignant $+1$ ou -1;

$f(x) = (x^2 - \varepsilon x + 2)(x^2 + \varepsilon x + 2)$, $g(x) = (x^2 - \varepsilon x + 2)(x + \varepsilon)$.

126. *Procédés particuliers d'élimination.* — 1° Élimination entre deux équations du second degré. — Soit à éliminer x entre les équations

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0; \quad a'x^2 + b'x + c' = 0; \quad (a \neq 0;\ a' \neq 0).$$

Introduisant l'inconnue $y = x^2$,

$$(E) \iff (E') \begin{cases} y = x^2 \\ ay + bx + c = 0 \\ a'y + b'x + c' = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

α) Si $ab' - ba' \neq 0$, le système linéaire (1) a pour solution

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}. \qquad (2)$$

Pour exprimer que les équations (E) ont une racine commune, il faut et il suffit que les valeurs (2) soient telles que $y = x^2$, c'est-à-dire

$$R = 0, \quad \text{avec} \quad R = (ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'). \qquad (3)$$

Si la condition (3) est réalisée, la racine commune aux équations (E) est fournie par (2).

On retient pratiquement la formule (3) en s'aidant des mineurs de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

on peut dire que le mineur moyen est moyen proportionnel entre les mineurs extrêmes

β) Si $ab' - ba' = 0$, le système (1) n'est possible que si $ac' - ca' = 0$, et alors les coefficients a', b', c' étant proportionnels aux coefficients a, b, c, les équations (E) ont les mêmes racines.

On observe que si $ab' - ba' = 0$, la condition (3) entraîne $ca' - ac' = 0$.

En résumé, *la condition* (3) *est nécessaire et suffisante pour que les équations* (E) *aient au moins une racine commune.*

La quantité R *est appelée le résultant des polynômes* (E).

2° **Abaissement du degré d'une des équations.** — Toute racine commune aux équations

$$f(x) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$
$$g(x) = 0, \quad \text{avec} \quad g(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p \qquad (2)$$

dans lesquelles n est au moins égal à p, vérifie l'équation

$$b_0f(x) - a_0x^{n-p}\,g(x) = 0. \qquad (3)$$

Réciproquement, si l'on élimine x entre les équations (2) et (3), on exprime qu'il existe un nombre ξ tel que

$$g(\xi) = 0, \qquad b_0f(\xi) - a_0\xi^{n-p}\,g(\xi) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$g(\xi) = 0, \qquad b_0f(\xi) = 0;$$

ou bien on exprime que b_0 est nul, ou bien on exprime que les équations (1) et (2) ont une racine commune ξ.

Ainsi, *en éliminant* x *entre les équations* (2) *et* (3) *on trouve une condition qui exprime, soit que* $b_0 = 0$, *soit que les équations* (1) *et* (2) *ont une racine commune.* En ramenant l'élimination de x entre les équations (1) et (2) à celle de x entre les équations (2) et (3) on a simplifié le problème puisque l'équation (1) de degré n a été remplacée par l'équation (3) dont le degré est inférieur à n. Mais il importe d'observer que les deux éliminations ne sont pas strictement équivalentes. Cette observation présente de l'intérêt quand, les coefficients des équations (1) et (2) renfermant un paramètre λ, on cherche pour quelles valeurs de λ ces équations ont une racine commune. En substituant à l'élimination de x entre les équations (1) et (2) celle de x entre les équations (2) et (3) on introduit comme solutions étrangères les valeurs de λ qui annulent b_0.

La remarque précédente est utilisée pour ramener l'élimination de x entre deux équations de degrés 3 et 2 à celle de x entre deux équations du second degré, laquelle est immédiate au moyen du résultant.

127. *Élimination au moyen d'un déterminant (1). — **1° Condition pour que deux polynômes f et g ne soient pas premiers entre eux.**

a) Supposons que les polynômes f et g, de degrés respectifs m et p, ne soient pas premiers entre eux. En désignant par Δ leur P. G. C. D. nous pouvons écrire

$$f = \Delta f_1; \qquad d^\circ(f_1) < m$$
$$g = \Delta g_1; \qquad d^\circ(g_1) < p.$$

Il en résulte

$$g_1 f - f_1 g = 0 \quad \text{qui est une égalité de la forme}$$
$$Uf + Vg = 0$$

où U et V sont des polynômes de degrés respectifs inférieurs à p et m.

b) *Réciproquement* supposons que l'on ait

$$Uf + Vg = 0; \qquad d^\circ(U) < p; \qquad d^\circ(V) < m.$$

Écrivons

$$Uf = -Vg.$$

Si f était premier avec g, étant donné qu'il divise Vg, il devrait diviser V, ce qui est impossible du fait que $d^\circ(V) < m$. Les polynômes f et g ne sont donc pas premiers entre eux. En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes f et g, de degrés respectifs m et p, aient au moins un zéro commun est qu'il existe deux polynômes U et V, de degrés respectivement inférieurs à p et m tels qu'on ait**

$$Uf + Vg = 0.$$

2° Application à l'élimination. — Soit

$$\begin{cases} f = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m & a_0 \neq 0 \\ g = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p & b_0 \neq 0. \end{cases}$$

Cherchons à déterminer les coefficients α_i et β_j des polynômes

$$U = \alpha_1x^{p-1} + \alpha_2x^{p-2} + \ldots + \alpha_p$$
$$V = \beta_1x^{m-1} + \beta_2x^{m-2} + \ldots + \beta_m$$

de façon que

$$Uf + Vg = 0.$$

Le polynôme $Uf + Vg$ à un degré au plus égal à $m + p - 1$; les polynômes de degré au plus égal à $m + p - 1$ forment un espace vectoriel de dimension $m + p$.

Or $Uf + Vg$ est une combinaison linéaire

$$\alpha_1x^{p-1}f + \alpha_2x^{p-2}f + \ldots + \alpha_pf + \beta_1x^{m-1}g + \beta_2x^{m-2}g + \ldots + \beta_mg$$

des $m + p$ polynômes

$$x^{p-1}f,\ x^{p-2}f,\ \ldots,\ f,\ x^{m-1}g,\ x^{m-2}g,\ \ldots,\ g.$$

Pour écrire que ces polynômes ne sont pas indépendants, il suffit d'écrire que le déterminant de la matrice de leurs coefficients dans la base $\{ x^{m+p-1}, x^{m+p-2}, \ldots, x, 1 \}$ est nul, ce qui donne $S = 0$, avec

$$S = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & & & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & & & & a_{m-1} & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & & & & \\ \ldots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & & & & & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{p-1} & b_p & 0 & 0 & \ldots & & & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{p-1} & b_p & 0 & \ldots & & & & 0 \\ \ldots & & & & & & & & & & & \\ \ldots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & b_0 & b_1 & \ldots & & & b_p \end{vmatrix}$$

(p lignes ; m lignes)

(1) La lecture de ce paragraphe suppose connus les résultats des chapitres X et XIV; elle doit être laissée de côté en première lecture.

S est dit *déterminant de Sylvestre* des polynômes f et g.

Ce déterminant a p lignes composées avec les coefficients a_i, m lignes composées avec les coefficients b_j; on passe de l'une des $(p-1)$ premières lignes à la suivante en décalant d'un rang vers la droite les éléments de cette ligne; on fait de même pour l'une des lignes de rangs $p+1$ à $m+p-1$.

CAS PARTICULIER. — Si f et g sont du second degré

$$f = ax^2 + bx + c \qquad g = a'x^2 + b'x + c',$$

le déterminant précédent prend la forme

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

on retrouve l'annulation du résultant des deux trinômes f et g [on peut retrancher de la seconde ligne les éléments de la première multipliés par $\frac{a'}{a}$].

128. *Condition pour qu'un polynôme ait un zéro multiple non donné.* — 1° Position du problème. — Nous avons vu au n° 112 les conditions que doit remplir un polynôme pour admettre le nombre donné a comme zéro à l'ordre p.

Le problème posé ici est différent, la valeur du zéro multiple n'étant plus imposée à l'avance, on désire simplement que le polynôme $f(x)$ ait un zéro d'ordre au moins égal à 2, la valeur même de ce zéro pouvant être quelconque.

Pour que le polynôme $f(x)$ ait un zéro d'ordre au moins égal à 2, il faut et il suffit qu'il existe un nombre a tel que

$$f(a) = 0, \qquad f'(a) = 0;$$

trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, c'est trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ admettent au moins un zéro commun, c'est éliminer x entre les équations

$$f(x) = 0, \qquad f'(x) = 0.$$

THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $f(x)$ ait un zéro multiple s'obtient en éliminant x entre les équations**

$$f(x) = 0, \qquad f'(x) = 0.$$

2° EXEMPLE. — *Quelle relation doit lier p et q pour que le polynôme*

$$f(x) = x^3 + px + q$$

ait un zéro multiple?

Nous éliminerons x entre les équations

$$x^3 + px + q = 0, \qquad 3x^2 + p = 0. \tag{1} \tag{2}$$

Nous combinerons les premiers membres de ces équations de façon à faire disparaître le terme en x^3 de la première; en formant ainsi le polynôme $3f(x) - xf'(x)$, nous sommes ramenés à éliminer x entre les équations (2) et

$$2px + 3q = 0, \tag{3}$$

ce qui donne, dans le cas général où $p \neq 0$, la condition

$$4p^3 + 27q^2 = 0. \tag{4}$$

Si $p = 0$, l'équation (1) ne peut admettre une racine multiple que si $q = 0$, et la condition (4) est encore valable; alors $f(x) = x^3$ admet 0 comme zéro triple.

En résumé, *la condition*

$$\boxed{4p^3 + 27q^2 = 0}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) *admette une racine multiple.*

Si, p et q étant différents de zéro, $4p^3 + 27q^2$ est nul, $f(x)$ admet pour racine double le nombre $-\frac{3q}{2p}$, et l'on peut écrire $f(x) = \left(x + \frac{3q}{2p}\right)^2\left(x - \frac{3q}{p}\right)$. (cf. 114, 5°, ex IV)

3° *Condition pour qu'un polynôme $f(x)$ admette un zéro d'ordre au moins égal à p.* — Pour que $f(x)$ admette un zéro d'ordre au moins égal à p, il faut et il suffit qu'il existe un nombre a qui annule $f(x)$ et ses $p - 1$ premières dérivées. Trouver une condition ou des conditions pour qu'il en soit ainsi revient à éliminer x entre les équations

$$f(x) = 0, \qquad f'(x) = 0, \qquad \ldots \qquad f^{(p-1)}(x) = 0.$$

L'exemple suivant donnera la marche à suivre pour faire cette élimination.

Soit à exprimer que l'équation

$$f(x) = x^4 + 6mx^2 + 4px + q = 0 \tag{1}$$

admet une racine d'ordre au moins égal à 3. Formons

$$f'(x) = 4(x^3 + 3mx + p) = 0 \tag{2}$$
$$f''(x) = 12(x^2 + m) = 0 \tag{3}$$

et éliminons x entre les équations (1), (2) et (3). Nous exprimerons d'*abord* que les équations (2) et (3) ont une racine commune, *puis* que cette racine vérifie l'équation (1). La combinaison

$$3f'(x) - xf''(x) = 12(2mx + p)$$

montre que si $m \neq 0$, seul le nombre $-\frac{p}{2m}$ peut être racine commune aux équations (2) et (3), et il l'est si $f''\left(-\frac{p}{2m}\right) = 0$, c'est-à-dire si $p^2 + 4m^3 = 0$.

Le nombre $-\frac{p}{2m}$ ne peut être racine de l'équation (1) que si $f\left(-\frac{p}{2m}\right) = 0$, ou

$$p^4 - 8p^2m^3 + 16m^4q = 0.$$

En remplaçant p^2 par $-4m^3$, cette condition devient $q = -3m^2$. Finalement, si

$$p^2 = -4m^3, \qquad q = -3m^2, \qquad (m \neq 0), \tag{4}$$

le polynôme $f(x)$ admet un zéro triple $-\frac{p}{2m}$, et peut s'écrire

$$f(x) = x^4 + 6mx^2 + 4px - 3m^2 = \left(x + \frac{p}{2m}\right)^3\left(x + \frac{6m^2}{p}\right).$$

Si $m = 0$, seul le nombre 0 peut être racine commune aux équations (2) et (3), et il l'est si $p = 0$, et 0 ne peut être racine de l'équation (1) que si $q = 0$. Les conditions (4) donnant $p = 0$ et $q = 0$ lorsque $m = 0$, conviennent également au cas particulier que nous venons d'examiner.

II. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES ZÉROS D'UN POLYNÔME

129. *Relations entre les coefficients et les zéros d'un polynôme.* — 1° Soit

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \quad (A_0 \neq 0) \tag{1}$$

un polynôme de degré n dont les coefficients appartiennent au corps des complexes, C. Nous savons (n° 113) qu'il possède, sur C, n zéros, distincts ou non, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et qu'on peut écrire

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Développons et ordonnons le produit

$$P = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

suivant les puissances décroissantes de x. En utilisant le calcul déjà fait au n° **54** (il suffit d'y remplacer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs opposés) et en désignant par σ_1 la somme des zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, par σ_2 la somme de leurs produits deux à deux, d'une façon générale, par σ_p la somme de leurs produits p à p, enfin par σ_n leur produit, ce qu'on écrit

$$\sigma_1 = \sum a_1;\ \sigma_2 = \sum a_1 a_2;\ \ldots;\ \sigma_p = \sum a_1 a_2 \ldots a_p;\ \ldots,\ \sigma_n = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

on obtient

$$f(x) = A_0 [x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^p \sigma_p x^{n-p} + \ldots + (-1)^n \sigma_n]$$

En exprimant que les deux formes du polynôme $f(x)$ sont identiques nous obtenons les relations

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{A_1}{A_0},\ \sigma_2 = (-1)^2 \frac{A_2}{A_0},\ \ldots,\ \sigma_p = (-1)^p \frac{A_p}{A_0},\ \ldots,\ \sigma_n = (-1)^n \frac{A_n}{A_0}} \quad (2)$$

entre les coefficients et les zéros du polynôme (1).

Réciproquement, supposons que des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient liés aux coefficients du polynôme f par les relations (2) dans lesquelles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont respectivement la somme des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la somme de leurs produits deux à deux, etc., ... Les nombres $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont les zéros du polynôme

$$P = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

qui s'écrit, en développant le produit et en tenant compte des relations (2)

$$P = x^n + \frac{A_1}{A_0} x^{n-1} + \frac{A_2}{A_0} x^{n-2} + \ldots + \frac{A_n}{A_0}.$$

$f = A_0 P$ admet pour zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

En résumé

$$\left.\begin{array}{c} A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n \\ \text{admet } a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \text{comme zéros} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = -\dfrac{A_1}{A_0} \\ \sigma_2 = (-1)^2 \dfrac{A_2}{A_0} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sigma_n = (-1)^n \dfrac{A_n}{A_0}. \end{array}\right. \quad (2)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient les zéros du polynôme f est qu'ils soient liés aux coefficients de ce polynôme par les relations (2).

Si le polynôme $f(x)$ est le premier membre de l'équation algébrique $f(x) = 0$, les relations (2) sont dites relations entre les coefficients et les racines de cette équation.

2° **Les seules relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique ne peuvent servir à résoudre l'équation.** — Est-il possible de résoudre par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les relations (2) et d'obtenir ainsi les racines de l'équation algébrique $f(x) = 0$? Il n'en est rien.

La symétrie des relations par rapport aux nombres a_i fait que tout calcul dirigé de façon à obtenir a_1, par exemple, conduira pour calculer cette inconnue à une équation ayant aussi $a_2, \ldots, a_n$ pour racines, c'est-à-dire à l'équation donnée. On peut faire le calcul comme exercice. A cet effet on désignera par σ_1' la somme des racines autres que a_1, par σ_2' la somme de leurs produits deux à deux, etc., par σ_{n-1}' leur produit et on écrira les relations (2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
a_1 + \sigma_1' &= -\frac{A_1}{A_0} \\
a_1\sigma_1' + \sigma_2' &= (-1)^2\frac{A_2}{A_0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1\sigma_{p-1}' + \sigma_p' &= (-1)^p\frac{A_p}{A_0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1\sigma_{n-2}' + \sigma_{n-1}' &= (-1)^{n-1}\frac{A_{n-1}}{A_0} \\
a_1\sigma_{n-1}' &= (-1)^n\frac{A_n}{A_0}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $A_0a_1^{n-1}$ les deux membres de la première, par $-A_0a_1^{n-2}$ ceux de la deuxième, etc., d'une manière générale par $(-1)^{p-1}A_0a_1^{n-p}$ ceux de la p-ième et ajoutant membre à membre les relations obtenues, on trouve bien

$$A_0a_1^n + A_1a_1^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

130. ***Applications des relations entre les coefficients et les racines.*** — Comme on l'a vu plus haut, les seules relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$ ne peuvent servir à résoudre cette équation. Mais si on connaît *a priori* une ou plusieurs relations entre les racines (autres que les relations générales), il peut être avantageux de leur adjoindre les relations générales entre les coefficients et les racines, de manière à en déduire certaines des racines de l'équation donnée; les racines qui pourront rester inconnues seront alors racines d'une équation de degré moindre.

Inversement, on peut utiliser les relations générales entre les coefficients et les racines de l'équation algébrique $f(x) = 0$ pour trouver à quelle condition doivent satisfaire les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ du polynôme $f(x)$ pour que les racines satisfassent à une relation supplémentaire imposée.

A cet effet on écrit la relation imposée, soit (S); on adjoint les relations générales (Σ) entre les coefficients et les racines; si n est le degré de l'équation, pour que les racines vérifient la relation (S), il faut et il suffit qu'on puisse trouver n nombres satisfaisant aux $n + 1$ relations écrites (S) et (Σ). On obtiendra la condition demandée en éliminant les n racines entre les $n + 1$ relations. En outre, si on sait calculer les n nombres qui vérifient les $n + 1$ relations, ces nombres sont les racines de l'équation, on sait résoudre celle-ci.

EXEMPLE I. — *Déterminer* λ *de façon que l'équation*

$$x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda = 0$$

admette deux racines dont la différence soit 2.

Nous cherchons à quelle condition il peut exister trois nombres a, b, c vérifiant les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} a + b + c = 6 \\ bc + ca + ab = 11 \\ abc = -\lambda \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b - a = 2. \qquad (2)$$

La première relation (1), si l'on tient compte de la relation (2), donne

$$c = 4 - 2a. \qquad (3)$$

Portant les valeurs de b et c tirées des relations (2) et (3) dans les deux dernières relations (1), on trouve les relations

$$\begin{cases} 3a^2 - 6a + 3 = 0 \\ a(a + 2)(4 - 2a) = -\lambda. \end{cases} \qquad (4)$$

a ne peut donc prendre que la valeur 1, et par suite λ la valeur — 6. Dans ces conditions l'équation étudiée devient

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

elle admet pour racines les nombres $a = 1$, $c = 2$, et $b = 3$.

EXEMPLE II. — *Comment choisir les nombres* m, p, q *de façon que l'une des racines de l'équation*

$$(E)\qquad x^3 + mx^2 + px + q = 0$$

soit moyenne géométrique entre les deux autres.

Si a, b, c désignent les racines de (E), et si l'on suppose que c est moyenne géométrique entre a et b, on aura la relation

$$c^2 = ab. \qquad (1)$$

La relation imposée est symétrique par rapport à a et b; nous introduirons comme inconnues auxiliaires les fonctions symétriques fondamentales de a et b :

$$u = a + b, \qquad v = ab.$$

Nous éliminerons donc u, v, c entre les relations

$$(1')\qquad c^2 = v \qquad \begin{cases} u + c = -m & (2) \\ v + cu = p & (3) \\ cv = -q. & (4) \end{cases}$$

Nous remplaçons par v par c^2 dans les relations (3) et (4), et en outre, dans (3), nous remplaçons u par la valeur $-m - c$ tirée de la relation (2). Nous sommes ramenés à exprimer qu'il existe un nombre c tel que

$$mc + p = 0 \qquad \text{et} \qquad (6)\quad c^3 + q = 0. \qquad (5)$$

Si $m \neq 0$, $c = -\frac{p}{m}$, et la condition cherchée est

$$p^3 - qm^3 = 0;$$

lorsqu'elle est vérifiée,

$$x^3 + mx^2 + px + \frac{p^3}{m^3} = \left(x + \frac{p}{m}\right)\left[x^2 + \left(m - \frac{p}{m}\right)x + \frac{p^2}{m^2}\right];$$

a et b sont les racines du trinôme entre crochets.

Si $m = 0$, la relation (5) exige $p = 0$; l'équation (E) devient $x^3 + q = 0$, toute racine de cette équation binôme est moyenne géométrique entre les deux autres.

EXEMPLE III. — *Quelle relation doivent vérifier les coefficients a, b, c, d, de l'équation*

(E) $$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pour que la somme de deux des racines soit égale à la somme des deux autres?

Soient x_1, x_2 deux des racines dont la somme égale celle des deux autres x_3 et x_4 :

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4. \tag{1}$$

La relation imposée est symétrique par rapport à x_1 et x_2 d'une part, par rapport à x_3 et x_4 d'autre part; nous prendrons pour inconnues auxiliaires les fonctions symétriques fondamentales de x_1 et x_2 d'une part, de x_3 et x_4 d'autre part :

$$s = x_1 + x_2, \qquad p = x_1x_2, \qquad s' = x_3 + x_4, \qquad p' = x_3x_4.$$

Les relations générales entre les coefficients et les racines s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} s + s' = -a & (2) \\ p + p' + ss' = b & (3) \\ ps' + p's = -c & (4) \\ pp' = d. & (5) \end{cases}$$

et la relation imposée s'écrit (1') $s = s'$.

Éliminons s, s', p, p' entre les relations (1'), (2), (3), (4), (5). Les relations (1') et (2) donnent $s = s' = -\frac{a}{2}$, et en portant ces valeurs dans les autres relations, nous trouvons

$$p + p' = b - \frac{a^2}{4}, \qquad \frac{a}{2}(p + p') = c \tag{6} \tag{7}$$

$$pp' = d. \tag{8}$$

Pour qu'il existe deux nombres p et p' vérifiant ces relations, il faut et il suffit que la valeur de $p + p'$ tirée de (6) vérifie (7), c'est-à-dire que

$$\frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right) = c. \tag{9}$$

Si la condition (9) est vérifiée, p et p' sont racines de l'équation

$$P^2 - \left(b - \frac{a^2}{4}\right)P + d = 0,$$

puis x_1 et x_2 sont racines de $\quad X^2 + \frac{a}{2}X + p = 0$

x_3 et x_4 sont racines de $\quad X^2 + \frac{a}{2}X + p' = 0,$

et l'on a bien, entre les racines de (E), la relation (1).

Autre méthode. — Lorsque la relation imposée contient symétriquement deux racines, il peut être commode de chercher le trinôme du second degré qui admet ces nombres pour racines.

Dans l'exemple précédent, x_1 et x_2 sont racines d'un trinôme $x^2 - sx + p$; x_3 et x_4

sont racines d'un trinôme $x^2 - s'x + p'$. En écrivant $s' = s$ on exprime la condition imposée; l'identification de $f(x)$ avec $(x^2 - sx + p)(x^2 - sx + p')$ donne

$$\left\{\begin{array}{r} -2s = a \\ p + p' + s^2 = b \\ -ps' - p's = c \\ pp' = d \end{array}\right.$$

l'élimination de p, p', s entre ces relations redonne la condition (9).

REMARQUE. — La relation (9) est indépendante de d. Par suite en donnant à d la valeur zéro et en supprimant la racine 0 ainsi introduite pour l'équation (E), on peut dire que cette condition exprime que l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

admet des racines x_1, x_2, x_3 telles que $x_1 + x_2 = x_3$.

III. POLYNÔMES SYMÉTRIQUES

131. *Valeurs que prend un polynôme symétrique pour les racines d'une équation algébrique.* —

1° **Cas de deux indéterminées.** — On donne un polynôme symétrique $f(x, y)$ et une équation du second degré

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0.$$

Si on remplace dans $f(x, y)$ l'indéterminée x par une racine α de l'équation (E) et l'indéterminée y par l'autre racine β, la valeur obtenue ne dépend pas du choix que l'on a fait pour α et β puisque $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. Cette valeur peut se calculer sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation (E) : en effet, $f(x, y)$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme $F(s, p)$ des indéterminées $x + y = s$ et $xy = p$; il en résulte que

$$f(\alpha, \beta) = F\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right),$$

$f(\alpha, \beta)$ s'exprime rationnellement en fonction des coefficients a, b, c, de l'équation (E).

Dans les applications, et notamment si l'équation (E) a des coefficients numériques, les calculs peuvent se simplifier. Par exemple, *calculons* $S_5 = \alpha^5 + \beta^5$, α *et* β *étant les racines de l'équation* $x^2 - x + 3 = 0$; en remplaçant α^2 par $\alpha - 3$, α^5 s'écrit successivement $\alpha(\alpha - 3)^2$, $(\alpha - 6)(\alpha - 3) + 9\alpha$, et enfin $\alpha + 15$; par suite $S_5 = \alpha + \beta + 30$ ou 31.

2° **Cas de trois indéterminées.** — On donne un polynôme symétrique $f(x, y, z)$ et une équation du troisième degré

$$(E) \qquad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Désignons par a, b, c les racines de (E).

La valeur $f(a, b, c)$ prise par le polynôme donné ne dépend pas du choix que l'on a fait des racines a, b, c pour les substituer respectivement à x, y, z dans $f(x, y, z)$. Cette valeur peut se calculer sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation (E) : on peut mettre en effet $f(x, y, z)$ sous la forme d'un polynôme $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ des indéterminées $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$; il en résulte que

$$f(a, b, c) = F\left(-\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, -\frac{D}{A}\right);$$

$f(a, b, c)$ s'exprime rationnellement en fonction des coefficients A, B, C, D de l'équation (E).

Dans les applications, et notamment si l'équation (E) a des coefficients numériques les calculs peuvent se simplifier.

EXEMPLE I. — L'équation (E)

$$x^3 + px + q = 0$$

ayant pour racines a, b, c,

$$S_1 = a + b + c = 0; \qquad S_2 = (a + b + c)^2 - 2\sum ab \quad \text{ou} \quad -2p.$$

L'égalité $S_3 + pS_1 + 3q = 0$ donne $S_3 = -3q$

L'égalité $S_4 + pS_2 + qS_1 = 0$ donne $S_4 = 2p^2$.

On peut calculer S_6 en observant que a^3 étant égal à $-pa - q$,

$$a^6 = (pa + q)^2 \text{ ou } p^2a^2 + 2pqa + q^2,$$

d'où

$$S_6 = p^2S_2 + 2pqS_1 + 3q^2 \quad \text{ou} \quad -2p^3 + 3q^2.$$

$$\sum a^2b = S_1S_2 - S_3 \text{ ou } 3q; \quad \sum a^2b^2 = \frac{1}{2}[(S_2)^2 - S_4] \text{ ou } p^2.$$

On calcule directement $S_{-1} = -\frac{p}{q}$.

L'égalité $S_1 + pS_{-1} + qS_{-2} = 0$ donne $S_{-2} = \frac{p^2}{q^2}$.

La fonction symétrique rationnelle $\sum \frac{a}{b}$ s'obtient en multipliant $(a + b + c)$ par $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, ce qui donne $S_1 . S_{-1} = \sum \frac{a}{b} + 3$ et par suite $\sum \frac{a}{b} = -3$.

EXEMPLE II. — *Calculer* $\sum a^2b$, *a, b, c étant les racines de l'équation*

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 7 = 0.$$

$\sum a^2b$ peut s'écrire sous la forme

$$ab(a + b) + ba\ (b + c) + ca\ (c + a) = ab\ (\sigma_1 - c) + bc\ (\sigma_1 - a) + ca\ (\sigma_1 - b)$$

d'où $\sum a^2b = -3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2$ ou 3.

IV. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

132. *Transformation d'une équation.* — 1° DÉFINITION. — **Étant donnés un polynôme f de degré n, et une fraction rationnelle φ, à une seule indéterminée, sur le même corps C, transformer l'équation algébrique $f(x) = 0$ par la formule $y = \varphi(x)$, c'est former l'équation algébrique**

$$[y - \varphi(x_1)]\ [y - \varphi(x_2)]\ \ldots\ [y - \varphi(x_n)] = 0 \qquad (1)$$

qui admet pour racines les nombres $y = \varphi(x_j)$ associés par la fonction φ aux racines x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) de l'équation donnée.

L'équation (1) est dite transformée de l'équation $f(x) = 0$ par la formule $y = \varphi(x)$.

Naturellement, il est nécessaire qu'aucune des x_j ne soit pôle de la fraction rationnelle φ, c'est-à-dire que, $\frac{g}{h}$ désignant un représentant irréductible de φ, les polynômes h et f soient premiers entre eux. Nous supposerons cette condition remplie.

2° THÉORÈME. — **Les racines de l'équation transformée (1) sont les mêmes que celles de l'équation algébrique (E) à l'inconnue y, que l'on obtient en éliminant x entre les deux équations algébriques :**

$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad y\,h(x) - g(x) = 0 \tag{2}$$

En effet, β est une racine de (1) si, et seulement s'il existe un nombre α tel que

$$\left\{\begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \beta = \dfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \end{array}\right\}, \text{ ce qui équivaut à } \left\{\begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \beta\,h(\alpha) - g(\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

Exprimer l'existence de α, c'est éliminer x entre les équations (2).

REMARQUE. — L'équation (E) s'écrit S $(y) = 0$, en désignant par S (y) le déterminant de Sylvester (n°127) des deux polynômes f et $yh - g$. Or le polynôme S (y) a pour degré n; en effet, d'une part les coefficients de $yh - g$ interviennent au degré n dans S (y); d'autre part le coefficient de y^n dans S (y) n'est pas nul (ce coefficient n'est autre que le déterminant de Sylvester des polynômes f et h, premiers entre eux).

Ainsi les équations (1) et (E) ont les mêmes racines, et le même degré. Cela n'est pas suffisant pour nous permettre d'affirmer qu'une racine quelconque de (E), et la racine égale de (1) ont le même ordre de multiplicité dans (E) et dans (1). Nous admettrons ce résultat (cf. exercice n° 30 page 264).

3° EXEMPLE I. — Former l'équation qui admet pour racines les inverses des racines de l'équation

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0, \qquad (A_m \neq 0)$$

c'est transformer l'équation par la fonction $y = \frac{1}{x}$. L'équation transformée est

$f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, ou, sous forme entière, $A_my^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_1x + A_0 = 0$.

EXEMPLE II. — L'équation algébrique $f(x) = 0$ ayant pour racines les nombres x_i, former l'équation qui admet pour racines les nombres $x'_i = x_i + h$, où h est une constante, c'est transformer l'équation donnée par la fonction $y = x + h$.

L'équation transformée est $f(-h + y) = 0$.

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, en choisissant $h = \frac{b}{3a}$, l'équation transformée est de la forme $y^3 + py + q = 0$.

Par cette transformation la recherche et l'étude des racines des équations du troisième degré peuvent se ramener aux mêmes questions pour des équations privées de terme du second degré, ces équations sont dites équations réduites du troisième degré.

EXEMPLE III. — L'équation algébrique $f(x) = 0$ ayant pour racines les nombres x_i, former l'équation qui admet pour racines les nombres $x'_i = kx_i$, où k est une constante,

c'est transformer l'équation $f(x) = 0$ par la fonction $y = kx$.

L'équation transformée est $f\left(\frac{y}{k}\right) = 0$. En particulier l'équation $f(-y) = 0$ admet pour racines les nombres opposés aux racines de l'équation donnée.

EXEMPLE IV. — Plus généralement, soit à transformer l'équation algébrique $f(x) = 0$ par la fonction homographique $y = \varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}(ad - bc \neq 0)$. La transformation est possible si $c = 0$, ou si, c n'étant pas nul, $cx + d$ n'a pas de racine commune avec $f(x)$, c'est-à-dire si $f\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0$.

Cette condition étant remplie, l'équation transformée est $f\left(\frac{-dy + b}{cy - a}\right) = 0$, ou encore $F(y) = 0$, $F(y)$ étant le polynôme $(cy - a)^n f\left(\frac{-dy + b}{cy - a}\right)$ (l'équation transformée ne peut admettre la racine $\frac{a}{c}$ qui correspondrait à x infini). Or $f(x) = A \prod (x - x_i)^{\alpha_i}$, $A \in C$, $x_1, \ldots, x_p$ désignant les racines *distinctes* de l'équation donnée, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité; par suite

$$F(y) = A \prod [ax_i + b - y(cx_i + d)]^{\alpha_i}$$

l'équation transformée admet les racines $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_p)$ aux ordres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Autrement dit, *une transformation homographique n'altère pas les ordres de multiplicité des racines d'une équation algébrique.*

EXEMPLE V. — *Former l'équation qui admet pour racines les carrés des différences à deux deux des racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Si a, b, c sont les racines de (1), il s'agit de former l'équation qui a pour racines

$$a_1 = (b - c)^2, \qquad b_1 = (c - a)^2, \qquad c_1 = (a - b)^2.$$

Or $(b - c)^2 = (b + c)^2 - 4bc$, et $a + b + c = 0$, $abc = -q$;

par suite $a_1 = a^2 + 4\frac{q}{a}$ ou $\frac{a^3 + 4q}{a}$, et enfin puisque $a^3 = -pa - q$,

$$a_1 = -p + \frac{3q}{a}; \qquad \text{de même} \qquad b_1 = -p + \frac{3q}{b}, \qquad c_1 = -p + \frac{3q}{c}.$$

La question revient à transformer l'équation (1) par la fonction

$$y = -p + \frac{3q}{x};$$

on trouve $$y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0;$$

REMARQUE. — On déduit de là en particulier

$$(a - b)^2 (b - c)^2 (c - a)^2 = -(4p^3 + 27q^2),$$

et on s'explique ainsi que lorsque $4p^3 + 27q^2$ est nul, l'équation (1) ait une racine double (128, 2°).

133. *Une utilisation de la transformation des équations.* — L'utilisation des fonctions symétriques et de la transformation des équations permet d'exprimer qu'une équation algébrique dont les coefficients sont variables a des racines qui satisfont à une relation imposée à l'avance.

Les exemples suivants montrent comment il convient de procéder.

EXEMPLE I. — *Comment choisir les nombres p et q pour que l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *ait deux racines a et b dont la différence soit un nombre donné k?*

Si l'on a $a - b = k$, on a aussi $b - a = -k$; la condition cherchée exprimera donc que $(a - b)^2 = k^2$, et inversement. Or on a obtenu au 2° (Exemple V) l'équation qui a pour racines les nombres tels que $(a - b)^2$; la condition cherchée s'obtiendra en exprimant que cette dernière équation admet k^2 pour racine.

EXEMPLE II. — *Comment choisir les nombres p et q pour que l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *ait deux racines a et b telles que* $a + b = \lambda ab$, λ *étant donné?*

Si c est la troisième racine de l'équation,

$$a + b - \lambda ab = -c + \frac{\lambda q}{c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\lambda q - c^2}{c};$$

il revient au même d'exprimer que l'équation admet une racine dont le carré est λq. Or on a obtenu au 2° (Exemple IV) l'équation qui a pour racines les nombres a^2, b^2, c^2; la condition cherchée s'obtiendra en exprimant que cette dernière équation admet λq pour racine.

134. *Abaissement des équations.* — DÉFINITION. — **Abaisser le degré d'une équation c'est ramener sa résolution à celle d'équations de degré moindre.** —

1° On abaisse le degré d'une équation bicarrée, et plus généralement d'une équation algébrique qui ne contient que des puissances paires de x en prenant pour inconnue auxiliaire $x^2 = y$.

2° Si f et g sont deux polynômes sur le corps C, on résoudra de même l'équation algébrique

$$f[g(x)] = 0$$

en prenant pour inconnue auxiliaire

$$g(x) = y.$$

3° Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique sur le corps C dont les racines s'associent deux à deux de façon à vérifier une relation symétrique $\psi(u, v) = 0$, deux racines associées ayant le même ordre de multiplicité.

On cherche en premier lieu si l'équation admet des racines associées à elles-mêmes, c'est-à-dire qui vérifient la relation $\psi(x, x) = 0$; cela revient à chercher si l'équation proposée et l'équation $\psi(x, x) = 0$ ont des racines communes; si elles en ont, on en débarrasse l'équation proposée.

Cela fait, l'équation n'admet plus de racine associée à elle-même, elle est nécessairement de degré pair, soit $2p$. On cherche à prendre comme inconnue auxiliaire une fonction de x, soit $y = \varphi(x)$, qui prenne la même valeur quand on y remplace x par deux racines associées.

La transformation $y = \varphi(x)$ conduit théoriquement, dans ce cas, à une équation transformée de degré $2p$, $S(y) = 0$, dans laquelle le polynôme $S(y)$ est le carré d'un polynôme $S_1(y)$ de degré p. Dans la pratique, on s'attache, naturellement, à obtenir directement $S_1(y)$, sans passer par l'intermédiaire de $S(y)$. On obtient ainsi un abaissement de l'équation $f(x) = 0$.

C'est ainsi que si les racines sont liées deux à deux par la relation $u + v = 2a$, on abaissera le degré en prenant pour inconnue auxiliaire $y = (x - a)^2$ qui a la même valeur pour deux racines associées.

135. *Équations réciproques.* — DÉFINITION. — **On dit qu'une équation est réciproque si ses racines s'associent deux à deux de façon que leur produit soit l'unité, deux racines associées étant de même ordre.**

Forme d'une équation réciproque. — Les inverses des racines d'une équation algébrique de degré n

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

sont racines de l'équation algébrique

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{2}$$

et, de plus si a est racine d'ordre p de l'équation (1), $\frac{1}{a}$ est aussi racine d'ordre p de l'équation (2).

Pour que l'équation (1) soit réciproque, il faut et il suffit qu'il existe un nombre k tel que

$$f(x) = kx^n f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3}$$

Soit $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$, $(A_0 \neq 0,\ A_n \neq 0)$

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit réciproque est qu'il existe un nombre k tel que

$$A_0 = kA_n, \qquad A_1 = kA_{n-1}, \qquad A_2 = kA_{n-2} \ldots, \qquad A_n = kA_0. \tag{4}$$

La première et la dernière de ces égalités donnent

$$A_0 = k^2A_0$$

d'où $k = \pm 1$.

Si $k = 1$, les coefficients des termes extrêmes du polynôme $f(x)$ ordonné sont égaux et il en est de même des coefficients des termes équidistants des extrêmes.

Si $k = -1$, les coefficients des termes extrêmes sont opposés ainsi que les coefficients des termes équidistants des extrêmes. Observons que si n est pair, soit $n = 2p$, l'égalité $A_p = -A_{2p-p}$ exige que $A_p = 0$.

En résumé **pour qu'une équation soit réciproque, il faut et il suffit que, le premier membre étant ordonné, les termes extrêmes et les termes équidistants des extrêmes aient des coefficients égaux ou que les termes extrêmes et les termes équidistants des extrêmes aient des coefficients opposés.**

Abaissement d'une équation réciproque. — Si une équation réciproque admet une racine a égale à la racine associée, $a \times a = 1$ et $a = \pm 1$. On cherche si l'équation réciproque proposée a pour racine $+1$ ou -1, et le cas échéant,

on la débarrasse de ces racines. Si $f(x) = 0$ est l'équation ainsi obtenue, le degré de $f(x)$ est nécessairement pair, soit $n = 2p$. De plus, le produit des racines étant $+1$, le dernier coefficient est égal au premier.

Dès lors l'équation est nécessairement de la forme

$$A_0x^{2p} + A_1x^{2p-1} + \ldots + A_px^p + \ldots + A_1x + A_0 = 0. \qquad (5)$$

La fraction rationnelle

$$y = x + \frac{1}{x} \qquad (6)$$

prend la même valeur lorsqu'on y remplace x par deux racines associées a et $\frac{1}{a}$, les $2p$ valeurs qu'elle prend quand on y remplace x par les racines de l'équation réciproque sont deux à deux égales.

Formons l'équation qui a pour racines les p valeurs de y correspondant aux p couples de racines inverses de l'équation (1). Observons que l'équation (5) n'a pas de racine nulle et écrivons-la en divisant tous les termes par x^p et groupant les termes extrêmes ainsi que les termes équidistants des extrêmes :

$$A_0\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) + A_1\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \ldots + A_{p-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_p = 0. \qquad (7)$$

En élevant au carré les deux membres de l'égalité (6) nous trouvons

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

d'où

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 2y$$

ce qui donne

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y;$$

$x^2 + \frac{1}{x^2}$ et $x^3 + \frac{1}{x^3}$ s'expriment en fonction de y par des polynômes respectivement de degrés 2 et 3. Supposons que, k étant un certain entier positif,

$$x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} = P_{k-1}(y) \qquad \text{et} \qquad x^k + \frac{1}{x^k} = P_k(y),$$

$P_{k-1}(y)$ et $P_k(y)$ étant des polynômes en y, de degré égal à l'indice. De la deuxième de ces égalités il résulte que

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = yP_k(y)$$

d'où

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = yP_k(y) - P_{k-1}(y).$$

Concluons de là que, quel que soit l'entier p, $x^p + \frac{1}{x^p}$ est égal à un poly-

nôme en y de degré p. Nous savons former de proche en proche ces polynômes et écrire l'équation (7) sous la forme

$$\varphi_p(y) = 0 \qquad (8)$$

φ_p étant un polynôme de degré p par rapport à y.

A toute racine y de l'équation (8) correspondent deux racines de l'équation proposée, solutions de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad \text{ou} \qquad (9) \quad x^2 - xy + 1 = 0.$$

La résolution de l'équation proposée se ramène ainsi à celle d'une équation de degré moitié et à celle de p équations du second degré.

REMARQUE I. — Dans le cas où les coefficients de l'équation (7) sont réels, pour qu'une racine y de l'équation (8) donne des racines réelles de l'équation réciproque, il faut qu'elle soit réelle et que l'équation (9) qui lui correspond ait ses racines réelles, c'est-à-dire que y ne soit pas compris entre -2 et $+2$.

REMARQUE II. — La fonction homographique $\frac{x-1}{x+1}$ prend des valeurs opposées pour deux valeurs de x inverses l'une de l'autre, elle permet de transformer une équation réciproque en une équation dont les racines sont deux à deux opposées.

EXEMPLES. — 1° Proposons-nous de calculer algébriquement les racines cinquièmes de l'unité. L'équation $x^5 - 1 = 0$ débarrassée de la racine 1, s'écrit

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

et la transformation $y = x + \frac{1}{x}$ conduit à la résolvante

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Les racines cinquièmes imaginaires de l'unité sont donc les racines des équations

$$x^2 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} x + 1 = 0,$$

on les obtient en remplaçant des diverses façons possibles ε et ε' par $+1$ et -1 dans la formule

$$\frac{1}{4}\left[-1 + \varepsilon\sqrt{5} + \varepsilon' i\sqrt{10 + 2\varepsilon\sqrt{5}}\right].$$

Cette étude permet d'écrire :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right).$$

Comparons à l'égalité du n° 114 (Exemple III, $p = 2$)

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right).$$

D'après l'unicité de la décomposition sur le corps R, nous pouvons affirmer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont dans leur ensemble $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. La considération du signe permet d'affirmer

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \qquad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

2° Soit à former l'équation qui a pour racines les diverses valeurs que prend le rapport $\frac{u}{v}$ quand on y remplace u et v par deux des racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Si a, b, c désignent les racines, on doit former l'équation du 6e degré ayant pour racines

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}.$$

Cette équation est réciproque; si z en désigne l'inconnue, on en réaliserait l'abaissement en posant

$$z + \frac{1}{z} = y;$$

l'équation obtenue, en y, serait de degré 3 et aurait pour racines

$$y_1 = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \qquad y_2 = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \qquad y_3 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Or
$$y_1 = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b + c)^2 - 2bc}{bc} = \frac{a^2}{bc} - 2 = -\frac{a^2}{q} - 2,$$

ou encore
$$y_1 = -1 + \frac{p}{q}a.$$

L'équation en y est la transformée de l'équation en x par la formule $y = -1 + \frac{p}{q}x$, c'est-à-dire

$$q^3(y + 1)^3 + p^3q(y + 1) + qp^3 = 0.$$

En remplaçant y par $z + \frac{1}{z}$, on obtient finalement

$$q^3(z^2 + z + 1)^3 + p^3q(z^2 + z + 1)z^2 + qp^3z^3 = 0.$$

V. ÉQUATIONS DE LA DIVISION DES ARCS

136. *Problème de la division des arcs.* — **1° Énoncé du problème.** — On donne un nombre λ, valeur prise par une fonction circulaire d'un arc a; on demande de former une équation algébrique ayant pour racine

soit $x = \cos\frac{a}{m}$, soit $y = \cos\frac{a}{m}$, soit $z = \operatorname{tg}\frac{a}{m}$,

m étant un entier naturel.

Nous utiliserons la formule de Moivre

$$(x + iy)^m = \cos a + i \sin a$$

d'où
$$\cos a = x^m - C_m^2 x^{m-2}y^2 + C_m^4 x^{m-4}y^4 - \dots \qquad (1)$$
$$\sin a = C_m^1 x^{m-1}y - C_m^3 x^{m-3}y^3 + \dots \qquad (2)$$

2° Cas où l'on donne $\lambda = \cos a$. — Si l'on donne un nombre réel $\lambda \in [-1, +1]$, et si a est tel que

$$\lambda = \cos a,$$

x et y forment une solution du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^m - C_m^2 x^{m-2} y^2 + \ldots = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

Réciproquement, si deux nombres x et y forment une solution du système (3), il existe un arc θ, défini à $2k\pi$ près, tel que $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, et d'après la seconde équation (3), $\cos m\,\theta = \lambda$; x et y sont donc respectivement le cosinus et le sinus de la m-ième partie d'un arc qui a λ pour cosinus.

L'élimination de y entre les équations (3) donne

$$x^m - C_m^2 x^{m-2}(1 - x^2) + \ldots = \lambda;$$

En remplaçant x par $\varepsilon\sqrt{1 - y^2}$ ($\varepsilon = \pm 1$) on obtient une équation qui donne y.

Enfin, de la relation $\frac{y}{x} = z$, on tire

$$\lambda = x^m[1 - C_m^2 z^2 + \ldots]$$

et comme $$x^2 = \frac{1}{1 + z^2}$$

l'équation $$\lambda = \frac{1 - C_m^2 z^2 + C_m^4 z^4 - \ldots}{\varepsilon^m (1 + z^2)^{\frac{m}{2}}}$$

donne les valeurs de z.

3° **Cas où l'on donne** $\lambda = \sin a$. — On donne un nombre réel $\lambda \in [-1 + 1]$, et si a est tel que

$$\lambda = \sin a,$$

x et y forment une solution du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ C_m^1 x^{m-1} y - C_m^3 x^{m-3} y^3 + \ldots = \lambda \end{cases} \tag{4}$$

Réciproquement, toute solution de (4) fournit le cosinus et le sinus de la m-ième partie d'un arc qui a λ pour sinus.

4° **Cas où l'on donne** $\lambda = \operatorname{tg} a$. — On donne un nombre λ quelconque, et si a est tel que

$$\lambda = \operatorname{tg} a,$$

$z = \frac{y}{x}$ est racine de l'équation

$$\frac{C_m^1 z - C_m^3 z^3 + \ldots}{1 - C_m^2 z^2 + C_m^4 z^4 - \ldots} = \lambda. \tag{5}$$

Réciproquement, si z est une solution de l'équation (5), il existe un arc θ, défini à $k\pi$ près, tel que $z = \operatorname{tg}\theta$, et d'après (5), $\operatorname{tg} m\theta = \lambda$, z est la tangente de la m-ième partie d'un arc qui a λ pour tangente.

5° **Méthode générale de discussion.** — La trigonométrie permet de montrer que les équations précédentes ont leurs racines réelles. Nous nous bornerons à montrer, sur des exemples le procédé de discussion.

137. ***Division des arcs par 3.*** — 1° *Sachant que le nombre* λ *est le cosinus d'un certain arc* a, *calculer*

$$x = \cos\frac{a}{3}, \qquad y = \sin\frac{a}{3}, \qquad z = \operatorname{tg}\frac{a}{3}.$$

x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - 3xy^2 = \lambda. \end{cases} \tag{1}$$

I. En éliminant y entre les équations (1), on obtient pour calculer x l'équation

$$4x^3 - 3x - \lambda = 0. \tag{2}$$

Expliquons pourquoi nous trouvons une équation du troisième degré. Si a est celui des arcs de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que $\cos a = \lambda$, tous les arcs quotients par 3 de ceux qui ont λ pour cosinus sont donnés par l'une des formules

$$\frac{a}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \qquad (3') \qquad -\frac{a}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \tag{3}$$

k étant un entier quelconque. Les arcs déterminés par la formule (3) sont ceux qui ont pour extrémités les sommets d'un triangle équilatéral P, ceux qui sont déterminés par la formule (3') sont ceux dont les extrémités sont les sommets du triangle équilatéral P' symétrique de P par rapport au diamètre A'A qui passe par l'origine A des arcs. Aux sommets de P' correspondent les mêmes cosinus qu'aux sommets de P. On conclut de là qu'en général l'équation (2) a 3 racines réelles et distinctes comprises entre -1 et $+1$, λ appartenant bien entendu à $]-1, +1[$; on peut écrire l'égalité

$$4x^3 - 3x - \cos a = 4\left[x - \cos\frac{a}{3}\right]\left[x - \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[x - \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Lorsque λ varie, P tourne autour du centre O du cercle; deux racines de l'équation (2) deviennent égales si P devient symétrique par rapport à AA', c'est-à-dire si l'un des sommets de P vient coïncider avec A ou A'. Dans ces conditions $\frac{a}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ est égal à $k'\pi$, a à 0 ou π, λ à 1 ou -1, et l'équation (2) devient

pour $\lambda = 1$, $\quad 4x^3 - 3x - 1 = 0$ ou $\quad (x-1)(2x+1)^2 = 0$,
pour $\lambda = -1$, $\quad 4x^3 - 3x + 1 = 0$ ou $\quad (x+1)(2x-1)^2 = 0$.

II. En éliminant x entre les équations (1), ce qui conduit à mettre x en facteur dans le premier membre de la première des équations (1), à remplacer x par $\varepsilon\sqrt{1-y^2}$ et à élever les deux membres au carré, on trouve l'équation

$$(1 - y^2)(1 - 4y^2)^2 - \lambda^2 = 0. \tag{4}$$

Revenons aux triangles équilatéraux P et P' définis plus haut : en général leurs sommets se projettent sur l'axe B'B des sinus en 6 points distincts, deux à deux symétriques par rapport au centre O : c'est pourquoi nous avons trouvé une équation du sixième degré dont tous les termes sont pairs.

Cette équation a des racines doubles si P est symétrique par rapport au diamètre B'B, c'est-à-dire si $\lambda = 0$, ou si P' est confondu avec P, c'est-à-dire si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

III. Pour calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{3} = z$, observons que $z = \frac{y}{x}$ et que

$$\lambda = \frac{x^3 - 3xy^2}{\varepsilon(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

z est racine de l'équation

$$\lambda^2(1 + z^2)^3 = (1 - 3z^2)^2.$$

La considération des triangles P et P′ explique encore ces circonstances et prouve la réalité des racines.

2° Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré qui a ses racines réelles et distinctes. — Supposons l'équation ramenée à la forme réduite

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

L'équation qui a pour racines les valeurs de $u = \cos\frac{a}{3}$, a étant l'un quelconque des arcs qui ont pour cosinus un nombre donné λ peut s'écrire

$$u^3 - \frac{3}{4}u - \frac{\lambda}{4} = 0, \tag{2}$$

elle est de la forme (1); l'équation qui a pour racines les produits $v = k\cos\frac{a}{3}$ se forme en remplaçant u par $\frac{v}{k}$ dans cette équation, c'est l'équation

$$v^3 - \frac{3}{4}k^2v - \frac{\lambda k^3}{4} = 0. \tag{3}$$

Cette équation dépend de deux paramètres b et k; pour qu'elle ait les mêmes racines que l'équation donnée (1), il faut et il suffit que b et k vérifient les relations

$$-\frac{3}{4}k^2 = p, \qquad -\frac{\lambda k^3}{4} = q.$$

La première est vérifiée, si p est négatif, par $k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, de la deuxième on tire

$$\lambda = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Pour que le nombre ainsi trouvé soit compris entre -1 et $+1$, il faut et il suffit que λ^2 soit plus petit que 1 et pour cela que $4p^3 + 27q^2$ soit négatif, ce que nous avons supposé.

En résumé, pour trouver des valeurs approchées des racines de l'équation (1) on calculera au moyen des tables trigonométriques l'arc φ compris entre 0 et π tel que

$$\cos\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}; \tag{4}$$

les racines de l'équation (3), qui sont aussi celles de l'équation (1), ont pour expressions

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

La double inégalité $0 < \varphi < \pi$ entraîne les suivantes

$$0 < \frac{\varphi}{3} < \frac{\pi}{3}, \qquad \frac{2\pi}{3} < \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} < \pi, \qquad \frac{4\pi}{3} < \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}.$$

Aux arcs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ d'une part, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ d'autre part, correspondent des points symétriques par rapport au diamètre AA′. On a donc

$$x_2 < x_3 < x_1.$$

3° *Sachant que le nombre λ est la tangente d'un certain arc a, calculer $z = \operatorname{tg}\frac{a}{3}$.*

On écrit immédiatement

$$\frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \lambda, \qquad (1)$$

Si a est l'arc de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ qui a pour tangente le nombre donné λ, tous les arcs quotients par 3 de ceux qui ont λ pour tangente sont donnés par la formule

$$\frac{a}{3} + k\frac{\pi}{3},$$

k étant un entier quelconque. Les extrémités de ces arcs sont les sommets d'un hexagone régulier P dont il suffit de conserver la partie qui est sur le demi-cercle B'AB. On reconnaît ainsi que l'équation précédente (1) a, quel que soit λ, toutes ses racines réelles et distinctes. On peut écrire l'égalité

$$z^3 - 3z + (1 - 3z^2)\operatorname{tg} a = \left[z - \operatorname{tg}\frac{a}{3}\right]\left[z - \operatorname{tg}\left(\frac{a}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right]\left[z - \operatorname{tg}\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

REMARQUE. — Soient λ et λ' deux valeurs données successivement pour $\operatorname{tg} a$. Si P et P' sont les hexagones réguliers qui leur correspondent, il est clair qu'un mobile suivant le demi-cercle B'AB de B' vers B coïncide alternativement avec un sommet de l'un des hexagones et un sommet de l'autre. On conclut de cette observation que les équations (1) qui correspondent à ces valeurs λ et λ' sont telles que les racines de chacune de ces équations séparent celles de l'autre.

EXERCICES

1. — Éliminer x entre les équations

a) $$x^n + ax + b = 0, \qquad x^p + \alpha x + \beta = 0,$$

en prenant pour n et p deux des nombres 2, 3, 4, 5.

b) $$x^5 + px + q = 0, \quad qx^5 + px^4 + 1 = 0.$$

2. P (x) est un polynôme. Déterminer l'ordre de multiplicité du zéro a pour chacun des polynômes suivants :

a) $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(a) - \frac{1}{2}(x - a)\,[\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}'(a)]$.

b) $\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(a) - \frac{1}{6}(x - a)\left[\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}'(a) + 4\,\mathrm{P}'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right]$.

3. — Trouver m, n, p de façon que l'équation

$$x^5 + mx^4 + 10x^3 + px + q = 0$$

ait une racine quadruple.

4. — Soit l'équation (1) $\lambda \mathrm{P}(x) + \mu \mathrm{Q}(x) = 0$.

P (x) et Q (x) sont deux polynômes de degrés respectifs p et q; λ et μ sont des paramètres.

I) Démontrer que si l'équation (1) a une racine multiple x_0, x_0 est racine de l'équation (2) : $\mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}'(x) - \mathrm{P}'(x)\,\mathrm{Q}(x) = 0$.

Énoncer une réciproque dans l'hypothèse où P (x) et Q (x) sont premiers entre eux. P et Q étant donnés, combien existe-t-il, en général de couples (λ, μ) tels que l'équation (1) ait une racine multiple?

Application. — Déterminer ρ pour que les équations suivantes aient une racine multiple et, dans chaque cas, résoudre l'équation :

a) $x^4 + 4x^3 + 1 + \rho x(3x + 2) = 0$.

b) $x^5 + 10x^3 + 5x + \rho(5x^4 + 10x^2 + 1) = 0$ (Généraliser).

II) Que peut-on dire d'un nombre x_0 qui serait racine commune à (2) et à l'équation

$$\mathrm{PQ}'' - \mathrm{P}''\mathrm{Q} = 0?$$

5. — Trouver un polynôme $f(x)$ de degré $2n+1$ tel que $f(x)+a$ soit divisible par $(x-b)^n$ et tel que $f(x)-a$ soit divisible par $(x+b)^n$; on pourra se borner au cas $n=3$.

6. — On donne p et q; trouver α, β, λ, μ de façon que

$$x^3+3px+q=\alpha(x+\lambda)^3+\beta(x+\mu)^3.$$

Dans le cas où p et q sont réels, en déduire un mode de résolution de l'équation

$$x^3+3px+q=0.$$

7. — *a*) Quelle relation doit lier A, B, C, D, E pour qu'on puisse mettre le polynôme

$$Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$$

sous la forme $\alpha(x+\lambda)^4+\beta(x+\mu)^4$.

b) Mettre sous la forme précédente les polynômes

$$x^4+4x^3\cos\omega+6x^2\cos 2\omega+4x\cos 3\omega+\cos 4\omega$$
$$x^4-6x^2-8x\cos\omega-1-2\cos 2\omega$$

et en déduire leurs zéros.

8. — Quelle relation doit lier les coefficients de l'équation $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ pour que les racines x_1, x_2, x_3 satisfassent à l'une des relations suivantes (où λ est donné):

$$x_1^2=x_2x_3; \qquad x_1^2=x_2^2+x_3^2; \qquad \frac{2}{x_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3};$$
$$x_1+x_2=\lambda x_3; \qquad x_2=\lambda x_1; \qquad x_2-x_1=\lambda.$$

9. — Quelle relation doit lier les coefficients de l'équation

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

pour que les racines x_1, x_2, x_3, x_4 satisfassent à l'une des relations suivantes (où λ est donné):

$$x_1+x_2=\lambda(x_3+x_4); \qquad x_1x_2=\lambda x_3x_4; \qquad x_1+x_2=x_3x_4;$$

10. — A quelles conditions les images des racines de l'équation

$$z^4+pz^3+qz^2+rz+s=0$$

sont-elles les sommets d'un losange?

11. — Soient A, B, C les images des racines de l'équation

$$z^3+pz+q=0.$$

A quelle condition a-t-on : $AB=AC=2BC$?

12. — *Une méthode pour former les équations algébriques à coefficients dans* C *dont les images des racines dans le plan complexe forment une figure* F *semblable à une figure donnée.* On choisit une figure simple *f* semblable à F, formée de points dont les affixes sont racines de l'équation $\varphi(z)=0$; les équations cherchées sont $\varphi(\alpha z+\beta)=0$.

Exemples : F est un triangle équilatéral ($\varphi=z^3-1$), un parallélogramme, un losange, un carré, triangle rectangle isocèle [$\varphi=z(z-1)(z-i)$], un polygone régulier quelconque, etc...

13. — Dans le plan complexe, on donne deux points A et B. Soit M_p ($p=1, 2, 3, \ldots n$) le point qui partage le segment AB dans le rapport complexe k_p, k_p désignant une des racines n-ièmes du nombre complexe donné K. Dans quel rapport (complexe) le point G, centre des moyennes distances des points M_p partage-t-il le segment AB? Montrer comment la propriété obtenue généralise un théorème classique de Géométrie élémentaire.

14. — Résoudre le système

$$x+y=a+1, \qquad x^n+y^n=a^n+1 \qquad (n=2, 3, 4, 5, 6).$$

15. — Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ x^3+y^3+z^3=c \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3+y^3+z^3=a \\ x^4+y^4+z^4=b \\ yz+zx+xy=c. \end{cases}$$

16. — Démontrer que

$$a+b+c=0 \implies \sum a^3 = 3a^2b^2c^2 - 2\left(\sum bc\right)^3.$$

17. — Calculer la somme $S = \sum \frac{x_i^2+1}{(x_i+1)(x_i+2)}$, les nombres x_i étant les zéros du polynôme $x^{12}+x-1$.

18. — Résoudre le système

$$x+y+z=0, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=2, \qquad \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=3,$$

α, β, γ étant les zéros du polynôme t^3-t+1.

19. — Calculer les fonctions symétriques

$(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_3x_1)(x_3^2-x_1x_2)$ des racines de $x^3+px^2+qx+r=0$

$(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)$ des racines de $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$.

20. — Les longueurs a, b, c des côtés d'un triangle étant racines de l'équation

$$x^3-\lambda x^2+\mu x-\gamma=0,$$

former l'équation ayant pour racines :

a) les longueurs des hauteurs;

b) les cosinus des angles du triangle.

21. — Résoudre les équations

$$x^4-2ax^3+bx^2-2ax+1=0$$
$$x^6-x^5+(a-1)x^4+(1-a)x^2+x-1=0.$$

22. — Effectuer la transformation $y=2-x^2$ dans l'équation

$$x^4+x^3-4x^2-4x+1=0.$$

Utiliser le résultat pour résoudre l'équation.

23. — Former l'équation, réciproque et de degré 6, qui admet pour racines les quotients des racines de l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0 \qquad r\neq 0.$$

prises deux à deux de toutes les manières possibles.

Application. — Calculer la somme $\sum \frac{y_i}{y_j}$, les trois nombres y_1, y_2, y_3 étant les ordonnées des pieds des normales issues d'un point à la parabole dont l'équation est $y^2-2px=0$ (repère orthonormé).

24. — Dans un plan orienté, on considère trois axes Ox, Oy, Oz issus d'un même point O, et tels que

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ox}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}).$$

Déterminer sur ces trois axes, respectivement, trois points A, B, C tels que les côtés du triangle ABC aient des longueurs données a, b, c.

Application $\qquad a=\sqrt{3}, \; b=\sqrt{13}, \; c=\sqrt{7}.$

25. — Montrer les relations suivantes :

$$\operatorname{tg}20^\circ.\operatorname{tg}40^\circ.\operatorname{tg}60^\circ.\operatorname{tg}80^\circ = 3$$
$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

26. — Donner une forme plus simple aux expressions suivantes :

a) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{n-1}{n}\pi$

b) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(a+\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{tg}\left(a+\frac{2\pi}{n}\right)\dots\operatorname{tg}\left(a+\frac{n-1}{n}\pi\right)$

c) $\prod_{k=1}^{k=n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}$

d) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}+\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{2n}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{2n}+\dots+\operatorname{tg}^2\frac{(n-1)\pi}{2n}.$

27. — n étant un entier naturel donné, $t^n+\frac{1}{t^n}$ s'exprime sous la forme d'un polynôme $P(x)$ à l'indéterminée $x=t+\frac{1}{t}$. Décomposer en éléments simples, sur le corps R, la fraction rationnelle $\frac{1}{P(x)}$.

28*. — Lieu du centre d'un triangle équilatéral variable dont les côtés sont des normales à une parabole donnée.

29. — a, b, c désignent les longueurs des côtés des polygones réguliers de 7 côtés inscrits dans un cercle de rayon 1. Vérifier que a^2, b^2, c^2 sont les racines de l'équation

$$x^3-7x^2+14x-7=0.$$

30. — Soient les équations algébriques, de degrés m et p,

$$\begin{cases} f(x)=0 & \text{avec} \quad f(x)=a_0x^m+\dots+a_m, \text{ de racines } x_1,\dots,x_m\ (a_0\neq 0),\\ g(x)=0 & \text{avec} \quad g(x)=b_0x^p+\dots+b_p \text{ de racines } y_1,\dots,y_p\ (b_0\neq 0)\end{cases}$$

a) Dans le déterminant de Sylvester S (n° 127) on remplace

$$a_0 \text{ et } b_0 \text{ par } 1,\ a_j \text{ par } (-1)^j\sigma_j,\ b_k \text{ par } (-1)^k\sigma'_k,$$

les $\sigma_j\ (1\leqslant j\leqslant m)$ et les $\sigma'_k\ (1\leqslant k\leqslant p)$ désignant les polynômes symétriques élémentaires des indéterminées $X_1,\dots,X_m$ et $Y_1,\dots,Y_p$. On obtient ainsi un polynôme P aux mp indéterminées X_j et Y_k. Montrer que ce polynôme est divisible par le polynôme

$$Q=\Pi(X_j-Y_k)\qquad (j=1,\dots,m;\qquad k=1,\dots,p)$$

Montrer que P et Q ont le même degré, mp.

b) En déduire que le déterminant de Sylvester S est égal, au signe près, à l'un et à l'autre des produits

$$R=a_0^p\prod_{j=1}^{m}g(x_j)\qquad R_1=b_0^m\prod_{k=1}^{p}f(y_k).$$

c) Justifier le résultat annoncé au n° 132, 2°.

31. — De l'étude de l'équation : $(z+1)^n=e^{i2na}$, déduire une expression simple de

$$A(a,n)=\sin a\sin\left(a+\frac{\pi}{n}\right)\dots\sin\left(a+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Utiliser le résultat pour résoudre l'exercice 26, *a)*.

32. — Soit P un polynôme de $C[x]$, de degré 4. Montrer que les images des zéros de P forment un parallélogramme si, et seulement si les polynômes P' et P''' ont un zéro commun.

33. — n étant un entier naturel donné, on pose

$$a)\quad x = \operatorname{th}\varphi, \qquad F(x) = \operatorname{th} n\varphi;$$
$$b)\quad x = \operatorname{tg}\varphi, \qquad F(x) = \operatorname{tg} n\varphi$$
$$c)\quad x = \sin\varphi, \qquad F(x) = \frac{1}{\sin(2n+1)\varphi}.$$

Montrer que $F(x)$ est une fraction rationnelle et la décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

CHAPITRE IX

ALGÈBRE LINÉAIRE DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRES

Ce chapitre a pour but d'initier à l'Algèbre linéaire les élèves des classes préparatoires de première année; il doit être laissé de côté par les élèves des classes préparatoires de seconde année.

I. ALGÈBRE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

138. ***Aire algébrique du parallélogramme construit sur un couple rangé de vecteurs dans un plan orienté.*** — 1° **Plan orienté.** — Rappelons d'abord des résultats déjà acquis par le lecteur. Un plan P étant donné et regardé par un observateur situé dans l'un des deux demi-espaces qu'il détermine, une droite D de P peut se déplacer autour d'un point donné O de P dans deux sens différents. *Orienter* le plan P, c'est distinguer ces deux sens en les appelant par des noms différents : l'un sera dit *positif*, l'autre *négatif*. Le plan P sera dit orienté positivement dans le sens *direct* (resp. *rétrograde* ou *inverse*) si le sens appelé positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. le sens de ces aiguilles).

Dans un plan orienté, on peut attribuer un sens à l'angle formé par un couple rangé de demi-droites Ox, Oy issues d'un point O : on considère une demi-droite $O\lambda$, d'origine O, primitivement confondue avec la demi-droite Ox, tournant toujours dans le même sens autour de O, de manière à balayer l'angle *saillant* $\widehat{xOy}$, et venant se confondre avec la demi-droite Oy. *L'angle* $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ *sera dit positif ou négatif suivant que la demi-droite* $O\lambda$ *aura tourné dans le sens positif, ou dans le sens négatif, adopté dans le plan* P.

Étant donné un couple rangé $(V, \overrightarrow{V'})$ de vecteurs libres du plan orienté P, représentés par deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ de même origine, le sens de l'angle de ces deux vecteurs est, par définition, le sens de l'angle des demi-droites Ox, Oy, d'origine O, dont les directions, et les sens, sont ceux des deux vecteurs respectivement.

2° **Aire algébrique du parallélogramme associé à un couple rangé de vecteurs libres dans un plan orienté.** — Soit $(\vec{V}, \vec{V'})$ un couple rangé de vecteurs libres du plan orienté P, dont nous considérerons deux représentants $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ de même origine O (fig. 32); construisons le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. La figure OMSM' est un parallélogramme, éventuellement plat. Nous appellerons *aire algébrique* de ce parallélogramme,

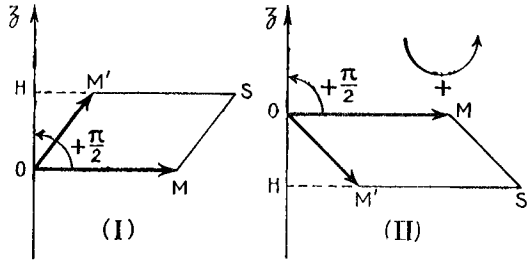


FIG. 32.

un *nombre réel ayant pour valeur absolue l'aire arithmétique mesurée avec une certaine unité d'aire, et pour signe,* + ou —, *suivant que l'angle* $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ *est positif ou négatif;* le nombre réel ainsi défini est indépendant des représentants $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ choisis pour $\vec{V}$ et $\vec{V'}$; on peut donc le considérer comme associé au couple rangé $(\vec{V}, \vec{V'})$; on le désignera par la notation $[\vec{V}, \vec{V'}]$.

Désignons par Oz un axe tel que

$$(\overrightarrow{OM}, \vec{Oz}) = +\frac{\pi}{2},$$

et par H la projection orthogonale de M' sur Oz. Quel que soit le sens de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, on a :

$$\text{valeur absolue de } [\vec{V}, \vec{V'}] = OM \cdot OH = \|\vec{V}\| \cdot OH.$$

Si l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est positif (fig. 32, I) (1), le nombre $[\vec{V}, \vec{V'}]$ est positif, par définition, et le nombre $\overline{OH}$ l'est aussi; si l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est négatif (fig. 32, II) les nombres $[\vec{V}, \vec{V'}]$ et $\overline{OH}$ sont tous deux négatifs. Dans les deux cas, on peut écrire :

$$[\vec{V}, \vec{V'}] = \|\vec{V}\| \, \overline{OH}$$

ou :

$$[\vec{V}, \vec{V'}] = \|\vec{V}\| \, \overline{\text{proj}_{Oz} \vec{V'}}. \qquad (1)$$

$[\vec{V}, \vec{V'}]$ est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires, soit que l'un d'eux soit nul, soit qu'ils aient même direction.

(1) La figure 32 a été faite dans l'hypothèse où le plan P est orienté positivement dans le sens direct; les résultats restent évidemment valables dans le cas contraire.

3° **Propriétés de l'aire algébrique du parallélogramme associé à un couple rangé de vecteurs.** — Soit E_2 l'ensemble des vecteurs libres du plan P. A tout couple rangé $(\vec{V}, \vec{V'})$ d'éléments de E_2, c'est-à-dire à tout élément de l'ensemble $E_2 \times E_2$, on a associé un nombre réel; on a donc défini une application f de $E_2 \times E_2$ dans l'ensemble R des nombres réels. Nous allons établir quelques propriétés de cette application.

a) Les nombres $[\vec{V}, \vec{V'}]$ et $[\vec{V'}, \vec{V}]$ ont, par définition, même valeur absolue, et des signes contraires. On a donc :

$$[\vec{V'}, \vec{V}] = -[\vec{V}, \vec{V'}]. \qquad (2)$$

Notons encore que $[\vec{V}, \lambda\vec{V}] = 0 \quad (\forall \vec{V})$.

b) D'après la formule (1)

$$[\vec{V}, \mu\vec{V'}] = \|\vec{V}\| \overline{\text{proj}}_{Oz}(\mu\vec{V'}) \quad \text{ou} \quad \|\vec{V}\| \mu \overline{\text{proj}}_{Oz}\vec{V'}.$$

Par suite
$$[\vec{V}, \mu\vec{V'}] = \mu[\vec{V}, \vec{V'}] \qquad (3)$$

En utilisant la propriété (*a*), on démontre de même

$$[\lambda\vec{V}, \vec{V'}] = \lambda[\vec{V}, \vec{V'}] \qquad (3')$$

c) La formule (1) permet encore d'écrire

$$[\vec{V}, \vec{V_1'} + \vec{V_2'}] = \|\vec{V}\| \overline{\text{proj}}_{Oz}(\vec{V_1'} + \vec{V_2'}) \quad \text{ou} \quad \|\vec{V}\| \overline{\text{proj}}_{Oz}\vec{V_1'} + \|\vec{V}\| \overline{\text{proj}}_{Oz}\vec{V_2'}.$$

Il en résulte que :

$$[\vec{V}, \vec{V_1'} + \vec{V_2'}] = [\vec{V}, \vec{V_1'}] + [\vec{V}, \vec{V_2'}] \qquad (4)$$

En utilisant la formule (2), on démontrerait que

$$[\vec{V_1} + \vec{V_2}, \vec{V'}] = [\vec{V_1}, \vec{V'}] + [\vec{V_2}, \vec{V'}]. \qquad (4')$$

4° **Définitions.** — *a*) Soit $\varphi(\vec{V})$ une fonction scalaire du vecteur $\vec{V}$, $\vec{V}$ appartenant à un plan P ou étant quelconque dans l'espace; φ est une application de l'espace vectoriel E_2 ou E_3 dans le corps R des réels.

On dit que l'*application* φ *est linéaire* si elle vérifie les deux propriétés suivantes appelées critères de linéarité :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \varphi(\vec{V_1}) + \varphi(\vec{V_2}) \\ \varphi(\lambda\vec{V}) = \lambda\varphi(\vec{V}) \qquad \forall \lambda \in R \end{cases}$$

quels que soient $\vec{V}$, $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ pris dans E_2 ou dans E_3.

(Cette définition sera généralisée ultérieurement.)

Les égalités (3) et (4) expriment que, pour $\vec{V}$ donné, l'application f

est linéaire par rapport au vecteur $\vec{V}'$; de même les égalités (3') et (4') expriment que, pour $\vec{V}'$ donné, f est une application linéaire par rapport au vecteur $\vec{V}$; on exprime ce fait en disant que f est une application *bilinéaire* de $E_2 \times E_2$ dans R.

b) Soit E un ensemble dont ξ est la variable, et ψ une application de $E \times E$ dans R; on dit que cette application est *alternée* si

$$\psi(\xi, \xi') = -\psi(\xi', \xi)$$

quels que soient ξ et ξ' pris dans E.

La formule (2) exprime que l'application f étudiée au 3° est alternée.

c) Finalement l'application f étudiée au 3° est une *application bilinéaire alternée* de $E_2 \times E_2$ dans R.

5° GÉNÉRALISATION. — En combinant et itérant les égalités (3), (3'), (4), (4') on peut écrire

$$\left[\sum_1^p \lambda_i \vec{V}_i, \sum_1^q \mu_j \vec{V}'_j\right] = \sum_1^p \sum_1^q \lambda_i \mu_j \left[\vec{V}_i, \vec{V}'_j\right].$$

139. *Déterminants du second ordre.* — 1° Déterminant d'un couple rangé de vecteurs dans une base. — Soit E_2 l'ensemble des vecteurs libres d'un plan P que nous supposerons provisoirement orienté; et soit $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ une base (**65**, 2°) de l'espace E_2. *On appelle déterminant du couple rangé de vecteurs* $\left(\vec{V}, \vec{V}'\right)$ *de* E_2 *dans la base* $\mathfrak{B}$ *le nombre, noté* $\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ *donné par :*

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right] = \frac{\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]}{\left[\vec{i}, \vec{j}\right]}$$

$\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$, $\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$ désignant les aires algébriques des parallélogrammes associés aux couples $\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ et $\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$(1).

Si on change l'orientation du plan P, les deux nombres $\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ et $\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$ conservent la même valeur absolue, mais changent simultanément de signes, de sorte que $\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ ne dépend pas du sens positif choisi dans P.

Si on désigne par ρ l'inverse de $\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$, l'égalité (2) :

$$\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right] = \rho\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$$

---

(1) $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] \neq 0$ car les deux vecteurs d'une base ne sont pas colinéaires.

(2) Nous pouvons nous abstenir de rappeler la base $\mathfrak{B}$ tant que n'interviendra pas une autre base.

montre que, comme l'aire algébrique $[\vec{V}, \vec{V'}]$, dét $[V, V']$ est une *application bilinéaire alternée* de $E_2 \times E_2$ dans R, ce qui s'exprime par les formules :

$$\text{dét}\,[\lambda\vec{V}, \mu\vec{V'}] = \lambda\mu\ \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V'}]$$
$$\text{dét}\,[\vec{V_1} + \vec{V_2}, \vec{V'}] = \text{dét}\,[\vec{V_1}, \vec{V'}] + \text{dét}\,[\vec{V_2}, \vec{V'}]$$
$$\text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V_1'} + \vec{V_2'}] = \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V_1'}] + \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V_2'}]$$
$$\text{dét}\,[\vec{V'}, \vec{V}] = -\text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V'}].$$

2° **Déterminant de deux combinaisons linéaires de deux vecteurs.** — Soient $\vec{A}$ et $\vec{A'}$ deux combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$:

$$\begin{array}{c|cc} & \vec{A} & \vec{A'} \\ \hline \vec{V} & \alpha & \alpha' \\ \vec{V'} & \beta & \beta' \end{array} \qquad \begin{aligned} \vec{A} &= \alpha\vec{V} + \beta\vec{V'} \\ \vec{A'} &= \alpha'\vec{V} + \beta'\vec{V'} \end{aligned}$$

$$\text{dét}\,[\vec{A}, \vec{A'}] = \text{dét}\,[\alpha\vec{V} + \beta\vec{V'}, \alpha'\vec{V} + \beta'\vec{V'}].$$

Utilisons les propriétés de linéarité

$$\text{dét}\,[\vec{A}, \vec{A'}] = \alpha\alpha'\ \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V}] + \alpha\beta'\ \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V'}] + \beta\alpha'\ \text{dét}\,[\vec{V'}, \vec{V}] + \beta\beta'\ \text{dét}\,[\vec{V'}, \vec{V'}].$$

Les déterminants comportant deux vecteurs égaux sont nuls, et finalement

$$\text{dét}\,[\vec{A}, \vec{A'}] = \text{dét}\,[\vec{V}, \vec{V'}]\,.(\alpha\beta' - \beta\alpha') \qquad (1)$$

La formule précédente est indépendante de la base de l'espace vectoriel E_2 dans laquelle sont exprimés les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{A}$, $\vec{A'}$.

Supposons que $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ soient rapportés à la base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V} \quad \vec{V'} \\ \hline \vec{i} & \\ \vec{j} & \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix} = \mathcal{M} \end{array}$$

La formule qui vient d'être établie donne

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\,[\vec{V}, \vec{V'}] = \text{dét}_{\mathcal{B}}\,[\vec{i}, \vec{j}]\,.(ab' - ba').$$

Mais, par définition, $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{j}) = 1$. Par suite

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\,[\vec{V}, \vec{V'}] = ab' - ba'. \qquad (2)$$

3° **Déterminant d'une matrice** 2×2. — DÉFINITION. — Nous appellerons *déterminant de la matrice* $\mathfrak{M}$ soit le nombre $ab' - ba'$, soit le symbole

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \tag{3}$$

par lequel nous représenterons ce nombre (1), symbole qui ne diffère de celui par lequel est représentée la matrice $\mathfrak{M}$ que par le remplacement des crochets par des barres simples. En définitive, nous poserons :

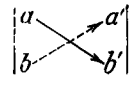
$$\text{dét } \mathfrak{M} = \text{dét} \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Les mots : *élément, ligne, colonne, rangée* ont le même sens pour le déterminant [symbole (3)] que pour la matrice. Le déterminant est dit du *second ordre* parce qu'il a deux lignes et deux colonnes.

Remplacer le symbole

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \text{ par le nombre } ab' - ba'$$

qu'il représente, c'est, par définition, *développer* le déterminant. Les nombres ab' et $-ba'$ sont les *termes* de ce développement (ou termes du déterminant); ils sont précédés des *signes extérieurs* $+$ et $-$; le schéma suivant indique la manière de les former



Avec cette notation, les formules (1) et (2) s'écrivent :

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}} \left[\vec{A}, \vec{A'}\right] = \text{dét}_{\mathfrak{B}} \left[\vec{V}, \vec{V'}\right] \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} \tag{1'}$$

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}} \left[\vec{V}, \vec{V'}\right] = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \tag{2'}$$

Le déterminant de la matrice $\mathfrak{M}$ et de sa transposée $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ont même valeur

$$\underset{\text{dét } \mathfrak{M}}{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}} = \underset{\text{dét } \widetilde{\mathfrak{M}}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = ab' - ba'$$

Autrement dit, *on ne change pas la valeur d'un déterminant en échangeant chaque ligne avec la colonne de même rang.* Il en résulte que *toute propriété, valable pour tout déterminant du second ordre, et concernant les éléments d'une même colonne, reste valable si on remplace le mot colonne par le mot ligne;* on pourra énoncer cette propriété en utilisant le mot rangée.

---

(1) Le contexte évitera, en général, toute ambiguïté à ce sujet.

4° **Interprétation géométrique du déterminant d'une matrice.** — Nous avons donné, du mot déterminant, deux définitions : l'une *géométrique* (déterminant d'un couple rangé de vecteurs dans une base), l'autre *algébrique*, ou *formelle* (déterminant d'une matrice). La formule (2) établie au 2° (*in fine*) permet de « raccorder » ces deux définitions; elle exprime en effet que *le déterminant d'un couple rangé de vecteurs dans une base est le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans cette base :*

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V} \quad \vec{V}' \\ \hline \vec{i} & a \quad a' \\ \vec{j} & b \quad b' \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}} \left[\vec{V}, \vec{V}'\right] = \det \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Corollaire. — Pour que les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$ soient colinéaires, il faut et il suffit que l'aire algébrique $\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ soit nulle, en d'autres termes, il faut et il suffit que $\det\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ soit nul, et l'on retrouve la condition obtenue au n° 65, 4°.

$$\vec{V}, \vec{V}' \text{ colinéaires} \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad ab' - ba' = 0$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Pour que deux vecteurs soient colinéaires dans un plan P, il faut et il suffit que soit nul le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base quelconque de P.**

5° **Propriétés formelles des déterminants des matrices** 2×2. — Chaque propriété du déterminant de deux vecteurs, énoncée au 1°, entraîne une propriété (algébrique, ou formelle) du déterminant d'une matrice 2×2.

a) La propriété $\det\left[\vec{V}', \vec{V}\right] = -\det\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$ conduit à :

$$\begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

et, d'après la remarque finale du 3°, on aura de même

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix},$$

autrement dit : *un déterminant se change en son opposé lorsqu'on transpose les deux lignes ou les deux colonnes.*

En particulier *si un déterminant a deux rangées parallèles identiques, sa valeur est zéro.*

b) Les propriétés

$$\det\left[\lambda\vec{V}, \vec{V}'\right] = \lambda \det\left[\vec{V}, \vec{V}'\right] \qquad \text{et} \qquad \det\left[\vec{V}, \mu\vec{V}'\right] = \mu \det\left[\vec{V}, \vec{V}'\right]$$

conduisent aux propriétés formelles suivantes :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & a' \\ \lambda b & b' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} a & \mu a' \\ b & \mu b' \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix},$$

qu'on peut énoncer : *lorsqu'on multiplie les éléments d'une rangée d'un déterminant par un nombre, la valeur du déterminant est multipliée par ce nombre.*

Il en résulte que *si les éléments de deux rangées d'un déterminant sont proportionnels, la valeur de ce déterminant est zéro.*

En effet si $a' = \rho a$, $b' = \rho b$, c'est que $\vec{V}' = \rho \vec{V}$, et le déterminant de deux vecteurs colinéaires est nul.

c) Les propriétés

$$\text{dét}\left[\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \vec{V}'\right] = \text{dét}\left[\vec{V}_1, \vec{V}'\right] + \text{dét}\left[\vec{V}_2, \vec{V}'\right]$$
$$\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2\right] = \text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}'_1\right] + \text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}'_2\right]$$

se traduisent formellement par les égalités

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a' \\ b_1 + b_2 & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a' \\ b_1 & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a' \\ b_2 & b' \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & a'_1 + a'_2 \\ b & b'_1 + b'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a'_1 \\ b & b'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a'_2 \\ b & b'_2 \end{vmatrix}.$$

On pourrait généraliser.

Nous énoncerons : *si les éléments d'une même rangée d'un déterminant sont des sommes de k nombres, ce déterminant est la somme de k déterminants obtenus, à partir du déterminant initial, en remplaçant chaque élément de la rangée considérée successivement par chacun des k nombres dont il est la somme.*

6° **Produit de deux déterminants du second ordre.** — Dans l'espace vectoriel E_2 rapporté à la base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$, soit $\left(\vec{V}, \vec{V}'\right)$ un couple rangé de vecteurs

$$\begin{array}{c|cc} & \vec{V} & \vec{V}' \\ \hline \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \end{array} \Longrightarrow \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right] = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Soit maintenant $\left(\vec{A}, \vec{A}'\right)$ un second couple rangé de vecteurs combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$

$$\begin{array}{c|cc} & \vec{A} & \vec{A}' \\ \hline \vec{V} & \alpha & \alpha' \\ \vec{V}' & \beta & \beta' \end{array} \Longrightarrow \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A}'\right] = \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}'\right] \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Or on peut calculer $\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A}'\right]$ en calculant les composantes de $\vec{A}$ et $\vec{A}'$ dans la base $\mathfrak{B}$:

$$\vec{A} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V}' = (\alpha a + \beta a')\vec{i} + (\alpha b + \beta b')\vec{j}$$
$$\vec{A}' = \alpha'\vec{V} + \beta'\vec{V}' = (\alpha' a + \beta' a')\vec{i} + (\alpha' b + \beta' b')\vec{j}.$$

La formule (4) peut s'écrire alors :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + a'\beta & a\alpha' + a'\beta' \\ b\alpha + b'\beta & b\alpha' + b'\beta' \end{vmatrix}.$$

On voit ainsi que le produit de deux déterminants du second ordre peut être mis lui-même sous forme d'un déterminant du second ordre dont les éléments sont les sommes des produits des éléments correspondants des lignes du premier déterminant et des colonnes du second. On dit qu'on a effectué le produit « lignes par colonnes »; mais comme il est possible de transposer, dans chaque déterminant, chaque ligne avec la colonne de même rang, la multiplication peut aussi être effectuée « lignes par lignes », ou « colonnes par lignes » ou « colonnes par colonnes », par exemple (« colonnes par colonnes »).

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a'\alpha + b'\beta \\ a\alpha' + b\beta' & a'\alpha' + b'\beta' \end{vmatrix}$$

II. ALGÈBRE LINÉAIRE DU TROISIÈME ORDRE

140. ***Orientation de l'espace*** (1). — 1° **Sens des rotations autour d'un axe.** — On dit que le demi-plan Π ayant pour frontière l'axe $x'x$ tourne dans le sens *direct* autour de $x'x$ si pour l'observateur placé sur $x'x$ de façon que le sens positif de l'axe aille de ses pieds vers sa tête, et qui regarde Π, Π se déplace de la droite vers la gauche. Le sens contraire est dit *inverse* ou rétrograde.

2° **Sens d'un trièdre orienté.** — *a*) On dit qu'on a orienté un trièdre lorsqu'on a énoncé ses arêtes dans un certain ordre.

Soit T ($Oxyz$) un trièdre orienté; les deux dernières arêtes, Oy, Oz, déterminent un plan P. Imaginons une demi-droite $O\lambda$ de ce plan, primitivement confondue avec Oy, tournant toujours dans le même sens autour de O, de manière à balayer l'angle saillant yOz, et venant se confondre avec Oz.

Si le demi-plan Π ayant pour frontière le support de Ox et contenant la demi-droite $O\lambda$ a tourné autour de Ox dans le sens direct (resp. rétrograde) on dit que le trièdre orienté T est *direct* (resp. *inverse* ou *rétrograde*).

b) Cette étude conduit à la définition suivante :

DÉFINITION. — **Étant donné un trièdre $Oxyz$ dont les arêtes sont rangées dans l'ordre Ox, Oy, Oz de l'énumération, on dit qu'il est direct si, pour un observateur placé les pieds en O le long de la première arête Ox et regardant la deuxième arête Oy, le trièdre est à gauche. Dans le cas contraire, on dit que le trièdre est inverse ou rétrograde.**

(1) Ce paragraphe se borne à rappeler des résultats déjà acquis par le lecteur.

Deux trièdres orientés, c'est-à-dire dont les arêtes sont données dans un ordre déterminé, sont dits *de même sens* (resp. *de sens contraires*) selon qu'ils sont tous deux directs ou tous deux inverses (resp. selon que l'un est direct, l'autre inverse).

En recourant à l'expérience, on constate les faits suivants :

1° On change le sens d'un trièdre orienté si l'on transpose deux de ses arêtes : *Oxyz* et *Oxzy* sont de sens contraires.

2° En transposant les deux premières arêtes du dernier trièdre, on constate que *Oxyz* et *Ozxy* sont de même sens.

Les trièdres orientés *Oxyz*, *Ozxy*, *Oyzx* déduits l'un de l'autre par une permutation circulaire des arêtes sont de même sens; ils sont de sens contraire à celui des trièdres orientés *Oyxz*, *Oxzy*, *Ozyx*.

c) Si deux trièdres orientés ont deux arêtes de mêmes numéros respectivement confondues, ils sont de même sens ou de sens contraires suivant que leurs troisièmes arêtes sont, ou non, du même côté du plan déterminé par les deux premières. Il en résulte que *le sens d'un trièdre orienté ne change pas si on le déforme de manière que ses arêtes ne deviennent jamais coplanaires.*

3° **Orientation de l'espace.** — On dit qu'on a orienté l'espace lorsqu'on a choisi, une fois pour toutes, un trièdre orienté T_0, dit *trièdre de référence*, auquel on convient de comparer le sens de toute autre trièdre orienté. On dira que l'espace est orienté positivement dans le sens direct (resp. rétrograde) suivant que T_0 est direct (resp. rétrograde). Tout autre trièdre orienté T de l'espace est dit *positif* ou *négatif* suivant qu'il est, ou non, de même sens que T_0.

Si on choisit le repère cartésien $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le trièdre orienté T dont les arêtes sont les supports de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ donnés dans l'ordre précédent pourra être direct ou inverse. Sauf indication expresse du contraire, c'est lui qu'on choisira comme trièdre orienté de référence.

Chaque fois que la construction d'un certain vecteur (ou que la détermination d'un certain nombre) dépend de l'orientation du repère, on dit que ce vecteur (ou ce nombre) sont *axiaux*, pour rappeler qu'ils dépendent de la disposition des axes du trièdre de référence.

Nous allons en voir un exemple dans l'étude qui va suivre.

141. ***Volume algébrique du parallélipipède associé à un triplet rangé de vecteurs.*** — 1° **Définition.** — Soit $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ un triplet rangé de vecteurs libres dont nous considérerons trois représentants $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}$ de même origine O. Construisons les points N, N', N'', S tels que

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}, \qquad \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{OM}, \qquad \overrightarrow{ON''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

et

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} \quad \text{(fig. 33).}$$

Les points O, S, M, M', M'', N, N', N'' sont les sommets d'un parallélipipède

(éventuellement plat); soit $\mathcal{V}$ son volume, mesuré avec une unité préalablement choisie.

Supposons que l'espace soit orienté par un trièdre T_0. *On appelle volume algébrique du parallélipipède un nombre réel dont la valeur absolue est* $\mathcal{V}$ *et dont le signe est* + *ou* − *suivant que le trièdre orienté* (OM, OM′, OM″) est

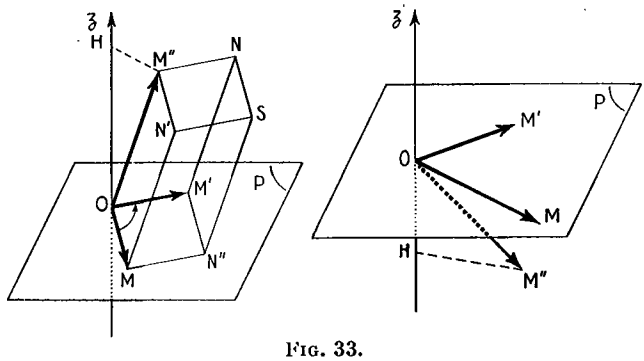


FIG. 33.

positif ou négatif (c'est-à-dire est de même sens que T_0 ou de sens contraire); il est nul si $\mathcal{V} = 0$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{OM''}$ sont coplanaires.

Le nombre ainsi défini est indépendant des représentants choisis pour $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}$; on peut donc le considérer comme attaché au triplet rangé $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ On le représente par la notation $[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}]$.

2° **Évaluation de** $[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}]$. — Si les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ne déterminent pas un plan et un seul, $[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}] = 0$. Supposons maintenant que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ déterminent un plan unique P, et soit $\vec{Oz}$ un axe perpendiculaire à P, tel que le trièdre orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}, \vec{Oz})$ soit positif. Soit H la projection de M″ sur Oz. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OMM′; le volume $\mathcal{V}$ du parallélipipède construit sur OM, OM′, OM″ est, dans tous les cas, $\mathcal{A} \times$ OH. Donc :

$$\text{val. abs. } [\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}] = \mathcal{A}.\text{OH}.$$

Mais le nombre $[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}]$ est positif ou négatif suivant que $\overrightarrow{OM''}$ est, ou non, dans le demi-espace déterminé par P et qui contient la partie positive de $\vec{Oz}$, c'est-à-dire suivant que $\overline{OH}$ est positif ou négatif; il est donc du signe de $\overline{OH}$; comme $\mathcal{A} > 0$, on peut écrire :

$$[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}] = \mathcal{A}.\overline{OH}$$

ou encore :

$$[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}] = \mathcal{A}.\overline{\text{proj}_{oz}}\vec{V''} \qquad (1)$$

et cette formule reste encore vraie si $\mathcal{A} = 0$, car $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont colinéaires, et

$$[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}] = 0.$$

3° **Propriétés du volume algébrique** $[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'']$. — Soit E_3 l'ensemble des vecteurs libres de l'espace orienté. En définissant le volume algébrique du parallélipipède associé à un triplet rangé de vecteurs de E_3, on a réalisé une application de l'ensemble $E_3 \times E_3 \times E_3$ dans l'ensemble des nombres réels. Étudions quelques propriétés de cette application f.

a) Étant donnés trois vecteurs $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$, on peut les ranger dans 6 permutations différentes; à chacune de ces permutations est associé un volume algébrique.

Ces 6 volumes algébriques ont même valeur absolue, le volume du parallélépipède OMM′M″.

D'autre part les trièdres orientés

$$OMM'M'', \qquad OM'M''M, \qquad OM''MM'$$

qui se déduisent de l'un d'eux par une substitution circulaire sont de même sens; et ce sens est contraire de celui des trièdres orientés

$$OMM'M'', \qquad OM''M'M, \qquad OM'MM''$$

qui se déduisent aussi de l'un d'eux par une substitution circulaire, mais qui se déduisent de l'un des premiers par une transposition de deux arêtes.

Par suite : I) on ne change pas le volume algébrique associé à un triplet rangé de vecteurs en effectuant sur les trois vecteurs une substitution circulaire;

II) Le volume algébrique se change en son opposé si l'on transpose deux des vecteurs.

$$p = [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''] = [\vec{V}', \vec{V}'', \vec{V}] = [\vec{V}'', \vec{V}, \vec{V}']$$

mais
$$[\vec{V}, \vec{V}'', \vec{V}'] = [\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}] = [\vec{V}', \vec{V}, \vec{V}''] = -p.$$

b) La formule (1) du 2° permet d'écrire

$$[\vec{V}, \vec{V}', \lambda \vec{V}''] = \mathfrak{A} \cdot \overline{\text{proj}}_{oz} \lambda \vec{V}'' = \lambda \mathfrak{A} \overline{\text{proj}}_{oz} \vec{V}''$$

ou
$$[\vec{V}, \vec{V}', \lambda \vec{V}''] = \lambda [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''].$$

On en déduit, en utilisant (*a*)

$$[\vec{V}, \lambda \vec{V}', \vec{V}''] = \lambda [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'']$$
$$[\lambda \vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''] = \lambda [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''].$$

c) Enfin, toujours d'après la formule (1)

$$[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}_1'' + \vec{V}_2''] = \mathfrak{A} \overline{\text{proj}}_{oz} (\vec{V}_1'' + \vec{V}_2'') \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{A} \overline{\text{proj}}_{oz} \vec{V}_1'' + \mathfrak{A} \overline{\text{proj}}_{oz} \vec{V}_2''$$

ou enfin
$$[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}_1'' + \vec{V}_2''] = [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}_1''] + [\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}_2'']$$

On en déduit, en utilisant (*a*)

$$[\vec{V}, \vec{V}_1' + \vec{V}_2', \vec{V}''] = [\vec{V}, \vec{V}_1', \vec{V}''] + [\vec{V}, \vec{V}_2', \vec{V}'']$$
$$[\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''] = [\vec{V}_1, \vec{V}', \vec{V}''] + [\vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''].$$

4° Comme au n° 138, 4° nous traduirons les propriétés établies au 3° en disant que l'application f est une *application trilinéaire alternée de* $E_3 \times E_3 \times E_3$ dans R.

5° Enfin supposons

$$\vec{V} = \sum \lambda_i \vec{V}_i, \qquad \vec{V}' = \sum \mu_j \vec{V}'_j, \qquad \vec{V}'' = \sum \nu_k \vec{V}''_k,$$
$$i = 1, 2, \ldots n \qquad j = 1, 2, \ldots p \qquad k = 1, 2, \ldots q$$
$$\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \sum \lambda_i \mu_j \nu_k \left[\vec{V}_i, \vec{V}'_j, \vec{V}''_k\right],$$

la sommation Σ étant étendue à tous les ensembles ordonnés d'indices i, j, k pris respectivement parmi les n, p, q premiers entiers naturels.

142. ***Déterminants du troisième ordre.*** — 1° **Déterminant d'un triplet rangé de vecteurs dans une base.** — Rapportons l'espace vectoriel E_3, provisoirement orienté, à une base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. On appelle déterminant du triplet rangé de vecteurs $\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right)$ dans la base $\mathfrak{B}$ le nombre

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \frac{\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]}{\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right]}$$

$\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$ et $\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right]$ désignant les volumes algébriques des parallélipipèdes associés aux triplets rangés $\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$ et $\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right]$. Le nombre ainsi déterminé est indépendant de l'orientation de l'espace. Si on désigne par ρ l'inverse du nombre $\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right]$, on a :

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \rho\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right],$$

ce qui montre que l'application

$$\underset{\in E_3 \times E_3 \times E_3}{\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right)} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in R}{\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]}$$

est, comme l'application f envisagée plus haut, une application trilinéaire et alternée.

$$\text{dét}\left[\vec{V}', \vec{V}, \vec{V}''\right] = -\,\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$$
$$\text{dét}\left[\lambda\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \lambda\,\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$$
$$\text{dét}\left[\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \text{dét}\left[\vec{V}_1, \vec{V}', \vec{V}''\right] + \text{dét}\left[\vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''\right].$$

De la définition, il résulte en particulier que dét $\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$ est certainement nul si deux des vecteurs $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$ sont colinéaires.

2° **Déterminant de trois combinaisons linéaires de trois vecteurs.** — Soient $\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''$ trois combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$.

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{A} & \vec{A'} & \vec{A''} \\ \hline \vec{V} & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \vec{V'} & \beta & \beta' & \beta'' \\ \vec{V''} & \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{array} \qquad \begin{aligned} \vec{A} &= \alpha\vec{V} + \beta\vec{V'} + \gamma\vec{V''} \\ \vec{A'} &= \alpha'\vec{V} + \beta'\vec{V'} + \gamma'\vec{V''} \\ \vec{A''} &= \alpha''\vec{V} + \beta''\vec{V'} + \gamma''\vec{V''} \end{aligned}$$

$p = \text{dét}\left[\vec{A}, \vec{A'}, \vec{A''}\right]$ peut s'écrire

$$p = \text{dét}\left[\alpha\vec{V} + \beta\vec{V'} + \gamma\vec{V''},\ \alpha'\vec{V} + \beta'\vec{V'} + \gamma'\vec{V''},\ \alpha''\vec{V} + \beta''\vec{V'} + \gamma''\vec{V''}\right]$$

ou encore, en utilisant les propriétés de linéarité

$$\begin{aligned} p = &\ \text{dét}\left[\alpha\vec{V}, \beta'\vec{V'}, \gamma''\vec{V''}\right] + \text{dét}\left[\alpha\vec{V}, \gamma'\vec{V''}, \beta''\vec{V'}\right] \\ &+ \text{dét}\left[\beta\vec{V'}, \gamma'\vec{V''}, \alpha''\vec{V}\right] + \text{dét}\left[\beta\vec{V'}, \alpha'\vec{V}, \gamma''\vec{V''}\right] \\ &+ \text{dét}\left[\gamma\vec{V''}, \alpha'\vec{V}, \beta''\vec{V'}\right] + \text{dét}\left[\gamma\vec{V''}, \beta'\vec{V'}, \alpha''\vec{V}\right]. \end{aligned}$$

Nous n'avons écrit aucun des déterminants dans l'expression desquels figuraient des vecteurs colinéaires, ces déterminants étant nuls.

On écrit encore, en groupant les deux termes de chaque ligne,

$$\begin{aligned} p = &\ \text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right].\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \\ &+ \text{dét}\left[\vec{V'}, \vec{V''}, \vec{V}\right].\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') \\ &+ \text{dét}\left[\vec{V''}, \vec{V}, \vec{V'}\right].\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \end{aligned}$$

et finalement, en observant que c'est le même déterminant qui figure dans l'expression précédente, à une substitution circulaire près sur les vecteurs considérés,

$$\text{dét}\left[\vec{A}, \vec{A'}, \vec{A''}\right] = \text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right].\ \Delta \qquad (1)$$

en posant

$$\Delta = \alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''). \qquad (2)$$

La formule (1) est indépendante de la base dans laquelle sont exprimés les vecteurs $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}, \vec{A}, \vec{A'}, \vec{A''}$.

Supposons alors que $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}$ soient rapportés à la base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$:

$$\begin{array}{c|c} & \vec{V}\ \ \vec{V'}\ \ \vec{V''} \\ \hline \vec{i} & \\ \vec{j} & \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} = \mathfrak{Ab} \\ \vec{k} & \end{array}$$

La formule qui vient d'être établie donne

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right] = \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right].\mathrm{D}$$

en posant

$$\mathrm{D} = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'') \qquad (3)$$

Mais, par définition, $\text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] = 1$. Par suite

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = D. \tag{4}$$

3° **Déterminant d'une matrice 3 × 3.** — DÉFINITION. — On appelle *déterminant de la matrice* $\mathcal{M}$ soit le nombre D défini par l'égalité (3), soit le symbole

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \tag{5}$$

par lequel nous conviendrons de représenter ce nombre, et qui ne diffère de celui par lequel est représentée la matrice $\mathcal{M}$ que par le remplacement des crochets par des barres simples. En définitive nous écrirons :

$$\text{dét } \mathcal{M} = \text{dét}\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\text{dét } \mathcal{M} = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'').$$

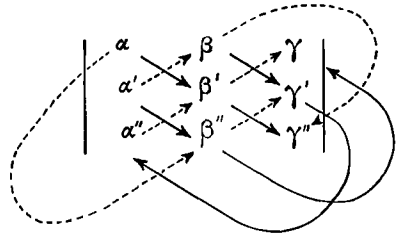
Les mots : *élément, ligne, colonne, rangée,* ont le même sens pour le déterminant [symbole (5)] que pour la matrice. Le déterminant sera dit du *troisième* ordre parce qu'il a trois lignes et trois colonnes.

Remplacer le symbole (5) par le nombre

$$D = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

c'est *développer* le déterminant. Les termes $(ab'c'', \ldots, -ab''c', \ldots)$ de la somme algébrique D sont appelés les *termes* du développement du déterminant (ou, simplement, les *termes* du déterminant) : chacun est précédé d'un *signe extérieur* (+, pour $ab'c''$, ...; — pour $ab''c'$, ...).

Le schéma suivant indique comment associer les éléments du déterminant écrit sous la forme (5) pour en obtenir les termes dont le signe extérieur est + (traits continus) ou — (traits pointillés).



Observons que *les trois termes précédés du signe + renferment, soit les éléments de la diagonale principale, soit deux éléments situés sur une parallèle à cette diagonale tandis que les trois termes précédés du signe — renferment soit les*

éléments de la diagonale non principale, soit deux éléments situés sur une parallèle à cette diagonale.

Cette méthode de développement est connue sous le nom de règle de Sarrus.

Les formules (1) et (3) du 2° peuvent s'écrire maintenant

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A'}, \vec{A''}\right] = \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right].\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad (1')$$

et

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}. \qquad (3')$$

Dans la formule (1') les lettres grecques désignent les coefficients des combinaisons linéaires $\vec{A}$, $\vec{A'}$, $\vec{A''}$ de $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{V''}$. Dans la formule (3'), le déterminant du second membre est celui de la matrice des coordonnées de $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{V''}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

La règle de Sarrus montre que le déterminant de la matrice $\mathcal{M}$ et celui de sa transposée $\widetilde{\mathcal{M}}$ ont même valeur.

Autrement dit : *on ne change pas la valeur d'un déterminant en échangeant chaque ligne avec la colonne de même rang.* Il en résulte que *toute propriété, valable pour tout déterminant du troisième ordre, et concernant les éléments d'une colonne, reste valable encore si on remplace le mot colonne par le mot ligne*; on pourra énoncer cette propriété en utilisant le mot *rangée.*

4° **Interprétation géométrique du déterminant d'une matrice.** — *a*) Nous avons donné, du déterminant, deux définitions : l'une *géométrique*, l'autre algébrique ou *formelle.* La formule (3) établie au 2° (*in fine*) permet de raccorder ces deux définitions; elle exprime en effet que *le déterminant d'un triplet rangé de vecteurs dans une base est le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans cette base :*

$$\begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{V} & \vec{V'} & \vec{V''} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{array}\right] \end{array} = \mathcal{M} \Longrightarrow \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right] = \text{dét}\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

b) *Corollaire.* — Pour que les vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{V''}$ soient coplanaires, il faut et il suffit que le volume algébrique $\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right]$ soit nul, en d'autres termes il faut et il suffit que dét $\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right]$ soit nul, d'où la condition

$$\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''} \text{ coplanaires} \iff \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Pour que trois vecteurs soient coplanaires, il faut et il suffit que soit nul le déterminant de la matrice des coordonnées de ces trois vecteurs dans une base quelconque.**

Une conséquence immédiate est la suivante : l'espace ponctuel étant rapporté à un repère cartésien $Oxyz$, *pour que trois directions* δ, δ', δ'', *de paramètres directeurs* (p, q, r), (p', q', r'), (p'', q'', r'') *respectivement, soient parallèles à un même plan, il faut et il suffit que :*

$$\begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix} = 0.$$

c) En rapprochant le résultat obtenu en (*b*) du résultat obtenu au n° 66, 5°, on peut écrire l'équivalence logique

$$D = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe des réels } \lambda, \lambda', \lambda'' \text{ non simultanément} \\ \text{nuls tels que } \lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V'} + \lambda''\vec{V''} = \vec{0} \end{array} \right.$$

ou encore, en formant les coordonnées de $\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V'} + \lambda''\vec{V''}$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \lambda, \lambda', \lambda'' \text{ non simultanément nuls tels que} \\ \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' = 0 \\ \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' = 0 \\ \lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'' = 0. \end{array} \right.$$

Compte tenu du fait que toute propriété générale des lignes d'un déterminant reste valable pour les colonnes, on peut énoncer :

THÉORÈME. — **Pour qu'un déterminant du troisième ordre soit nul, il faut et il suffit qu'il existe trois coefficients non simultanément nuls tels que soient nulles les combinaisons linéaires des éléments correspondants des rangées parallèles, formées avec ces coefficients.**

d) Nous allons préciser l'énoncé du théorème précédent dans le cas où les éléments de deux rangées parallèles du déterminant D ne sont pas proportionnelles (par exemple, les deux premières colonnes). Cela signifie que les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires. Si $D = 0$, $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{V''}$ sont coplanaires; $\vec{V''}$ appartient à l'espace E_2, dont $\{\vec{V}, \vec{V'}\}$ est une base; on a donc

$$\vec{V''} = \rho\vec{V} + \rho'\vec{V'}$$
$$a'' = \rho a + \rho' a', \qquad b'' = \rho b + \rho' b', \qquad c'' = \rho c + \rho' c'$$

et on peut énoncer le théorème suivant, qui sera fréquemment utilisé dans la suite :

THÉORÈME. — **Si un déterminant du troisième ordre est nul, et si les éléments correspondants de deux rangées parallèles ne sont pas proportionnels, les éléments de la troisième rangée sont des combinaisons linéaires** (avec les mêmes coefficients) **des éléments correspondants des deux premières rangées.**

5° **Propriétés formelles des déterminants des matrices** 3×3. — Chaque propriété du déterminant de trois vecteurs, énoncée au 1°, entraîne une propriété *formelle* du déterminant d'une matrice 3×3.

a) Le déterminant de trois vecteurs se change en son opposé lorsqu'on transpose deux de ces vecteurs; il en résulte que *le déterminant d'une matrice est transformé en son opposé lorsqu'on transpose deux rangées* (lignes ou colonnes) *parallèles.* Comme conséquence : *le déterminant d'une matrice qui a deux rangées identiques est nul.*

b) La propriété $\det[\lambda\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''] = \lambda \det[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'']$ entraîne

$$\begin{vmatrix} \lambda a & a' & a'' \\ \lambda b & b' & b'' \\ \lambda c & c' & c'' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Si on multiplie par un même facteur tous les éléments d'une rangée de la matrice $\mathfrak{M}$, *son déterminant est multiplié par ce facteur.*

c) *Si deux rangées parallèles de la matrice* $\mathfrak{M}$ *sont composées d'éléments proportionnels, son déterminant* D *est nul.*

En effet si $a' = \rho a$, $b' = \rho b$; $c' = \rho c$, c'est que $\vec{V}' = \rho\vec{V}$; le volume algébrique d'un triplet rangé dont deux vecteurs sont colinéaires est nul, donc D est nul.

d) La propriété

$$\det[\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''] = \det[\vec{V}_1, \vec{V}', \vec{V}''] + \det[\vec{V}_2, \vec{V}', \vec{V}''] \text{ entraîne}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a' & a'' \\ b_1 + b_2 & b' & b'' \\ c_1 + c_2 & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a' & a'' \\ b_1 & b' & b'' \\ c_1 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a' & a'' \\ b_2 & b' & b'' \\ c_2 & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Si les éléments d'une rangée de la matrice $\mathfrak{M}$ *sont des sommes de deux termes, son déterminant* D *est la somme des deux déterminants des matrices obtenues en remplaçant successivement cette rangée par celles qui sont formées par les premiers termes, et par les seconds termes, de ces sommes.*

Plus généralement

$$\begin{vmatrix} \sum\lambda_i a_i & a' & a'' \\ \sum\lambda_i b_i & b' & b'' \\ \sum\lambda_i c_i & c' & c'' \end{vmatrix} = \sum\lambda_i \begin{vmatrix} a_i & a' & a'' \\ b_i & b' & b'' \\ c_i & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

e) Démontrons que

$$\det[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''] = \det[\vec{V} + \mu\vec{V}' + \nu\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}''].$$

En effet le second membre est la somme des déterminants

$$\det[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''] + \det[\mu\vec{V}', \vec{V}', \vec{V}''] + \det[\nu\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}'']$$

et les deux derniers sont nuls comme associés à des vecteurs dont deux sont colinéaires.

Il en résulte qu'*on ne change pas le déterminant $\mathfrak{A}$ d'une matrice en ajoutant aux éléments d'une rangée de $\mathfrak{A}$ les éléments correspondants des rangées parallèles multipliés par des facteurs réels arbitraires.*

$$\begin{vmatrix} a + \mu a' + \nu a'' & a' & a'' \\ b + \mu b' + \nu b'' & b' & b'' \\ c + \mu c' + \nu c'' & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

En supposant que, dans D, $a = b = c = 0$, on obtient la proposition suivante : *un déterminant est nul si les éléments d'une même rangée sont formés d'une même combinaison linéaire des éléments correspondants des rangées qui lui sont parallèles.*

6° **Produit de deux déterminants du troisième ordre.** — Dans l'espace vectoriel E_3 rapporté à la base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, soit $\left(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right)$ un triplet rangé de vecteurs

$$\begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{V} & \vec{V}' & \vec{V}'' \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \end{array} \Longrightarrow \det_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Soit maintenant $\left(\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''\right)$ un second triplet rangé de vecteurs combinaisons linéaires de $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$:

$$\begin{array}{c} \\ \vec{V} \\ \vec{V}' \\ \vec{V}'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{A} & \vec{A}' & \vec{A}'' \end{array} \\ \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \end{array} \Longrightarrow \det_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''\right] = \det_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right] \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Or, on peut calculer $\det_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''\right]$ en calculant les composantes de $\vec{A}$, de $\vec{A}'$ et de $\vec{A}''$ dans la base $\mathfrak{B}$.

$$\begin{aligned} \vec{A} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V}' + \gamma\vec{V}'' = {} & (\alpha a + \beta a' + \gamma a'')\vec{i} \\ & + (\alpha b + \beta b' + \gamma b'')\vec{j} \\ & + (\alpha c + \beta c' + \gamma c'')\vec{k} \end{aligned}$$

$\vec{A}'$ et $\vec{A}''$ s'écrivent de la même manière en accentuant les lettres α, β, γ. On obtient alors

$$\det_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''\right] = \begin{vmatrix} a\alpha + a'\beta + a''\gamma & a\alpha' + a'\beta' + a''\gamma' & a\alpha'' + a'\beta'' + a''\gamma'' \\ b\alpha + b'\beta + b''\gamma & b\alpha' + b'\beta' + b''\gamma' & b\alpha'' + b'\beta'' + b''\gamma'' \\ c\alpha + c'\beta + c''\gamma & c\alpha' + c'\beta' + c''\gamma' & c\alpha'' + c'\beta'' + c''\gamma'' \end{vmatrix}$$

mais le premier membre est aussi

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}, \vec{A'}, \vec{A''}\right] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Le produit de deux déterminants du troisième ordre peut donc être mis sous la forme d'un déterminant du troisième ordre dont la règle de formation est identique à celle qui a été énoncée à propos des déterminants du second ordre; les éléments de ce déterminant sont les sommes des produits des éléments correspondants des lignes du premier déterminant et des colonnes du second; notons qu'on pourrait associer indifféremment les lignes ou colonnes de l'un avec les lignes ou colonnes de l'autre.

143. *Développement d'un déterminant du troisième ordre par rapport aux éléments d'une rangée.* — 1° DÉFINITION. — **On donne le nom de forme linéaire de certaines variables à tout polynôme homogène et du premier degré par rapport à ces variables.**

Par exemple $3x + 4y - 5z$ est une forme linéaire des variables x, y, z; il en est de même pour toute expression de la forme $Ax + By + Cz$ où les coefficients A, B, C sont *indépendants* de x, y, z.

2° Reprenons la matrice $\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$

considérée au n° **142, 2°** et son déterminant D; si $\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}$ sont les vecteurs ayant pour coordonnées les éléments des colonnes de $\mathfrak{M}$ dans une base $\mathfrak{B}$,

$$D = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''}\right]. \qquad (1)$$

3° **Le déterminant D est une forme linéaire des éléments de chaque colonne.** — Pour la première colonne, cela résulte de la formule (3) du n° **142, 2°.**

En posant :

$$A = b'c'' - c'b'' \qquad B = c'a'' - a'c'' \qquad C = a'b'' - b'a''$$
$$D = Aa + Bb + Cc. \qquad (2)$$

Mais D est aussi dét $\left[\vec{V'}, \vec{V''}, \vec{V}\right]$, d'où en posant

$$A' = b''c - c''b \qquad B' = c''a - a''c \qquad C' = a''b - b''a$$
$$D = A'a' + B'b' + C'c'. \qquad (3)$$

De même D est aussi dét $\left[\vec{V''}, \vec{V}, \vec{V'}\right]$, d'où en posant

$$A'' = bc' - cb', \qquad B'' = ca' - ac', \qquad C'' = ab' - ba'$$
$$D = A''a'' + B''b'' + C''c''. \qquad (4)$$

On passe d'une des formules (2), (3), (4), à la suivante par substitution circulaire sur les accents.

Les nombres A, B, ..., C″ sont appelés *cofacteurs des éléments a, b, ..., c″* dans le développement de D.

4° Le déterminant D est une forme linéaire des éléments de chaque ligne. — Cela résulte de ce que

$$D = \text{dét } \tilde{\mathfrak{M}} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

et en appliquant l'étude précédente on peut écrire

$$D = Aa + A'a' + A''a'' \qquad (5)$$

ou $$D = Bb + B'b' + B''b'' \qquad (6)$$

ou $$D = Cc + C'c' + C''c'', \qquad (7)$$

les coefficients A, ... C″ étant ceux qui ont été définis précédemment.

5° **Obtention des cofacteurs.** — Le lecteur vérifiera que le cofacteur d'un élément de D est le déterminant du second ordre obtenu en supprimant, dans D, la ligne et la colonne contenant l'élément considéré, précédé du signe + ou du signe — selon que la somme des rangs de la ligne et de la colonne en question est un nombre pair ou impair, comme l'indique le tableau suivant

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Par exemple

$$A' = b''c - bc'' = -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cdots\cdots a' \cdots\cdots \\ b \vdots b'' \\ c \vdots c'' \end{vmatrix}.$$

De cette règle résulte le fait important suivant : *le cofacteur d'un élément est indépendant des éléments de la ligne et de la colonne qui contiennent cet élément.* Par suite, si on change les éléments d'une rangée (et d'une seule), les cofacteurs de ces éléments ne sont pas changés.

6° Puisque les cofacteurs des éléments d'une rangée sont indépendants de ces éléments, une expression telle que

$$a''A' + b''B' + c''C'$$

est le développement d'un déterminant déduit de D en remplaçant les éléments de la seconde colonne par ceux de la troisième; un tel déterminant ayant deux colonnes parallèles est nul :

$$a''A' + b''B' + c''C' = 0.$$

On vérifiera qu'il est possible d'énoncer le résultat suivant : *la somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs des éléments correspondants d'une rangée parallèle est nulle.*

144. ***Extension de la définition d'un déterminant.*** — En définissant aux nos **139** et **142** les déterminants des matrices carrées (2×2) et (3×3), nous avons supposé que leurs éléments étaient réels. Nous reprendrons la question, au chapitre XIV, en la généralisant au cas où les éléments des matrices carrées appartiennent à un corps K quelconque, et où ces matrices sont d'un ordre quelconque $(n \times n)$. Les propriétés resteront les mêmes.

Si une matrice $\mathfrak{M}$ n'a qu'un seul élément a, soit $\mathfrak{M} = [a]$, on dit que a est le déterminant de $\mathfrak{M}$ et on écrit

$$a = \text{dét } \mathfrak{M}.$$

III. SYSTÈMES DE DEUX OU TROIS ÉQUATIONS LINÉAIRES A DEUX OU TROIS INCONNUES

Nous nous proposons de montrer comment l'utilisation des vecteurs libres — dans le plan et dans l'espace — permet la résolution et la discussion de systèmes simples d'équations linéaires à coefficients réels et à inconnues réelles. Nous aurons, ultérieurement, à reprendre cette théorie de façon générale et abstraite, lorsque les coefficients et les inconnues appartiennent à un corps quelconque.

D'une façon générale, parmi les nombres réels donnés, nous distinguerons les coefficients des inconnues et les termes indépendants des inconnues : ceux-ci sont appelés « termes tout connus »; nous les supposerons écrits aux seconds membres.

145. ***Système de deux équations linéaires à deux inconnues.*** — Appelons S le système des deux équations linéaires donné par les formules

$$\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b''. \end{cases} \tag{1}$$

Considérons dans un espace vectoriel E_2 rapporté à la base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ les vecteurs

	$\vec{V}$	$\vec{V}'$	$\vec{V}''$
$\vec{i}$	a	a'	a''
$\vec{j}$	b	b'	b''

Supposons $\vec{V} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{V}' = \vec{0}$.

Résoudre le système S, c'est chercher s'il existe des nombres réels x et y tels que

$$x\vec{V} + y\vec{V}' = \vec{V}''. \tag{2}$$

1° Supposons $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ non colinéaires, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$; x et y sont les coordonnées de $\vec{V}''$ par rapport à la base $\left\{\vec{V}, \vec{V}'\right\}$.

Si $a'' = 0$, $b'' = 0$, nécessairement $x = 0$, $y = 0$.

2° Supposons $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$; $\vec{V}$ et V' sont colinéaires; par exemple $\vec{V'} = k\vec{V}$;

(2) s'écrit $$(x + ky)\ \vec{V} = \vec{V''}.$$

Si $\vec{V''}$ n'est pas colinéaire à $\vec{V}$, (2) est impossible.

Si $\vec{V''}$ est colinéaire à $\vec{V}$, il existe un nombre réel ρ tel que $\vec{V''} = \rho\vec{V}$, et (2) équivaut à

$$x + ky = \rho.$$

On peut donner à y une valeur arbitraire, x s'en déduit.

Nous appellerons *déterminant du système* S le déterminant de la matrice carrée $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ formée avec les coefficients des variables et appelée *matrice du système*. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Si le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ n'est pas nul, le système (1) admet une solution et une seule.**

On dit alors que le système S est un système de Cramer.

Retenons, qualitativement, que trois cas peuvent se présenter dans la résolution du système S : *unicité* de la solution (système de Cramer), *impossibilité* et *indétermination*.

2° **Résolution du système** S. — Nous nous placerons dans l'hypothèse du système de Cramer. S a une solution et une seule (x_0, y_0) telle que

$$\vec{V''} = x_0\vec{V} + y_0\vec{V'}.$$

On en déduit, les déterminants étant pris dans la base $\mathfrak{B}$,

$$\text{dét}\left[\vec{V''}, \vec{V'}\right] = \text{dét}\left[x_0\vec{V} + y_0\vec{V'}, \vec{V'}\right] = x_0 \text{ dét}\left[\vec{V}, \vec{V'}\right]$$
$$\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V''}\right] = \text{dét}\left[\vec{V}, x_0\vec{V} + y_0\vec{V'}\right] = y_0 \text{ dét}\left[\vec{V}, \vec{V'}\right],$$

et enfin les formules dites de Cramer

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a'' & a' \\ b'' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}} \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}$$

3° **Cas du système homogène.** — Le système S est dit *homogène* si $a'' = b'' = 0$; *il n'est jamais impossible* puisqu'il admet toujours la solution (0, 0), dite solution *banale*, ou *triviale*. Il n'admet pas d'autre solution si, et seulement si, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Application. — Soit $F = 0$ et $F' = 0$ deux équations quelconques; considérons les systèmes

$$\Sigma \begin{cases} F = 0 \\ F' = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Sigma' \begin{cases} \alpha F + \alpha' F' = 0 \\ \beta F + \beta' F' = 0. \end{cases}$$

Toute solution de Σ est solution de Σ'; inversement, une solution de Σ' (faisant prendre à F et F' les valeurs F_0 et F'_0) ne sera sûrement solution de Σ que si les égalités

$$\begin{cases} \alpha F_0 + \alpha' F'_0 = 0 \\ \beta F_0 + \beta' F'_0 = 0 \end{cases} \quad \text{entraînent} \quad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F'_0 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire si le système Σ', considéré comme système linéaire aux inconnues F et F', admet la seule solution (0, 0); c'est-à-dire enfin si

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous écrirons :

$$\begin{cases} F = 0 \\ F' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha F + \alpha' F' = 0 \\ \beta F + \beta' F' = 0 \end{cases} \quad \text{si, et seulement si} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} \neq 0.$$

146. *Système de trois équations linéaires à trois inconnues.* — Appelons S le système des trois équations linéaires donné par les formules

$$\begin{cases} ax + a'y + a''z = a''' \\ bx + b'y + b''z = b''' \\ cx + c'y + c''z = c'''. \end{cases} \qquad (1)$$

1° Considérons dans l'espace vectoriel E_3 rapporté à la base $\mathfrak{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, les vecteurs

	$\vec{V}$	$\vec{V}'$	$\vec{V}''$	$\vec{V}'''$
$\vec{i}$	a	a'	a''	a'''
$\vec{j}$	b	b'	b''	b'''
$\vec{k}$	c	c'	c''	c'''

Supposons $\vec{V} \neq \vec{0}$ $\vec{V}' \neq \vec{0}$ $\vec{V}'' \neq \vec{0}$.

Résoudre le système S, c'est chercher s'il existe des nombres réels x, y, z tels que

$$x\vec{V} + y\vec{V}' + z\vec{V}'' = \vec{V}'''. \qquad (2)$$

I. — *Supposons d'abord* $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$ *non coplanaires*; on peut les prendre comme base de l'espace vectoriel E_3; x, y, z sont alors les coordonnées de $\vec{V}'''$ par rapport à la base $\left\{\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right\}$.

Nous appellerons déterminant du système S le nombre D donné par

$$D = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \det_{\mathfrak{B}} \left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]$$

L'hypothèse faite équivaut à supposer $D \neq 0$, d'après le n° 142, 4°, et nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Si le déterminant D du système S n'est pas nul, ce système admet une solution unique.**

II. — *Nous allons discuter le système* S *lorsque* $D = 0$.

a) Supposons que parmi les trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$ il en existe deux qui ne soient pas colinéaires, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ par exemple. $\vec{V}''$ est alors coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V}'$; il existe deux nombres réels α et β tel que $\vec{V}'' = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V}'$.

Toute combinaison linéaire

$$x\vec{V} + y\vec{V}' + z\left(\alpha\vec{V} + \beta\vec{V}'\right)$$

donne un vecteur coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. Par suite :

α) si $\vec{V}'''$ n'est pas coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, c'est-à-dire si

$$\det\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'''\right] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a''' \\ b & b' & b''' \\ c & c' & c''' \end{vmatrix} \neq 0$$

le système S est impossible;

β) si $\vec{V}'''$ est coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{V}''' = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V}'$, et l'équation (2) devient

$$x\vec{V} + y\vec{V}' = (\lambda - z\alpha)\vec{V} + (\mu - z\beta)\vec{V}'; \qquad (2')$$

en vertu de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, l'équation (2') équivaut au système

$$\begin{cases} x = \lambda - z\alpha \\ y = \mu - z\beta \end{cases} \qquad (3)$$

le système S admet une infinité de solutions données par les formules (3) où z est arbitraire.

b) Supposons que les trois vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$, $\vec{V}''$ soient colinéaires; il existe par exemple deux nombres réels α et β tels que

$$\vec{V}' = \alpha\vec{V} \qquad \vec{V}'' = \beta\vec{V}.$$

Toute combinaison linéaire

$$x\vec{V} + y\alpha\vec{V} + z\beta\vec{V}$$

donne un vecteur colinéaire à $\vec{V}$.

Par suite : α) si $\vec{V}'''$ n'est pas colinéaire à $\vec{V}$, le système S est impossible;

β) si $\vec{V}'''$ est colinéaire à $\vec{V}$, il existe un nombre réel λ tel que $\vec{V}''' = \lambda\vec{V}$, et l'équation (2) devient

$$x\vec{V} = (\lambda - y\alpha - z\beta)\vec{V}$$

ou encore

$$x = \lambda - y\alpha - z\beta. \qquad (4)$$

Le système S admet une infinité de solutions données par la formule (4) où y et z sont arbitraires.

Cette étude qualitative met en évidence les trois éventualités déjà rencontrées : *unicité, impossibilité, indétermination.*

2° **Résolution du système** S. — Nous nous plaçons dans l'hypothèse du système de Cramer. S admet une solution et une seule (x_0, y_0, z_0) telle que

$$\vec{V}''' = x_0\vec{V} + y_0\vec{V}' + z_0\vec{V}''.$$

On en déduit, les déterminants étant pris dans la base $\mathfrak{B}$,

$$\begin{aligned}\text{dét}\left[\vec{V}''', \vec{V}', \vec{V}''\right] &= \text{dét}\left[x_0\vec{V} + y_0\vec{V}' + z_0\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}''\right] \\ &= x_0\ \text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right].\end{aligned}$$

Finalement

$$x_0 = \frac{\text{dét}\left[\vec{V}''', \vec{V}', \vec{V}''\right]}{\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]}, \quad y_0 = \frac{\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}''', \vec{V}''\right]}{\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]}, \quad z_0 = \frac{\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'''\right]}{\text{dét}\left[\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''\right]}.$$

L'énoncé suivant donne une description des formules précédentes en langage ordinaire :

La solution d'un système de Cramer s'obtient en attribuant à chaque inconnue la valeur d'un rapport dont le dénominateur est le déterminant du système; le numérateur est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans celle du système, la colonne des coefficients de l'inconnue considérée par la colonne des termes tout connus supposés écrits dans les seconds membres.

En utilisant les cofacteurs des éléments de D, on peut écrire

$$x_0 = \frac{Aa''' + Bb''' + Cc'''}{D}, \quad y_0 = \frac{A'a''' + B'b''' + C'c'''}{D}, \quad z_0 = \frac{A''a''' + B''b''' + C''c'''}{D}.$$

3° **Étude d'un système homogène.** — Le système S est dit homogène si $a''' = b''' = c''' = 0$. *Un tel système n'est jamais impossible* puisqu'il admet toujours la solution triviale (0, 0, 0). Deux hypothèses seulement sont donc à envisager, selon que le déterminant du système, D, est, ou non, différent de zéro.

α) si $D \neq 0$, le système S est de Cramer et sa solution unique est (0, 0, 0).

b) si D = 0, et si $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{V''}$ est coplanaire avec eux; avec les notations du 1°, II, *a*, on est ramené à

$$x = -\alpha z, \qquad y = -\beta z$$

z reste arbitraire, S est indéterminé.

c) si D = 0, et si $\vec{V}$, $\vec{V'}$, $\vec{V''}$ sont colinéaires, avec les notations du 1°, II, *b* on est ramené à

$$x = -\alpha y - \beta z;$$

y et z restent arbitraires, S est indéterminé.

En résumé, nous énoncerons :

Pour qu'un système de trois équations linéaires et homogènes à trois inconnues admette des solutions non triviales, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul.

Application. — On démontrera, comme au n° 145 (3°) que, en désignant par F = 0, F′ = 0, F″ = 0 trois équations *quelconques*, pour que les systèmes

$$\begin{cases} F = 0 \\ F' = 0 \\ F'' = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \alpha F + \alpha' F' + \alpha'' F'' = 0 \\ \beta F + \beta' F' + \beta'' F'' = 0 \\ \gamma F + \gamma' F' + \gamma'' F'' = 0 \end{cases}$$

soient équivalents, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

147. ***Systèmes divers.*** **— 1° Système de trois équations linéaires à deux inconnues.** — Appelons S le système d'équations donné par les formules

$$\begin{cases} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c''. \end{cases} \qquad (1)$$

Considérons dans l'espace vectoriel E_3 rapporté à la base $\mathcal{B}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ les vecteurs

	$\vec{V}$	$\vec{V'}$	$\vec{V''}$
$\vec{i}$	a	a'	a''
$\vec{j}$	b	b'	b''
$\vec{k}$	c	c'	c''

Supposons $\vec{V} \neq \vec{0}, \qquad \vec{V'} \neq \vec{0}.$

Résoudre le système S, c'est chercher s'il existe des nombres réels x, y, tels que

$$x\vec{V} + y\vec{V'} = \vec{V''}. \qquad (2)$$

Si $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires, la combinaison linéaire $x\vec{V} + y\vec{V'}$ est coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V'}$. Dans ce cas :

α) si $\vec{V''}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V'}$, le système S est impossible;

β) si $\vec{V''}$ est coplanaire avec $\vec{V}$ et $\vec{V'}$, il existe des nombres réels λ et μ tels que

$$\vec{V''} = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V'},$$

et $x = \lambda$, $y = \mu$: le système S admet une solution unique.

En résumé, **lorsque les coefficients des inconnues x et y ne sont pas proportionnels, une condition nécessaire et suffisante pour que le système S admette une solution (et une seule) s'écrit**

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

On dit parfois que le déterminant précédent, associé à la matrice ayant pour colonnes non seulement les coefficients des inconnues, mais les termes tout connus, est le *déterminant complet* du système S.

2° — **Système de deux équations linéaires et homogènes à trois inconnues.** — Appelons S le système d'équations donné par les formules :

$$(3)\quad \begin{cases} ax + a'y + a''z = 0 \\ bx + b'y + b''z = 0. \end{cases}$$

Considérons dans un espace vectoriel E_2 rapporté à la base $\mathcal{B}\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ les vecteurs

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{V} & \vec{V'} & \vec{V''} \\ \hline \vec{i} & a & a' & a'' \\ \vec{j} & b & b' & b'' \end{array}$$

Résoudre S, c'est chercher s'il existe des nombres réels x, y, z tels que le vecteur

$$\vec{W} = x\vec{V} + y\vec{V'} + z\vec{V''}$$

soit nul.

Supposons que $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne soient pas colinéaires, avec les notations du n° 138

$$\vec{W} = \vec{0} \iff \begin{cases} \left[\vec{V}, \vec{W}\right] = 0 \\ \left[\vec{V'}, \vec{W}\right] = 0. \end{cases}$$

Par suite

$$(S) \iff \begin{cases} y\left[\vec{V}, \vec{V'}\right] + z\left[\vec{V}, \vec{V''}\right] = 0 \\ x\left[\vec{V'}, \vec{V}\right] + z\left[\vec{V'}, \vec{V''}\right] = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\frac{x}{\left[\vec{V'}, \vec{V''}\right]} = \frac{y}{\left[\vec{V''}, \vec{V}\right]} = \frac{z}{\left[\vec{V}, \vec{V'}\right]}$$

ou enfin, dans la base $\mathfrak{B}$

$$\frac{x}{a'b'' - a''b'} = \frac{y}{a''b - ab''} = \frac{z}{ab' - a'b}.$$

Dans le cas général où les coefficients des équations (3) ne sont pas proportionnels, *toute solution du système* S ***est formée de nombres proportionnels*** *aux cofacteurs des éléments arbitraires c, c', c'' dans le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

EXERCICES

1. — **Factoriser les déterminants suivants :**

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2abc & c(a^2 + b^2) & b(c^2 + a^2) \\ c(a^2 + b^2) & 2abc & a(b^2 + c^2) \\ b(c^2 + a^2) & a(b^2 + c^2) & 2abc \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} (b-c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c-a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$$

2. — **Factoriser les déterminants suivants :**

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin 2a \\ 1 & \cos b & \sin 2b \\ 1 & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos(b-c) & \cos(c-a) & \cos(a-b) \\ \cos(b+c) & \cos(c+a) & \cos(a+b) \\ \sin(b+c) & \sin(c+a) & \sin(a+b) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

3. — **En utilisant les déterminants, simplifier la fraction rationnelle en** x, y, z

$$\frac{\sum x(y-z)(1+y^2)(1+z^2)}{\sum (y-z)(1+y^2)(1+z^2)}$$

4. — *a*) **Factoriser le déterminant** $\begin{vmatrix} \sin y \sin z & \sin z \sin x & \sin x \sin y \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}$

b) A quelle condition le système suivant, aux inconnues x, y, z, a-t-il des solutions?

$$\sin x = a \sin(y-z); \qquad \sin y = b \sin(z-x); \qquad \sin z = c \sin(x-y).$$

Cette condition étant réalisée, résoudre le système.

5. — **Étudier les systèmes suivants :**

$$\begin{cases} (b+c)x + (bc-1)y + (1+b^2)(1+c^2)z = a \\ (c+a)x + (ca-1)y + (1+c^2)(1+a^2)z = b \\ (a+b)x + (ab-1)y + (1+a^2)(1+b^2)z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \end{cases} \qquad \frac{ax+by+h}{c} = \frac{bx+cy+h}{a} = \frac{cx+ay+h}{b}$$

$$\begin{cases} ax + (a-b)y + (a-c)z = a^2 + (b-c)^2 \\ (b-a)x + by + (b-c)z = b^2 + (c-a)^2 \\ (c-a)x + (c-b)y + cz = c^2 + (a-b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b \\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c \end{cases}$$

6. — Étudier le système :

$$(S) \qquad bz - cy = l, \qquad cx - az = m, \qquad ay - bx = n,$$

a, b, c n'étant pas simultanément nuls.

On suppose que S est possible. Démontrer que toute solution de (S) est alors solution de l'équation $lx + my + nz = 0$, et que si (x_0, y_0, z_0) est une solution (non triviale) de S, toutes les autres solutions sont de la forme $(x_0 + \rho a, y_0 + \rho b, z_0 + \rho c)$, ρ étant arbitraire. Déterminer la solution de S qui vérifie l'équation $ax + by + cz = 0$; écrire toutes les solutions de S.

Interpréter géométriquement.

7. — Pour que le système

$$x = by + cz \qquad y = cz + ax \qquad z = ax + by$$

ait des solutions autres que (0, 0, 0), il faut et il suffit que

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2.$$

8. — Résoudre le système

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 2\alpha^2 + \dfrac{x^2}{2} \\ z^2 + x^2 = 2\beta^2 + \dfrac{y^2}{2} \\ x^2 + y^2 = 2\gamma^2 + \dfrac{z^2}{2} \end{cases}$$

où α, β, γ sont des nombres positifs donnés. Montrer que, pour que le système ait une solution (x, y, z) telle que x, y, z soient les longueurs des côtés d'un triangle, il faut et il suffit qu'il existe un triangle dont les côtés aient pour longueurs α, β, γ (ce problème est celui qu'on doit résoudre pour calculer les côtés d'un triangle qui a pour médianes α, β, γ).

CHAPITRE X

ESPACES VECTORIELS

I. DÉFINITION. SOUS-ESPACES VECTORIELS (Étude indépendante de la dimension).

148. ***Définition d'un espace vectoriel.*** — 1° **Introduction.** — Les vecteurs libres de l'espace ont les deux propriétés fondamentales suivantes (cf. chapitre IV) :

1° on sait les ajouter et les retrancher; de façon précise l'addition géométrique est une loi de groupe additif;

2° on sait multiplier un vecteur libre par un nombre réel quelconque; de façon précise on sait définir sur l'ensemble des vecteurs libres une opération externe dont le domaine des opérateurs est le corps des nombres réels.

La définition suivante généralise les faits précédents à des ensembles quelconques, composés d'éléments que l'on peut appeler vecteurs, et continuer de noter par $\vec{X}$, dans les théories générales qui vont être développées.

Dans la suite, les vecteurs pourront être représentés par un symbole quelconque, non nécessairement surligné d'une flèche.

Nous appellerons « scalaires » les éléments du domaine des opérateurs; nous les noterons par des minuscules grecques dans les généralités du début.

2° **Définition d'un espace vectoriel sur un corps commutatif.** — **On dit qu'un ensemble E est un espace vectoriel, défini sur un corps commutatif K, si E est muni de deux lois de composition dans les conditions suivantes :**

I. Il existe sur E une loi de composition interne qui est une loi de groupe commutatif, notée additivement; par suite, quels que soient $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ dans E,

1° (A) $$(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z})$$

2° (C) $$\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$$

3° (N) il existe un élément $\vec{0}$ de E tel que

$$\vec{X} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{X} = \vec{X} \qquad \forall \vec{X} \in E$$

4° (S) tout $\vec{X}$ de E est associé $\vec{X}'$ de E tel que

$$\vec{X} + \vec{X}' = \vec{0}.$$

II. **Il existe sur E une loi de composition externe dont le domaine d'opérateurs est le corps K. A tout $\vec{X}$ de E et à tout λ de K on sait associer un élément de E, noté $\lambda\vec{X}$ ou $\vec{X}.\lambda$, et appelé produit de $\vec{X}$ et de λ, et jouissant des propriétés suivantes :**

1° (A′) $\mu(\lambda\vec{X}) = \lambda\mu\vec{X}$ (associativité pour les scalaires)

2° (D_1) $\lambda(\vec{X} + \vec{Y}) = \lambda\vec{X} + \lambda\vec{Y}$

3° (D_2) $(\lambda + \mu)\vec{X} = \lambda\vec{X} + \mu\vec{X}$

(l'opération externe est distributive et pour l'addition dans E et pour l'addition dans K).

4° (N′) Si 1 désigne l'élément unité de K

$$(1)\vec{X} = \vec{X}.$$

REMARQUES. — I. — Les 8 conditions énoncées en I et II sont appelées axiomes de la structure d'espace vectoriel.

II. — Au titre de groupe, tout espace vectoriel est non vide.

III. — Le corps commutatif K est appelé *corps de base* de E; nous supposerons, sauf avis contraire, qu'il est de caractéristique nulle; dans les applications, K sera le plus souvent l'un des corps R ou C.

3° **Combinaison linéaire de vecteurs.** — Abréviativement, nous appellerons *système* toute famille indexée, finie, de vecteurs (non nécessairement distincts) de E; en général une telle famille sera indexée par une partie de N de la forme [1, p], et nous dirons que p est l'*ordre* du système. Soit

$$\mathfrak{S} = \left\{ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_p \right\}$$

un tel système; soit par ailleurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_p$ p éléments du corps K.

D'après 2°, II, $\alpha_1\vec{A}_1, \alpha_2\vec{A}_2, \ldots, \alpha_p\vec{A}_p$

sont des vecteurs de E, et d'après 2°, I, il en est de même de

$$\vec{V} = \alpha_1\vec{A}_1 + \alpha_2\vec{A}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{A}_p \quad \text{ou} \quad \sum_1^p \alpha_i\vec{A}_i.$$

On dit que $\vec{V}$ *est une combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathfrak{S}$; les α_i en sont les *coefficients.*

Plus généralement, soit $\mathfrak{F} = \left\{ \vec{A}_i \right\}_{i \in I}$ une famille, finie ou infinie, de vecteurs de E. Nous appellerons *combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathfrak{F}$ toute combinaison linéaire des vecteurs d'une sous-famille finie de $\mathfrak{F}$.

149. ***Propriétés élémentaires d'un espace vectoriel.*** — 1° **Propriétés liées à l'existence du groupe additif.** — D'après les propriétés générales d'un groupe, *a*) l'élément neutre $\vec{0}$ est unique; *b*) l'opposé $\vec{X}'$ de $\vec{X}$ est unique et peut se représenter par $-\vec{X}$; *c*) on peut simplifier une égalité entre sommes de vecteurs en supprimant un même vecteur dans les deux membres; *d*) on peut faire passer un terme d'un membre à l'autre dans une égalité entre sommes de vecteurs, à condition de le remplacer par son opposé.

2° **Multiplication par 0.** — Rappelons que $\vec{0}$ est l'élément neutre de E pour l'addition, et désignons par 0 l'élément neutre de K pour l'addition.

a) $$(0)\,\vec{X} = \vec{0}, \qquad \forall\, \vec{X} \in E.$$

En effet, si on prend dans K $\lambda \neq 0$, $\lambda\vec{X} = (\lambda + 0)\,\vec{X} = \lambda\vec{X} + (0)\,\vec{X}$, ce qui prouve que $(0)\,\vec{X}$ est l'élément neutre $\vec{0}$.

b) $$\lambda\vec{0} = \vec{0} \qquad \forall \lambda \in K.$$

En effet, soit $\vec{X}$ un élément quelconque de E, le vecteur $\lambda\left(\vec{0} + \vec{X}\right)$ s'écrit

d'une part	$\lambda\vec{0} + \lambda\vec{X}$	d'après l'axiome D_1
d'autre part	$\lambda\vec{X}$	puisque $\vec{0} + \vec{X} = \vec{X}$;
c'est donc que	$\lambda\vec{0}$	est l'élément neutre $\vec{0}$.

c) $\lambda\vec{X} = \vec{0}$ entraîne $\begin{cases} \text{soit } \lambda = 0 \\ \text{soit } \vec{X} = \vec{0}. \end{cases}$

Si $\lambda = 0$, la propriété est établie;
si $\lambda \neq 0$, λ a un inverse λ^{-1} dans K,
et $\lambda^{-1}(\lambda\vec{X})$ est d'une part $(\lambda^{-1}\lambda)\,\vec{X} = (1)\,\vec{X} = \vec{X}$,
d'autre part $\lambda^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$, finalement $\vec{X} = \vec{0}$.

3° **Lois de simplification** — *a*) L'opposé de $\vec{X}$ peut s'écrire $(-1)\,\vec{X}$.
En effet
$$\vec{X} + (-1)\,\vec{X} = (1)\,\vec{X} + (-1)\,\vec{X} = [1 + (-1)]\,\vec{X} = [0]\,\vec{X} = \vec{0}.$$

b) $$\lambda\vec{X} - \mu\vec{X} = (\lambda - \mu)\,\vec{X}.$$

En effet
$$-\mu\vec{X} = \text{opp}(\mu\vec{X}) = (-1)\,\mu\vec{X} = [(-1)\mu]\,\vec{X} = (-\mu)\,\vec{X}$$
et
$$\lambda\vec{X} + (-\mu)\,\vec{X} = [\lambda + (-\mu)]\,\vec{X} = (\lambda - \mu)\,\vec{X}.$$

c) $\left.\begin{array}{l} \lambda\vec{X} = \mu\vec{X} \\ \vec{X} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda = \mu$ (simplification par $\vec{X} \neq \vec{0}$).

En effet l'hypothèse entraîne $\lambda\vec{X} - \mu\vec{X}$ ou $(\lambda - \mu)\vec{X} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\lambda - \mu = 0$ ou $\lambda = \mu$ d'après 2°, *c*.

d) $$\lambda\vec{X} - \lambda\vec{Y} = \lambda(\vec{X} - \vec{Y}).$$

En effet,

$$-\lambda\vec{Y} = \text{opp}(\lambda\vec{Y}) = (-1).\lambda\vec{Y} = \lambda[(-1)\vec{Y}] = \lambda\,\text{opp}\,\vec{Y}$$

et $$\lambda\vec{X} + \lambda\,\text{opp}\,\vec{Y} = \lambda(\vec{X} + \text{opp}\,\vec{Y}) = \lambda(\vec{X} - \vec{Y}).$$

e) $\left.\begin{array}{l}\lambda\vec{X} = \lambda\vec{Y} \\ \lambda \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{X} = \vec{Y}$ (simplification par $\lambda \neq 0$).

En effet l'hypothèse entraîne $\lambda\vec{X} - \lambda\vec{Y}$ ou $\lambda(\vec{X} - \vec{Y}) = \vec{0}$,

c'est-à-dire $\vec{X} - \vec{Y} = \vec{0}$ ou $\vec{X} = \vec{Y}$ d'après 2°, *c*.

150. ***Exemples d'espaces vectoriels.*** — Exemple I. — Appelons $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un *n*-uple rangé de *n* éléments du corps K; chacun des éléments x_i est appelé une *composante scalaire* — ou une *coordonnée* — du vecteur $\vec{X}$. Soit E l'ensemble de tous les vecteurs ainsi définis.

Soit $\vec{X}(x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{Y}(y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de E;

si $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, les symboles $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ représentent le même vecteur, et on note $$\vec{X} = \vec{Y}.$$

Dans E on définit :

I. Une opération interne, *l'addition :*

on convient de dire que le vecteur de coordonnées $(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n)$ est la somme des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, et on le note $\vec{X} + \vec{Y}$.

II. Une opération externe, *le produit d'un vecteur par un élément du corps* K :

λ appartenant à K, on convient de dire que le vecteur de coordonnées $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ est le produit du vecteur $\vec{X}$ par le scalaire λ; ce vecteur, qui appartient à E, est noté $\vec{X}.\lambda$ ou $\lambda\vec{X}$.

On vérifie que les 8 axiomes des espaces vectoriels sont satisfaits, en posant

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$
$$-\vec{X} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

L'ensemble E peut être considéré comme l'ensemble-produit $K \times K \times \ldots \times K$ ou K^n; on peut énoncer :

l'ensemble K^n est un espace vectoriel sur K.

En particulier K est un espace vectoriel sur K, la loi multiplicative sur K est alors considérée comme loi externe.

Exemple II. — Les fonctions réelles d'une variable réelle continues sur un intervalle $\mathcal{C} \subset R$ forment un espace vectoriel sur le corps des réels.

Si f et g désignent deux telles fonctions, la loi interne est définie comme suit :

$$h = f + g \qquad \text{si} \qquad h(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in \mathcal{C}$$

la loi externe est définie par :

$$k = \lambda f \qquad \text{si} \qquad k(x) = \lambda . f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{C}.$$

L'élément neutre est la fonction qui prend la valeur 0 en tout point x de $\mathcal{C}$.

Les fonctions complexes d'une variable réelle, définies sur un même champ, forment un espace vectoriel sur le corps des complexes.

Exemple III. — Nous verrons au tome II, n° 249 que les solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

forment un espace vectoriel sur le corps des réels.

Exemple IV. — L'ensemble $K[x]$ des polynômes à une indéterminée sur le corps K est un espace vectoriel sur K. Nous l'avons démontré au n° 93.

Complément sur les algèbres. — DÉFINITION. — On dit qu'un ensemble E d'éléments notés $\vec{X}$ est muni d'une structure d'algèbre sur le corps commutatif K si on a défini sur E :

I. une loi interne $(\vec{X}, \vec{Y}) \multimap \vec{X} + \vec{Y}$ qui est une loi de groupe commutatif;

II. une deuxième loi interne : $(\vec{X}, \vec{Y}) \multimap \vec{X} \bullet \vec{Y}$ qui, associée à la première loi interne, munit E d'une structure d'anneau;

III. une loi externe vis-à-vis du domaine d'opérateurs K : $(\alpha, \vec{X}) \multimap \alpha\vec{X}$ qui, associée à la première loi interne, munit E d'une structure d'espace vectoriel,

et si, en outre, pour tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ d'éléments de E et pour tout élément λ de K :

$$(\lambda\vec{X}) \bullet \vec{Y} = \lambda(\vec{X} \bullet \vec{Y}) \qquad \text{et} \qquad \vec{X} \bullet (\lambda\vec{Y}) = \lambda(\vec{X} \bullet \vec{Y})$$

L'algèbre est dite commutative (resp. unitaire) si la deuxième loi interne est commutative (resp. possède un élément neutre).

EXEMPLES. — I. L'ensemble $K[x]$ des polynômes à une indéterminée sur le corps K, dont on vient de voir qu'il forme un espace vectoriel sur K, possède une seconde loi interne, la multiplication des polynômes (définie au n° 91), qui, jointe à la première loi, confère à $K[x]$ une structure d'anneau commutatif et unitaire.

Pour tout couple A, B d'éléments de $K[x]$, et quel que soit $\lambda \in K$,

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Par suite $K[x]$ est une algèbre sur K, commutative et unitaire.

II. L'ensemble des applications de R dans R a été muni au n° 40 du tome II d'une structure d'algèbre sur R, commutative et unitaire.

151. ***Sous-espaces vectoriels.*** — 1° DÉFINITION. — **Étant donné un espace vectoriel E sur le corps commutatif K, on appelle sous-espace vectoriel de E toute partie E′ de E qui est fermée pour les deux lois de structure et telle que les lois induites sur E′ par les lois de structure confèrent à E′ une structure d'espace vectoriel.**

La définition précédente implique que E′ n'est pas vide.

THÉORÈME. — **Étant donné un espace vectoriel E sur un corps commutatif K, si une partie non vide E′ de E est fermée pour les deux lois de structure,** c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \forall (\vec{X}, \vec{X'}) \in E' \times E' & \vec{X} + \vec{X'} \in E' \qquad (1) \\ \forall (\lambda, \vec{X}) \in K \times E' & \lambda X \in E' \qquad (2) \end{cases}$$

alors E′ est un sous-espace vectoriel de E.

En effet considérons deux éléments quelconques, $\vec{X}$ et $\vec{X'}$, de E′.

En utilisant (2), avec $\lambda = -1$, on obtient : $-\vec{X'} \in E'$.

En utilisant (1), on en déduit : $\vec{X} - \vec{X'} \in E'$.

Il en résulte, (**29**, 3°), que E′ est un sous-groupe additif de E.

D'autre part la loi induite sur E′ par la loi externe sur E jouit de toutes les propriétés de cette loi et les quatre axiomes II du n° **148**, 2° sont satisfaits.

2° Le théorème précédent est un critère permettant de reconnaître si une partie E′ d'un espace vectoriel E en est un sous-espace vectoriel sans qu'il soit nécessaire de prouver que les 8 axiomes de la structure d'espace vectoriel sont vérifiés. Il pourra être commode de le remplacer par le suivant :

THÉORÈME. — **Si E′ est une partie non vide de l'espace vectoriel E telle que**

$$\forall (\lambda, \vec{X}, \vec{X'}) \in K \times E' \times E', \qquad \lambda \vec{X} + \vec{X'} \in E' \qquad (3)$$

alors E′ est un sous-espace vectoriel de E.

En faisant $\lambda = 1$ dans (3), on obtient la relation (1) du 1°.

En utilisant le fait que E′, non vide, possède au moins un élément $\vec{V}$ et en faisant $\lambda = -1$ et $\vec{X} = \vec{X'} = \vec{V}$ dans (3), on obtient : $\vec{0} \in E'$.

En faisant $\vec{X'} = \vec{0}$ dans (3), on obtient alors la relation (2) du 1°.

3° **Exemples.** — *a*) $\vec{0}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. Tout autre sous-espace vectoriel est dit véritable ou propre.

b) Soit Ω le sous-ensemble de l'espace vectoriel K^n sur K formé des vecteurs de K^n dont les p dernières coordonnées sont nulles ($p < n$). La somme de deux éléments quelconques de Ω, le produit d'un élément quelconque de Ω par un scalaire quelconque de K sont encore des éléments de Ω; Ω est donc un sous-espace vectoriel de K^n.

c) Dans l'espace vectoriel des applications continues d'un intervalle réel dans R, les applications dérivables constituent un sous-espace vectoriel.

d) Dans l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur le corps K, l'ensemble $\mathfrak{L}_n$ formé par le polynôme nul O et les polynômes de degré au plus égal au nombre naturel donné n constitue un sous-espace vectoriel; il en est de même pour l'ensemble $\mathfrak{Q}_n$ formé par O et les polynômes dont la valuation est au moins égale à $n + 1$.

4° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\mathfrak{F} = \{ \vec{V}_i \}_{i \in I}$ une famille finie ou infinie de vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble E′ des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathfrak{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. On dit que E′ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{F}$ et que $\mathfrak{F}$ est une famille génératrice de E′.**

Admettant les $\vec{V}_i$ pour éléments, E′ est une partie non vide de E. Soit λ un scalaire quelconque du corps de base K, et soit $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux vecteurs quelconques de E′. $\vec{X}$ (resp. $\vec{Y}$) est combinaison linéaire des vecteurs de la sous-famille de $\mathfrak{F}$ obtenue en faisant décrire à l'indice i une partie finie J (resp. J′) donnée de I; $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont donc combinaisons linéaires des vecteurs de la sous-famille finie de $\mathfrak{F}$ obtenue lorsque i décrit J ∪ J′; soit $\mathfrak{G} = \{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \}$ cette sous-famille, alors

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{A}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{A}_p \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} = \beta_1 \vec{A}_1 + \ldots + \beta_p \vec{A}_p.$$

On en déduit :

$$\lambda \vec{X} + \vec{Y} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \vec{A}_k \qquad \text{avec} \qquad \gamma_k = \lambda \alpha_k + \beta_k,$$

$\lambda \vec{X} + \vec{Y}$ est aussi un élément de E′; la proposition en résulte (cf. 2°).

REMARQUE. — Soit $\mathfrak{L}$ une partie non vide de E. Nous pouvons lui associer la famille $\mathfrak{F}$ obtenue en posant $I = \mathfrak{L}$ et en convenant que i et $\vec{V}_i$ désignent l'un et l'autre l'élément générique de $\mathfrak{L}$. Par abus de langage on dira qu'est engendré par $\mathfrak{L}$ le sous-espace vectoriel E′ de E qui est engendré par $\mathfrak{F}$ et que $\mathfrak{L}$ est une partie génératrice de E′.

On a visiblement $\mathfrak{L} \subset E'$ (au sens large).

152. — *Dépendance et indépendance linéaires.* — 1° DÉFINITION I. — **Le système $\{ \vec{X}_1, \vec{X}_2 \ldots, \vec{X}_r \}$ de vecteurs de E est dit lié s'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, non tous nuls, du corps K, tels que**

$$\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \ldots + \alpha_r \vec{X}_r = \vec{0}. \qquad (1)$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$ sont *linéairement dépendants*. Le système $\{ \vec{X}_i \}$ ($i = 1, \ldots, r$) est lié si le vecteur nul de E peut être obtenu comme combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, des vecteurs de ce système.

DÉFINITION II. — **Le système $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r\}$ de vecteurs de E est dit libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients scalaires sont nuls :**

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{X}_r = \vec{0} \implies \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0. \qquad (2)$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$ sont *linéairement indépendants.*

2° **Propriétés diverses.** — I. *Un seul vecteur* $\vec{X}$ *non nul de* E *détermine un système libre,* car $\lambda\vec{X} = \vec{0}$ implique $\lambda = 0$.

II. *Tout système contenant le vecteur* $\vec{0}$ *est lié*; soit en effet la combinaison $\lambda_1\vec{X}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{X}_r$ où $\vec{X}_1 = \vec{0}$; en choisissant $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$ la combinaison précédente, à coefficients non tous nuls, donne le vecteur $\vec{0}$.

III. — Si les vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$, sont dépendants, il en est de même de $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r, \overrightarrow{X_{r+1}}, \ldots, \overrightarrow{X_{r+h}}$.

En effet il existe des scalaires α_i $(i = 1, \ldots r)$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{X}_r = \vec{0}.$$

En prenant $\alpha_{r+1} = 0, \ldots, \alpha_{r+h} = 0$, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+h}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{X}_r + \alpha_{r+1}\overrightarrow{X_{r+1}} + \ldots + \alpha_{r+h}\overrightarrow{X_{r+h}} = \vec{0}.$$

En résumé, ou énoncera : **Si on ajoute des vecteurs à un système lié, on obtient encore un système lié.**

IV. Un raisonnement par l'absurde permet alors d'énoncer :
Tout sous-système d'un système libre est lui-même libre.

Nous sommes maintenant en mesure de poser :

DÉFINITION III. — **Une famille, finie ou infinie, de vecteurs de E est dite libre si chacune de ses sous-familles finies est libre. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.**

Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est liée dès qu'il existe une sous-famille finie de $\mathcal{F}$ qui est liée.

Par abus de langage, nous dirons qu'une partie $\mathfrak{L}$ de E est libre (resp. liée) quand la famille associée à $\mathfrak{L}$ — au sens du n° 151, 4° — est libre (resp. liée).

V. — *Si un système extrait de* E *est lié, l'un au moins des vecteurs de ce système est combinaison linéaire des autres.*

Soit le système $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$; par hypothèse, il existe des scalaires non tous nuls tels que

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{X}_r = \vec{0}.$$

Si $\alpha_1 \neq 0$, par exemple, $\alpha_1\vec{X}_1 = -\alpha_2\vec{X}_2 - \ldots - \alpha_r\vec{X}_r$

et comme α_1 a un inverse dans K,

$$\vec{X}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{X}_2 - \ldots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\vec{X}_r.$$

On dit aussi dans ce cas que $\vec{X}_1$ dépend linéairement de $\vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$.

COROLLAIRE. — **Si le système $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$ est libre et si le système $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r, \vec{V}$ est lié, le vecteur $\vec{V}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$.**

Par hypothèse, il existe des scalaires non tous nuls tel que

$$\alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{X}_r + \alpha_{r+1}\vec{V} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Il est impossible que α_{r+1} soit nul, sinon les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r$ seraient dépendants, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Puisque $\alpha_{r+1} \neq 0$, on peut, à partir de (1), exprimer $\vec{V}$ sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$

$$\vec{V} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{r+1}}\vec{X}_1 - \ldots - \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1}}\vec{X}_r.$$

VI. THÉORÈME. — **Si $p + 1$ vecteurs pris dans l'espace vectoriel E sont des combinaisons linéaires de p vecteurs de E, ils forment un système lié.**

Démontrons cette propriété par récurrence sur p.

a) Soit $\qquad \vec{V}_1 = \alpha\vec{X}, \qquad \vec{V}_2 = \beta\vec{X}.$

Si α ou β est nul, l'un des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ est nul, et le système correspondant est lié.

Si α et β ne sont pas nuls, $\beta\vec{V}_1 - \alpha\vec{V}_2 = \vec{0}$, et le système est lié.

b) Supposons que pour $m = 2, \ldots, p - 1$, $m + 1$ vecteurs, combinaisons linéaires de m vecteurs, forment un système lié, et considérons $p + 1$ vecteurs $\vec{V}_i$ combinaisons linéaires de p vecteurs $\vec{X}_j (j = 1, 2, \ldots, p)$:

$$\vec{V}_i = \lambda_{i1}\vec{X}_1 + \lambda_{i2}\vec{X}_2 + \ldots + \lambda_{ip}\vec{X}_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p + 1).$$

Si $\lambda_{1p} = 0, \ldots, \lambda_{p+1,\,p} = 0$, les vecteurs $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p$, combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{p-1}$ sont linéairement dépendants, et *a fortiori* il en est de même pour $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p, \vec{V}_{p+1}$.

Supposons qu'un des coefficients λ_{ip} ne soit pas nul, par exemple $\lambda_{p+1,\,p} \neq 0$.

La combinaison linéaire

$$\vec{V}'_i = \vec{V}_i - \frac{\lambda_{ip}}{\lambda_{p+1,\,p}}\vec{V}_{p+1} \quad \text{ne renferme plus } \vec{X}_p.$$

Les vecteurs $\vec{V}'_1, \ldots, \vec{V}'_p$ sont donc des combinaisons linéaires de $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{p-1}$, et par suite forment un système lié : il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, non tous nuls, tels que

$$\alpha_1 \vec{V}'_1 + \alpha_2 \vec{V}'_2 + \ldots + \alpha_p \vec{V}'_p = \vec{0}$$

ou encore tels que

$$\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{V}_p - \frac{1}{\lambda_{p+1,\,p}}(\alpha_1 \lambda_{1p} + \alpha_2 \lambda_{2p} + \ldots + \alpha_p \lambda_{pp}) \vec{V}_{p+1} = \vec{0}.$$

Les scalaires α_i n'étant pas tous nuls, les vecteurs $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_p, \vec{V}_{p+1}$ forment un système lié.

COROLLAIRE. — *A fortiori*, si $p + q$ vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de p vecteurs de E, ils forment un système lié.

CAS PARTICULIER. — VECTEURS COLINÉAIRES.

DÉFINITION. — **Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de l'espace vectoriel E sont dits colinéaires s'ils ne sont pas linéairement indépendants.**

Autrement dit, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires s'il existe deux scalaires α et α', dont l'un, au moins, n'est pas nul, tels que

$$\alpha \vec{V} + \alpha' \vec{V}' = \vec{0}$$

Cela se produit si, et seulement si

a) l'un des vecteurs, au moins, est nul (cf. 2°, II),

b) les deux vecteurs étant non nuls, il existe un (et d'ailleurs un seul) scalaire non nul, ρ, du corps de base K, tel que $\vec{V}' = \rho \vec{V}$.

153. ***Rang d'un système de vecteurs.*** — 1° Soit $\mathfrak{S}$ un système de p vecteurs $\vec{X}_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ extrait de l'espace vectoriel E sur le corps K. Considérons tous les systèmes libres qu'on peut extraire de $\mathfrak{S}$: il en existe dès qu'existe dans $\mathfrak{S}$ un vecteur autre que le vecteur $\vec{0}$. Leurs ordres sont des entiers naturels au plus égaux à p; l'un de ces nombres, r, est plus grand que tous les autres. Cela revient à dire que

a) on peut extraire de $\mathfrak{S}$ au moins un système libre d'ordre r;

b) tout système extrait de $\mathfrak{S}$, d'ordre supérieur à r, s'il en existe, est lié.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $\mathfrak{S}$ un système de p vecteurs non tous nuls d'un espace vectoriel E; il existe un entier naturel $r \leqslant p$ tel que :**

***a*) on peut extraire de $\mathfrak{S}$ au moins un système libre d'ordre r;**

***b*) tout système d'ordre supérieur à r, extrait de $\mathfrak{S}$, s'il en existe, est lié.**

Ce nombre r est appelé le rang du système $\mathfrak{S}$.

Le rang du système $\mathcal{S}$ se désigne par la notation $\rho(\mathcal{S})$ (ou $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$)

Si $\mathcal{S}$ est un système libre, $\rho(\mathcal{S}) = p$.

Inversement, supposons $\rho(\mathcal{S}) = p$; comme le seul système d'ordre p extrait de $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}$ lui-même, le système $\mathcal{S}$ est libre.

En résumé :

$$\left\{ \rho(\mathcal{S}) = p \right\} \iff \left\{ \text{le système } \mathcal{S} \text{ est libre.} \right\}$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Un système de vecteurs extrait d'un espace vectoriel est libre si, et seulement si, son rang est égal à son ordre.**

2° **Système de vecteurs principaux extrait d'un système donné.** — $\mathcal{S}$ étant un système de vecteurs de rang r, les r vecteurs qui composent un système libre d'ordre r extrait de $\mathcal{S}$ forment ce qu'on appelle un *système principal* extrait de $\mathcal{S}$, ou encore un *système de vecteurs principaux*.

L'épithète de « principal » attribuée à un vecteur de $\mathcal{S}$ ne concerne pas une notion intrinsèque relative à ce vecteur; c'est son appartenance à un système principal qui lui permet d'être appelé « principal ».

Il peut y avoir plusieurs systèmes principaux extraits de $\mathcal{S}$, mais le nombre r de vecteurs qu'ils renferment est déterminé, c'est le rang du système $\mathcal{S}$.

3° **Les vecteurs non principaux sont des combinaisons linéaires des vecteurs principaux.**

Un système principal étant choisi, les vecteurs de $\mathcal{S}$ qui n'en font pas partie peuvent être appelés vecteurs non principaux.

Soit $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r$ un système principal extrait du système $\mathcal{S}$;

soit $\vec{X}_s$ $(s = r+1, r+2, \ldots, p)$ un vecteur non principal.

Le système $\{ \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r \}$ étant libre et le système $\{ \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r, \vec{X}_s \}$ étant lié, nous savons (n° 152, 2°, V) que

$$\vec{X}_s = \lambda_{s1}\vec{X}_1 + \ldots + \lambda_{sr}\vec{X}_r.$$

154. ***Intersection et somme de sous-espaces vectoriels de*** E. — Soit E un espace vectoriel sur le corps K, et soit E′, E″ deux sous-espaces vectoriels de E.

1° **Intersection de deux sous-espaces vectoriels.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{X} \in (E' \cap E'') \\ \vec{X}_1 \in (E' \cap E'') \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{X} + \vec{X}_1 \in (E' \cap E'') \\ \lambda\vec{X} \in (E' \cap E''), \qquad \forall \lambda \in K. \end{array}\right.$$

Il en résulte que $E' \cap E''$ est un sous-espace vectoriel de E. La propriété s'étend à l'intersection de toute famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. Énonçons :

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E **est un sous-espace vectoriel de** E.

Deux sous-espaces vectoriels de E ont en commun au moins le vecteur $\vec{0}$ de E.

EXEMPLE. — Soit I l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels F de E qui contiennent une partie donnée $\mathfrak{X}$ de E. Soit E' le sous-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{X}$; E' contient toute combinaison linéaire γ d'éléments de $\mathfrak{X}$ (n° 151, 4°).

E' est l'un des F, donc $I \subset E'$; toute γ appartient à tout F, donc à I, et $E' \subset I$; finalement $I = E'$. On est conduit à dire que E' est *le plus petit sous-espace vectoriel de* E *qui contient* $\mathfrak{X}$.

REMARQUE. — La réunion de E' et E'' n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E, ainsi que le montre l'exemple suivant. Dans $E = R^2$ nous désignons par E' (resp. E'') le sous-espace constitué par les éléments $(x, 0)$ [resp. $(0, y)$]; la somme (1,1) des éléments (1,0) et (0,1) de $E' \cup E''$ n'est pas un élément de $E' \cup E''$.

2° **Somme de deux sous-espaces vectoriels.** — DÉFINITION. — **Soit** E **un espace vectoriel sur le corps** K, E' **et** E'' **deux sous-espaces vectoriels de** E. **On appelle somme de** E' **et** E'' **le sous-ensemble** S **de** E **qui a pour élément générique**

$$\vec{X}' + \vec{X}'' \begin{cases} \vec{X}' & \text{élément générique de } E' \\ \vec{X}'' & \text{élément générique de } E''. \end{cases}$$

On écrit $S = E' + E''$.

Montrons que S est un sous-espace vectoriel de E.

Soit
$$\begin{cases} \vec{X} \in S \iff \vec{X} = \vec{X}' + \vec{X}'', \quad \vec{X}' \in E', \quad \vec{X}'' \in E'' \\ \vec{X}_1 \in S \iff \vec{X}_1 = \vec{X}'_1 + \vec{X}''_1, \quad \vec{X}'_1 \in E', \quad \vec{X}''_1 \in E''. \end{cases}$$

On en déduit

$$\vec{X} + \vec{X}_1 = (\vec{X}' + \vec{X}'_1) + (\vec{X}'' + \vec{X}''_1), \qquad \text{donc} \qquad \vec{X} + \vec{X}_1 \in S$$
$$\forall \lambda \in K, \qquad \lambda\vec{X} = (\lambda\vec{X}') + (\lambda\vec{X}''), \qquad \text{donc} \qquad \lambda\vec{X} \in S.$$

Nous énoncerons.

La somme de deux sous-espaces vectoriels de E **est un sous-espace vectoriel de** E.

REMARQUE. — E' est l'ensemble des vecteurs $\vec{X}' + \vec{0}$; E'' est l'ensemble des vecteurs $\vec{0} + \vec{X}''$; E' et E'' sont ainsi des sous-espaces vectoriels de

$$S = E' + E''.$$

EXEMPLE. — Dans $E = R^4$, ensemble des quadruplets (x, y, z, t) de nombres réels, les quadruplets tels que $x = t = 0$ (resp. $z = t = 0$) constituent un sous-espace vectoriel E' (resp. E'').

$E' \cap E''$ et $E' + E''$ sont respectivement les sous-espaces vectoriels de E formés par les quadruplets $(0, y, 0, 0)$ et $(x, y, z, 0)$.

3° **Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.** — *a*) Reprenons les notations du 2°. La décomposition

$$(1) \qquad \vec{X} = \vec{X'} + \vec{X''} \qquad \text{avec} \qquad \vec{X'} \in E', \vec{X''} \in E''$$

d'un élément $\vec{X}$ de la somme $S = E' + E''$ n'est en général pas unique; en effet, si $E' \cap E''$ n'est pas réduit au vecteur nul, on peut écrire

$$\forall \vec{Z} \in E' \cap E'', \quad \vec{Z} \neq \vec{0}, \qquad \vec{X} = (\vec{X'} + \vec{Z}) + (\vec{X''} - \vec{Z})$$

ce qui fournit une autre décomposition de $\vec{X}$, de la forme (1).

b) Si la décomposition (1) est unique, on donne la définition suivante :

DÉFINITION. — **Si la décomposition**

$$(1) \qquad \vec{X} = \vec{X'} + \vec{X''}, \qquad \textbf{avec} \qquad \vec{X'} \in E', \vec{X''} \in E''$$

de l'élément générique de la somme S des sous-espaces vectoriels E′ et E″ de l'espace vectoriel E est unique, on dit que la somme est directe, et on la note $S = E' \oplus E''$.

On dit aussi que les vecteurs $\vec{X'}$ et $\vec{X''}$ qui figurent dans (1) sont les *composantes* du vecteur $\vec{X}$ de la somme S dans les sous-espaces vectoriels E′ et E″.

c) Le raisonnement du *a*) montre que si la somme S est directe, E′ et E″ n'ont en commun que le vecteur nul.

Inversement, supposons que E′ et E″ n'aient en commun que le vecteur nul, et imaginons que le vecteur $\vec{X}$ de S admette, non seulement la décomposition (1), mais aussi la décomposition

$$(2) \qquad \vec{X} = \vec{X'_1} + \vec{X''_1} \qquad \text{avec} \qquad \vec{X'_1} \in E', \vec{X''_1} \in E''.$$

On en déduit par soustraction,

$$\vec{0} = (\vec{X'} - \vec{X'_1}) + (\vec{X''} - \vec{X''_1}),$$

c'est donc que le vecteur $\vec{X'} - \vec{X'_1}$ de E′ coïncide avec le vecteur $\vec{X''_1} - \vec{X''}$ de E″, ce qui exige que chacun de ces vecteurs soit égal à $\vec{0}$, ou que

$$\vec{X'_1} = \vec{X'}, \qquad \vec{X''_1} = \vec{X''}$$

la décomposition (1) est alors unique.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **La somme S des sous-espaces vectoriels E′ et E″ de l'espace vectoriel E est directe si, et seulement si, E′ et E″ n'ont en commun que le vecteur nul.**

4° **Sous-espaces supplémentaires.** *a*) DÉFINITION. — **Deux sous-espaces vectoriels E′ et E″ de l'espace vectoriel E sont dits supplémentaires si E est la somme directe de E′ et E″, c'est-à-dire si**

$$E' + E'' = E, \qquad E' \cap E'' = \left\{ \vec{0} \right\}$$

Pour cela, il faut et il suffit que tout vecteur $\vec{X}$ de E s'exprime d'une et une seule façon comme la somme d'un vecteur $\vec{X}'$ de E′ et d'un vecteur $\vec{X}''$ de E″. Quand il en est ainsi, on dit que $\vec{X}'$ (resp. $\vec{X}''$) est la *projection de* $\vec{X}$ *sur* E′ (resp. E″) *parallèlement à* E″ (resp. E′); on dit aussi que $\vec{X}'$ et $\vec{X}''$ sont les *composantes* de $\vec{X}$ sur E′ et sur E″.

EXEMPLE. — Dans l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur K, les deux sous-espaces $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{Q}_n$ considérés au n° 151, 3°, *d*, sont supplémentaires.

Dans tout espace vectoriel E, les sous-espaces E et $\left\{ \vec{0} \right\}$ sont supplémentaires.

5° **Quotient d'un espace vectoriel par l'un de ses sous-espaces vectoriels**

a) Étant donné E, espace vectoriel sur le corps commutatif K, cherchons s'il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec les lois de structure.

Nous savons (31) que les relations d'équivalence compatibles avec l'addition sur E, loi de groupe abélien, sont les relations binaires de la forme :

$$\text{« } \vec{X} \mathcal{R} \vec{Y} \text{ signifie } \vec{X} - \vec{Y} \in E', \quad E' \text{ sous-groupe de } E \text{ »}.$$

Si $\mathcal{R}$ est en outre compatible avec la multiplication externe, $\vec{X} \mathcal{R} \vec{0}$ entraîne $(\lambda \vec{X}) \mathcal{R} (\lambda \vec{0})$, c'est-à-dire que $\vec{X} \in E'$ entraîne $\lambda \vec{X} \in E'$, ou encore E′ est un sous-espace vectoriel de E.

Inversement, si E′ est un sous-espace vectoriel de E,

$$\vec{X} \mathcal{R} \vec{Y}, \quad \text{qui s'écrit} \quad \vec{X} - \vec{Y} \in E',$$

entraîne : $\lambda \vec{X} - \lambda \vec{Y} \in E'$, qui s'écrit $(\lambda \vec{X}) \mathcal{R} (\lambda \vec{Y})$.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Étant donné un espace vectoriel E, les relations d'équivalence compatibles avec les lois de structure sont les relations binaires de la forme**

$$\text{« } \vec{X} \mathcal{R} \vec{Y} \text{ signifie } \vec{X} - \vec{Y} \in E', \quad E' \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ »}.$$

b) Soit E′ un sous-espace de l'espace vectoriel E et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence qui lui est associée. Désignons par F l'ensemble-quotient E/$\mathcal{R}$. L'élément générique, classe $(\vec{X})$, de F admet une infinité de représentants, obtenus

en ajoutant à l'un quelconque d'entre eux, $\vec{X}$, un vecteur quelconque de E'. Sur F nous disposons d'une structure-quotient (n° 23, 8°) :

a) E étant un groupe abélien, par passage au quotient, F est aussi un groupe abélien;

b) La loi externe sur E donne, par passage au quotient, une loi externe sur F qui vérifie les quatre axiomes du n° 148, 2°, II.

On en déduit que F est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps K. On dit que F est l'espace vectoriel quotient de l'espace vectoriel E par son sous-espace vectoriel E'; on le note E/E'.

REMARQUE. — F n'est pas un sous-espace de E, mais il est isomorphe à l'un quelconque, E'', des sous-espaces supplémentaires de E'. En effet $\vec{X} \mathcal{R} \vec{Y}$ signifie que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ont la même projection sur E'' parallèlement à E'; un élément de F est ainsi formé des éléments de E qui ont pour projection sur E'' un élément donné de E''; il existe donc une bijection de F sur E''; on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

De cette remarque résulte :

THÉORÈME. — **Dans un espace vectoriel E, deux sous-espaces E_1'' et E_2'' supplémentaires d'un même sous-espace E' sont isomorphes.**

En effet nous venons de voir qu'il existe des isomorphismes φ_1 et φ_2 de E/E' sur E_1'' et sur E_2''. D'après l'étude générale du n° 23, d'ailleurs reprise au chapitre XI, la bijection φ_1^{-1} de E_1'' sur E/E' et la bijection $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ de E_1'' sur E_2'' sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

6° **Généralisation. — Somme et somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels.** — *a*) Étant donné p sous-espaces vectoriels $E_i (i = 1, \ldots, p)$ de l'espace vectoriel E, on désigne par somme des E_i et on note $E_1 + \ldots + E_p$ la partie S de E formée par les vecteurs $\vec{X}$ qui s'écrivent, au moins d'une façon,

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{X}_i \in E_i \tag{3}$$

En raisonnant comme au 2°, on démontre que S est un sous-espace vectoriel de E.

Si, pour tout vecteur de S, la décompositlon (3) est unique, on dit que la somme S est *directe* et on la note $S = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

On dit que X_i est la *composante* dans E_i du vecteur $\vec{X}$ de la somme directe S.

b) Le vecteur $\vec{0}$ admet au moins la décomposition

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} \vec{V}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{V}_i = \vec{0} \tag{4}$$

puisque $\vec{0}$ appartient à chaque E_i.

I. Si la somme est directe, la décomposition (4) du vecteur $\vec{0}$ est unique.

II. Montrons la réciproque : supposons que

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} \vec{V}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{V}_i \in E_i \quad \text{exige :} \quad (\forall i) \quad \vec{V}_i = \vec{0}.$$

Considérons alors deux décompositions (3) d'un même vecteur $\vec{X}$ de la somme S :

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}'_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{X}_i \in E_i \qquad \text{et} \qquad \vec{X}'_i \in E_i.$$

Par différence, on obtient une décomposition (3) du vecteur $\vec{0}$

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} \left(\vec{X}_i - \vec{X}'_i\right) \qquad \text{ce qui exige :} \qquad (\forall i) \quad \vec{X}_i - \vec{X}'_i = \vec{0},$$

et montre que les deux décompositions de $\vec{X}$ coïncident ; par suite la somme des E_i est directe.

REMARQUE I. — Si la somme des E_i est directe, deux quelconques de ces sous-espaces n'ont en commun que $\vec{0}$; en effet soit $\vec{X}$ un vecteur non nul commun à E_h et à E_k $(h \neq k)$.

On aurait, d'une part $\vec{X} = \Sigma \vec{X}_i$ avec $\begin{cases} \vec{X}_i = \vec{0} & \text{si} \quad i \neq h \\ \vec{X}_h = \vec{X} \end{cases}$

d'autre part $\vec{X} = \Sigma \vec{X}_j$ avec $\begin{cases} \vec{X}_j = \vec{0} & \text{si} \quad j \neq k \\ \vec{X}_k = \vec{X} \end{cases}$

il n'y aurait pas unicité de la décomposition.

REMARQUE II. — Si l'on considère p sous-espaces vectoriels E_i de E tels que, pour $i \neq j$,

$$E_i \cap E_j = \left\{\vec{0}\right\}$$

et si $S = E_1 + \ldots + E_p$, la somme S n'est pas nécessairement directe.

C'est ainsi que dans R^3 la somme des sous-espaces respectivement engendrés par les vecteurs

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \qquad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \qquad \vec{e}_3 = (1, 1, 0)$$

n'est pas directe, puisque le vecteur $\vec{e}_3$ admet les deux décompositions distinctes

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Il n'en reste pas moins que deux quelconques des trois sous-espaces n'ont en commun que le vecteur nul.

c) DÉFINITION. — **On dit que p sous-espaces vectoriels E_i d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si E est la somme directe des E_i.**

II. BASES. DIMENSION

Rappelons (n° 148, 3°) que la locution « système de vecteurs » s'entend au sens de « famille finie d'éléments d'un espace vectoriel ».

155. *Famille génératrice d'un espace vectoriel.* — **1° Définition.** — L'étude faite au n° 151, 4°, nous conduit à poser :

DÉFINITION. — **Soit $\mathcal{F} = (\vec{X}_i)_{i \in I}$, une famille, finie ou infinie, de vecteurs de l'espace vectoriel E sur le corps commutatif K. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E quand à tout vecteur $\vec{X}$ de E on sait associer au moins une combinaison linéaire (148, 3°) de vecteurs de $\mathcal{F}$ égale à $\vec{X}$.**

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E quand le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ est E lui-même.

2° Cas où existe une famille génératrice finie. — Soit E un espace vectoriel qui admet un *système générateur*

$$\mathcal{S} = \{ X_1, \ldots, X_p \}.$$

Considérons n vecteurs quelconques de E, $(n > p)$. Il s'agit de combinaisons linéaires des p vecteurs de $\mathcal{S}$; ils sont donc linéairement dépendants (152, 2°, VI) et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Si un espace vectoriel E admet un système générateur de p vecteurs et si n vecteurs de E forment un système libre, alors $n \leqslant p$.**

3° Observation importante. — Il existe des espaces vectoriels n'admettant pas de famille génératrice finie.

Considérons, par exemple, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$ des polynômes à une indéterminée sur le corps K et soit $\mathcal{S} = \{ X_1, \ldots, X_p \}$ une famille finie d'éléments de $\mathfrak{L}$. Tout élément du sous-espace vectoriel $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}$ engendré par $\mathcal{S}$ a un degré au plus égal à $\sup d^\circ (X_i)$, si bien que $\mathfrak{L}' \neq \mathfrak{L}$. En revanche $\mathcal{F} = (x^i)_{i \in N}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{L}$, ainsi que cela résulte du n° 93, 2°.

156. *Bases d'un espace vectoriel.* — **1°** DÉFINITION. — **On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice.**

2° Coordonnées d'un vecteur dans une base. — THÉORÈME. — **Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E. $\mathcal{U}$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E, la décomposition de $\vec{X}$ en combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{U}$ est unique.**

$\mathfrak{U}$ étant une famille génératrice de E, tout vecteur $\vec{X}$ de E peut s'exprimer d'une façon au moins, comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathfrak{U}$.

I. *Supposons que* $\mathfrak{U}$ *est une base de* E, c'est-à-dire que $\mathfrak{U}$ est libre. Soit deux décompositions d'un même vecteur $\vec{X}$ de E :

$$\vec{X} = \sum_{i \in I_1} x_i \vec{u}_i, \qquad \vec{X} = \sum_{i \in I_2} x'_i \vec{u}_i \Bigg\} \begin{array}{l} I_1, I_2 : \text{parties finies de I} \\ x_i, x'_i : \text{scalaires de K} \end{array}$$

Elles s'écrivent, en posant $I_1 \cup I_2 = J$

$$\vec{X} = \sum_{j \in J} x_j \vec{u}_j, \qquad \vec{X} = \sum_{j \in J} x'_j \vec{u}_j.$$

Il en résulte : $$\vec{0} = \sum_{j \in J} (x_j - x'_j)\, \vec{u}_j$$

ce qui, du fait que $\mathfrak{U}$ est libre, exige :

$$\forall j \in J, \qquad x_j = x'_j.$$

La décomposition de $\vec{X}$ est unique.

II. Réciproquement, *supposons que l'expression du vecteur générique* $\vec{X}$ *de* E *en combinaison linéaire de vecteurs de* $\mathfrak{U}$ *est unique.* Cela est vrai en particulier pour le vecteur nul de E. Autrement dit, pour tout sous-ensemble fini J de I

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \vec{u}_j = \vec{0} \qquad \text{exige} \qquad (\forall j \in J) \qquad \alpha_j = 0,$$

ce qui montre que la famille génératrice $\mathfrak{U}$ est libre; $\mathfrak{U}$ est donc une base de E.

Nous sommes ainsi conduits à poser :

DÉFINITION. — **Étant donnés un espace vectoriel** E **et une base** $\mathfrak{U}$ **de** E, **les éléments** x_i **du corps de base** K **qui déterminent le vecteur** $\vec{X}$ **de** E **en tant que combinaison linéaire des vecteurs** $\vec{u}_i$ **de** $\mathfrak{U}$ **s'appellent les coordonnées de** $\vec{X}$ **dans la base** $\mathfrak{U}$.

REMARQUE. — On dit aussi que $x_i \vec{u}_i$ (resp. x_i) est la *composante vectorielle* (resp. *scalaire*) de $\vec{X}$ relative au vecteur $\vec{u}_i$ de la base.

3° **Exemples.** I. — Reprenons l'espace vectoriel K^n dont les vecteurs sont les n-uples rangés d'éléments du corps K :

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et considérons le système $\mathfrak{U}$ suivant extrait de K^n

$$\mathfrak{U} \quad \begin{cases} \vec{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vec{u}_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{cases}.$$

$\vec{u_i}$ ayant toutes ses composantes scalaires nulles, sauf la i-ième, égale à 1.

$\mathfrak{U}$ est un système générateur de K^n car on peut écrire l'élément générique de K^n sous la forme

$$\vec{X} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + \ldots + x_n\vec{u_n};$$

$\mathfrak{U}$ est un système libre car la combinaison linéaire

$$\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \ldots + \lambda_n\vec{u_n}$$

donnant l'élément $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de K^n, celui-ci ne peut être nul que si

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \ \ldots, \ \lambda_n = 0.$$

En conséquence $\mathfrak{U}$ est une base de K^n. On dit que c'est la *base canonique* de K^n.

II. — L'espace vectoriel $\mathfrak{L}_n$ introduit au n° 151, 3°, *d*) est engendré par les monômes du système

$$\mathfrak{B} = \{\, 1, x, x^2, \ldots, x^n \,\}$$

puisque tout polynôme de $\mathfrak{L}_n$ peut s'écrire

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \qquad \alpha_i \in K.$$

Or les monômes considérés sont indépendants, car l'égalité

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

entraîne

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0.$$

Par suite $\mathfrak{B}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_n$.

III. — Nous avons vu que l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$ des polynômes à une indéterminée sur le corps K admet la famille génératrice $\mathfrak{U} = (x^i)_{i \in N}$. En raisonnant comme dans l'exemple II, on constate que $\mathfrak{U}$ est une famille libre; il s'agit donc d'une base de $\mathfrak{L}$.

4° **Caractérisation d'une base finie.** — Soit $\mathfrak{U} = \{\, \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n} \,\}$ un système libre de vecteurs de E.

a) *Supposons que tout système d'au moins $n+1$ vecteurs de* E *soit lié.* Si $\vec{X}$ est un vecteur quelconque de E, le système $\{\, \vec{u_1}, \ldots \vec{u_n}, \vec{X} \,\}$ est lié, et par suite (n° 152, 2°, V) $\vec{X}$ est une combinaison linéaire des vecteurs du système $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}$ est un système générateur de E, et par suite $\mathfrak{U}$ *est une base.*

b) *Supposons que* $\mathfrak{U}$ *soit une base de* E. $\mathfrak{U}$ est un système générateur de E. D'après le n° 155, 2°, *le nombre n des vecteurs de* $\mathfrak{U}$ *est le nombre maximum de vecteurs indépendants.*

On résume *a*) et *b*) en énonçant :

THÉORÈME. **Un système libre de n vecteurs extrait de l'espace vectoriel** E **est**

une base de E si et seulement si tout système extrait de E, contenant plus de n vecteurs, est lié.

On traduit cette propriété d'une base de E en disant que les vecteurs qui la constituent déterminent une *partie libre maximale* de E, l'adjectif « maximale » portant sur le nombre, n, de vecteurs de la partie considérée.

157. *Dimension d'un espace vectoriel.* — 1° Existence et comparaison des bases.

a) THÉORÈME. — **Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice finie $\mathcal{G} = \{ \vec{X}_1, \ldots \vec{X}_p \}$ dont les vecteurs ne sont pas tous nuls, alors E admet une base extraite de $\mathcal{G}$.**

Soit r le rang de $\mathcal{G}$ (cf. n° 153, 1°) : $r \leqslant n$. En modifiant éventuellement les notations, nous pouvons supposer que $\mathcal{U} = \{ \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r \}$ est une famille libre et que chacun des vecteurs $\vec{X}_{r+1}, \ldots, \vec{X}_p$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{U}$ (153, 3°).

Par hypothèse, le vecteur générique de E est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$; il est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{U}$. En d'autres termes, la famille libre $\mathcal{U}$ est une famille génératrice de E, $\mathcal{U}$ est donc une base de E.

THÉORÈME. — **Tout espace vectoriel non réduit à son élément nul admet une base.**

La proposition résulte du théorème précédent dans le cas particulier où l'espace vectoriel admet une famille génératrice finie.

Nous admettrons la proposition dans le cas général. (La démonstration exige l'introduction d'un axiome supplémentaire de la théorie des ensembles, dit axiome du choix).

b) THÉORÈME. — **Si un espace vectoriel E a une base finie $\mathcal{U}$, formée de n vecteurs, toute autre base $\mathcal{U}'$ de E est formée de n vecteurs.**

E étant engendré par un système de n vecteurs, tout système de $n + 1$ vecteurs de E est lié (155, 2°). La famille libre $\mathcal{U}'$ est donc nécessairement finie et formée de n' vecteurs, avec : $n' \leqslant n$.

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ jouent ainsi des rôles symétriques et on a : $n \leqslant n'$.

Finalement : $n' = n$.

c) THÉORÈME. — **Les ensembles d'indices de deux bases d'un espace vectoriel sont équipotents.**

Cela signifie (n° 17, 4°, *c*) qu'il existe une bijection d'un de ces ensembles sur l'autre.

La proposition a été démontrée en *b*) dans le cas particulier où ces ensembles sont finis; elle sera admise dans le cas général.

2° **Notion de dimension.** — Soit E un espace vectoriel, non réduit à son élément nul; d'après le 1°, E admet des bases, et deux cas sont possibles :

I. — Le théorème du 1°, *b* légitime la définition suivante :

DÉFINITION. — **Si E a une base finie formée de *n* vecteurs, toute base de E est formée de *n* vecteurs; on dit que E est un espace vectoriel de dimension finie *n*.**

On écrit : $\dim E = n$.

On peut encore dire que la dimension d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est l'ordre maximum d'un système libre extrait de E.

II. — Si toutes les bases de E sont des familles infinies (1°, *c*), on dit que E est un espace vectoriel de *dimension infinie*.

REMARQUE. — Soit E un espace vectoriel réduit à son élément nul, $\vec{0}$. Toute famille de vecteurs de E ne peut être formée que de vecteurs $\vec{0}$; une telle famille est liée, et E n'admet pas de base, quoiqu'ayant un système générateur, $\{\vec{0}\}$. On convient de dire que E est de *dimension nulle*.

3° **Propriétés caractéristiques d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie.** — Soit E un espace vectoriel de dimension *n*; cette hypothèse signifie que E possède une base $\mathfrak{A}$ d'ordre *n*, et par suite, d'après le n° 156, 4°, que tout système de $n + 1$ vecteurs extrait de E est lié. Le système $\mathfrak{A}$ possède les 3 propriétés suivantes :

a) il est libre;

b) il est d'ordre *n*;

c) il engendre E.

Montrons, E étant toujours supposé de dimension *n*, que tout système $\mathfrak{B}$ extrait de E qui possède 2 de ces 3 propriétés possède la troisième et est une base de E.

I. — $\mathfrak{B}$ possède *a*) et *b*); tout système de $n + 1$ vecteurs extrait de E étant lié, $\mathfrak{B}$ est une base d'après le théorème n° 156, 4°.

II. — $\mathfrak{B}$ possède *b*) et *c*); d'après le 2°, $\rho(\mathfrak{B}) = \dim(E)$, c'est-à-dire *n*; $\mathfrak{B}$ est donc un système libre, et par suite une base.

III. — $\mathfrak{B}$ possède *a*) et *c*); $\mathfrak{B}$ est une base, et par suite est d'ordre *n*.

Nous aurons souvent à utiliser le résultat I : dans un espace vectoriel E de dimension *n*, tout système libre de *n* vecteurs en constitue une base.

4° **Exemples.** — I. Un espace vectoriel E engendré par un seul vecteur non nul $\vec{X}$, c'est-à-dire dont tout élément est de la forme $\lambda\vec{X}$, $\lambda \in K$, est de dimension 1.

Les seuls sous-espaces vectoriels de E sont alors $\{\vec{0}\}$ et l'espace vectoriel E lui-même; E n'a pas de sous-espace propre (n° 151).

Il en est ainsi de K, considéré comme espace vectoriel sur lui-même (n° 150, ex. I).

II. L'espace vectoriel K^n (n° 156) est de dimension n.

III. L'espace vectoriel $\mathfrak{L}_n$ (n° 156) est de dimension $n + 1$.

Considérons alors un système extrait de $\mathfrak{L}_n$

$$\mathfrak{B} = \{ f_0, f_1, \ldots, f_n \}$$

f_k étant un polynôme non nul de degré $k (k = 0, 1, \ldots, n)$. On dit que $\mathfrak{B}$ est un *système échelonné en degrés*. Montrons que le système $\mathfrak{B}$ est libre; à cet effet, supposons réalisée l'égalité

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0, \quad \alpha_h \in K. \tag{1}$$

Le coefficient de x^n au premier membre de (1) est le produit par α_n du coefficient de x^n dans f_n, coefficient non nul par hypothèse; donc $\alpha_n = 0$. Il en résulte alors l'égalité

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1} = 0 \tag{1'}$$

qui entraîne nécessairement $\alpha_{n-1} = 0$, etc... Finalement, (1) entraîne que les coefficients α_k sont tous nuls; c'est donc que $\mathfrak{B}$ est libre.

Le lecteur montrera de la même façon qu'un système extrait de $\mathfrak{L}_n$, de la forme $\{ g_0, g_1, \ldots g_n \}$, g_k étant un polynôme non nul de valuation k, est une base de $\mathfrak{L}_n$; un tel système est dit *échelonné en valuations.*

IV. L'espace vectoriel $\mathfrak{L}$ (156, 3°, III) est de dimension infinie.

5° **Influence du corps de base.** — Soit E un espace vectoriel sur le corps K et soit K′ un sous-corps de K (n° 40, 4°). Associée à l'addition interne, la restriction à K′ × E de la multiplication externe munit E d'une structure d'espace vectoriel sur K′; nous noterons, selon le cas, E_K ou $E_{K'}$.

a) Soit $\mathfrak{F} = \{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \}$ un système de p vecteurs de E. Si l'égalité

$$\alpha_1 \vec{A}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{A}_p = \vec{0}$$

est vérifiée par les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, non tous nuls, de K′, elle est vérifiée par ces mêmes éléments de K : *un système lié dans* $E_{K'}$ *est lié dans* E_K; il en résulte qu'*un système libre dans* E_K *est libre dans* $E_{K'}$.

Les réciproques des résultats précédents sont fausses.

b) Toute combinaison linéaire de vecteurs de E à coefficients dans K′ est aussi une combinaison linéaire à coefficients dans K; par suite *si un système fini de vecteurs de* E *est un système générateur pour* $E_{K'}$, *il l'est aussi pour* E_K.

c) Supposons alors que $E_{K'}$ soit de dimension finie n'. $E_{K'}$ admet un système générateur libre formé de n' vecteurs; ces n' vecteurs constituent un système générateur de E_K et par suite E_K est aussi de dimension finie; sa dimension n vérifie $n \leqslant n'$.

Par exemple, tout espace vectoriel sur C de dimension n peut être considéré comme un espace vectoriel sur R de dimension $2n$.

6° **Changement de base dans un espace vectoriel.** — Signalons ici, pour mémoire, ce problème qui sera étudié au n° 225.

158. ***Théorème de la base incomplète.*** — Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r \right\} \qquad r < n,$$

un système libre extrait de E, d'ordre r strictement inférieur à n.

Soit $\mathcal{U} = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \right\}$ une base de E.

Le système $\mathcal{S}$ n'engendre pas E, sinon dim E $= r$, ce qui est contre l'hypothèse; il est donc impossible que tous les vecteurs de $\mathcal{U}$ soient des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{S}$. Il existe au moins un des vecteurs de $\mathcal{U}$ qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$, soit $\vec{u}_{r+1}$.

Le système $\mathcal{S}_1 = \left\{ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r, \vec{u}_{r+1} \right\}$ est donc un système libre. En raisonnant sur $\mathcal{S}_1$ comme on a raisonné sur $\mathcal{S}$, on montre l'existence dans $\mathcal{U}$ d'au moins un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}_1$, soit $\vec{u}_{r+2}$.

Le système $\mathcal{S}_2 = \left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r, \vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2} \right\}$ est donc un système libre.

En continuant de proche en proche on trouve finalement un système libre de n vecteurs de E

$$\left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots \vec{u}_n \right\}$$

formé par les vecteurs $\mathcal{S}$ et $n - r$ vecteurs de la base $\mathcal{U}$. On a complété $\mathcal{S}$ par $n - r$ vecteurs de $\mathcal{U}$, convenablement choisis, et on a obtenu une base de E. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Si on connaît r vecteurs indépendants d'un espace vectoriel E de dimension n, $(r < n)$, on peut compléter ces vecteurs par $n - r$ autres vecteurs empruntés à une base de E de façon à obtenir une autre base de E.**

159. ***Base et dimension d'un sous-espace vectoriel.*** — 1° **Génération d'un sous-espace vectoriel E′ d'un espace vectoriel E de dimension finie.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, n, sur le corps K, et soit E′ un sous-espace vectoriel de E.

Montrons que E′ peut être engendré à partir d'un système de vecteurs extraits de E′.

Considérons tous les systèmes libres possibles extraits de E′; comme ils sont aussi extraits de E, leurs ordres sont des entiers naturels au plus égaux à n. Parmi ces entiers, il en existe un, et un seul, r, supérieur à tous les autres. On peut

donc extraire de E′ un système $\mathcal{S} = \left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r \right\}$ libre, tel que tout système extrait de E′, d'ordre supérieur à r, soit lié.

$$\forall \vec{X} \in E', \qquad \left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r, \vec{X} \right\} \text{ est lié,}$$

donc $\vec{X}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$; E′ est engendré par $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ *est une base de* E′.

Inversement toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{S}$ appartient à E′, puisque, par hypothèse, E′ a une structure d'espace vectoriel.

2° **Dimension d'un sous-espace vectoriel.** — En supposant l'espace vectoriel E de dimension n, tout sous-espace E′ peut être engendré par un système $\mathcal{S}$ libre, d'ordre r, extrait de E′($r \leqslant n$); $\rho(\mathcal{S}) = r$ et dim E′ $= \rho(\mathcal{S})$.

Le nombre r, rang de $\mathcal{S}$, est appelé *dimension* du sous-espace vectoriel E′.

Nous retiendrons que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui aussi un espace vectoriel de dimension finie.

La dimension de E′ est $r = \rho(\mathcal{S})$; si $\rho(\mathcal{S}) = n$, $\mathcal{S}$ est un système générateur libre pour E′ et pour E : E′ coïncide alors avec E.

160. ***Étude de l'intersection et de la somme de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.*** — Dans ce paragraphe, nous considérons un espace vectoriel E de dimension finie n, sur le corps K. Nous savons que tout sous-espace vectoriel de E admet une dimension finie, au plus égale à n. Soit E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\left\{ \vec{0} \right\}$. Posons :

$$\dim E' = r \leqslant n; \qquad \dim E'' = s \leqslant n.$$

1° **Comparaison des dimensions de** E′ ∩ E″ **et** E′ + E″. — Nous utiliserons des bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de E′ et E″

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \right\}; \qquad \mathcal{W} = \left\{ \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s \right\}.$$

a) Cas où $E' \cap E'' \neq \left\{ \vec{0} \right\}$. — Soit

$$\dim (E' \cap E'') = i \leqslant \inf (r, s).$$

Appelons $\mathcal{U} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_i \right\}$ une base de E′ ∩ E″; $\mathcal{U}$ est un système libre extrait de E′; on peut donc, d'après le théorème de la base incomplète, considérer une base de E′ formée par $\mathcal{U}$, et par $r - i$ autres vecteurs de $\mathcal{V}$, ce qui revient à supposer $\vec{u}_1 = \vec{v}_1, \ldots, \vec{u}_i = \vec{v}_i$. On peut de même supposer

$$\vec{u}_1 = \vec{w}_1, \ldots, \vec{u}_i = \vec{w}_i.$$

Tout élément de E′ + E″, somme d'une combinaison linéaire des vecteurs

de $\mathfrak{V}$ et d'une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathfrak{V}'$, est une combinaison linéaire des $r + s - i$ vecteurs du système

$$\mathfrak{S} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_{i+1}, \ldots, \vec{w}_s \right\}.$$

$\mathfrak{S}$ est donc un système générateur de $E' + E''$.

Montrons que $\mathfrak{S}$ est un système libre extrait de E, autrement dit que l'égalité

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_i\vec{u}_i + \beta_1\vec{v}_{i+1} + \ldots + \beta_{r-i}\vec{v}_r + \gamma_1\vec{w}_{i+1} + \ldots + \gamma_{s-i}\vec{w}_s = \vec{0} \quad (1)$$

exige la nullité de tous les coefficients.

L'égalité (1) s'écrit

$$-\gamma_1\vec{w}_{i+1} - \ldots - \gamma_{s-i}\vec{w}_s = \alpha_1\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_i\vec{u}_i + \beta_1\vec{v}_{i+1} + \ldots + \beta_{r-i}\vec{v}_r. \quad (2)$$

La relation (2) exprime qu'un même vecteur $\vec{X}$ appartient à E'' (premier membre) et à E' (second membre), donc $\vec{X} \in E' \cap E''$ et par suite

$$-\gamma_1\vec{w}_{i+1} - \ldots - \gamma_{s-i}\vec{w}_s = \lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_i\vec{u}_i,$$

relation qui, du fait de l'indépendance des vecteurs de la base $\mathfrak{V}'$, exige la nullité de tous les coefficients, en particulier

$$\gamma_1 = 0, \ \ldots, \ \gamma_{s-i} = 0.$$

Par suite $\vec{X} = \vec{0}$, et du fait de l'indépendance des vecteurs de la base $\mathfrak{V}$,

$$\alpha_1 = 0, \ \ldots, \quad \alpha_i = 0, \quad \beta_1 = 0, \ \ldots, \quad \beta_{r-i} = 0.$$

Nous pouvons affirmer maintenant que $\mathfrak{S}$ est une base de $E' + E''$, en d'autres termes

$$\dim (E' + E'') = r + s - i.$$

Cette relation se retient sous la forme

(3) $\quad \dim (E' + E'') + \dim (E' \cap E'') = \dim E' + \dim E''.$

Il résulte de cette étude que la réunion $\mathfrak{S}$ de deux bases quelconques $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$ de E' et E'' est un système lié, puisque les $r + s$ vecteurs de $\mathfrak{S}$ sont des combinaisons linéaires d'un nombre moindre de vecteurs $(r + s - i)$.

b) Cas de $E' \cap E'' = \left\{ \vec{0} \right\}$. — Un raisonnement analogue au précédent montre que la réunion $\mathfrak{S}$ des bases $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$ de E' et E'' est une base de $E' + E''$; on a donc, dans ce cas

$$\dim (E' + E'') = \dim E' + \dim E''.$$

Grâce à la convention $\dim \left\{ \vec{0} \right\} = 0$, que nous avons faite au n° 157, 1°, on peut donc considérer que la relation (3) reste valable si $E' \cap E'' = \left\{ \vec{0} \right\}$ et d'ailleurs même si, par exemple, $E' = \left\{ \vec{0} \right\}$, auquel cas $E' + E''$ n'est autre que E''.

2° **Somme directe.** — Nous avons démontré au n° 154, 3° que la somme $E' + E''$ est directe si, et seulement si, $E' \cap E'' = \{\vec{0}\}$. D'après le 1°, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **La somme de deux sous-espaces vectoriels E' et E'' d'un espace vectoriel de dimension finie est directe si, et seulement si,**

$$\dim (E' + E'') = \dim E' + \dim E''.$$

Quand $E' \oplus E''$ est une somme directe de sous-espaces distincts de $\{\vec{0}\}$, la réunion d'une base de E' et d'une base de E'' est une base de $E' \oplus E''$.

3° **Sous-espaces supplémentaires.** — *a*) Étant donné que deux sous-espaces de E sont dits supplémentaires quand E est leur somme directe, le 2° permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, la somme des dimensions de deux sous-espaces supplémentaires est n; la réunion des bases de deux sous-espaces supplémentaires de E (autres que E et $\{\vec{0}\}$) est une base de E.**

Inversement, deux sous-espaces de E dont la somme des dimensions est n ne sont supplémentaires que si, en outre, leur somme est E.

APPLICATION. — Soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E; on obtient deux sous-espaces supplémentaires en prenant pour E' le sous-espace engendré par, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\}$ et pour E'' le sous-espace engendré par $\{\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$.

b) THÉORÈME. — **Dans un espace vectoriel de dimension n, tout sous-espace vectoriel E' de dimension r admet au moins un sous-espace supplémentaire E'' de dimension $n - r$.**

Si $1 \leqslant r < n$, on peut en effet compléter une base quelconque $\mathfrak{V}$ de E' par un système libre $\mathfrak{V}'$ de façon à obtenir une base de E.

Le sous-espace E'' de E engendré par $\mathfrak{V}'$ est supplémentaire de E'.

Par ailleurs E (resp. $\{\vec{0}\}$) est un sous-espace de E qui admet un, et un seul, sous-espace supplémentaire qui est $\{\vec{0}\}$ (resp. E).

REMARQUE I. — Dans un espace vectoriel de dimension infinie, tout sous-espace admet au moins un sous-espace supplémentaire; nous admettrons cette proposition dont la démonstration fait appel à l'axiome du choix (cf. n° 157, 1°).

REMARQUE II. — Quand nous aurons démontré (au n° 170) qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie conserve la dimension, (ce qui implique qu'un espace vectoriel isomorphe d'un espace vectoriel de dimension infinie est lui-même de dimension infinie) nous serons en mesure d'affirmer

que tout sous-espace supplémentaire du sous-espace E′ de E a la dimension (éventuellement infinie) de l'espace vectoriel quotient E/E′; celle-ci est dite *codimension* de E′. On pose les définitions suivantes :

DÉFINITION I. — **On appelle droite (resp. plan) d'un espace vectoriel E tout sous-espace de E de dimension 1** (resp. 2). **Si E lui-même est de dimension 1** (resp. 2), **on dit que E est une droite vectorielle** (resp. **un plan vectoriel).**

DÉFINITION II. — **On appelle hyperplan d'un espace vectoriel tout sous-espace vectoriel de codimension 1.**

c) **Généralisation.** — Soit E_i, ($i = 1, 2, \ldots, p$), des sous-espaces vectoriels de E, de dimensions k_i, dont la somme S est directe. Désignons par $\mathcal{V}_i$ une base de E_i et par $\mathcal{S}$ la réunion des bases $\mathcal{V}_i$. Tout vecteur de S

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}_i, \qquad \vec{X}_i \in E_i$$

s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$ et cela de façon unique, sans quoi S ne serait pas directe. Il en résulte que $\mathcal{S}$ est une base de S qui admet ainsi la dimension $k_1 + \ldots + k_p$.

EXERCICES

1. — Dans chacun des espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 définis au chap. IV, étudier sous forme géométrique, la dépendance ou l'indépendance d'un système formé de deux, trois, ou quatre vecteurs.

2. — Dans l'espace des vecteurs à trois coordonnées réelles, on donne les vecteurs

$$\vec{v}_1(1, 2, 3) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_2(2, -1, 1).$$

Montrer qu'ils engendrent le même sous-espace que les vecteurs

$$\vec{w}_1(1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad \vec{w}_2(0, 1, 1).$$

3. — Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de l'espace vectoriel E sur le corps K étant indépendants, les vecteurs

$$\beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3, \quad \alpha'\vec{v}_1 + \gamma'\vec{v}_3, \quad \alpha''\vec{v}_1 + \beta''\vec{v}_2$$

sont-ils indépendants?

(Les nombres $\beta, \gamma, \alpha', \gamma', \alpha'', \beta''$ appartiennent au corps K et ne sont pas nuls.)

4. — *a*) On considère l'espace des vecteurs à quatre coordonnées réelles x, y, z, t, et l'ensemble de ceux de ces vecteurs qui vérifient la relation

$$x - y + z - t = 0.$$

Montrer qu'ils forment un sous-espace de dimension 3 dont on donnera une base.

b) Résoudre la question analogue quand on considère les vecteurs qui vérifient

$$x - y = 0 \qquad z - t = 0.$$

5. — *a*) On donne 3 vecteurs dans l'espace E des vecteurs à quatre coordonnées réelles :

$$\vec{V}_1(0, 1, 2, 3); \qquad \vec{V}_2(-1, 1, 2, -2); \qquad \vec{V}_3(-2, -1, 1, 2).$$

Ils sont les générateurs d'un sous-espace de E; caractériser les vecteurs $\vec{V}(x, y, z, t)$ qui

appartiennent à ce sous-espace.

b) Traiter la même question avec les vecteurs

$$\vec{W}_1(1, 2, 3, 0); \qquad \vec{W}_2(-1, 1, 2, -2); \qquad \vec{W}_3(3, 0, -1, 4).$$

6. — Dans un espace vectoriel E, de dimension n, défini sur un corps K, et rapporté à une base $\mathfrak{B}$, composée des vecteurs $\vec{u}_i$, on considère n vecteurs $\vec{V}_i$; examiner si ces n vecteurs sont indépendants, dans les cas suivants :

a) $\vec{V}_i = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots - (n-1)\vec{u}_i + \ldots + \vec{u}_n.$

b) $\vec{V}_i = a_{i1}\vec{u}_1 + a_{i2}\vec{u}_2 + \ldots + a_{ii}\vec{u}_i \quad (a_{ii} \neq 0).$

c) $\vec{V}_i = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_{i-1} + \vec{u}_{i+1} + \ldots + \vec{u}_n.$

$(i = 1, 2, \ldots, n).$

7. — Démontrer que les fonctions réelles, de la variable réelle x : $A\cos(x + \alpha)$ forment un espace vectoriel sur le corps des réels; en trouver une base.

Les fonctions $A\,\mathrm{ch}(x + \alpha)$ où A et α sont réels forment-elles un espace vectoriel sur le corps des réels?

8*. — Quatre vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$ de R^3 sont nécessairement liés par une relation

$$\lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2 + \lambda_3\vec{V}_3 + \lambda_4\vec{V}_4 = \vec{0}.$$

Former une relation indépendante des λ_i entre les carrés scalaires $\vec{V}_i.\vec{V}_i$ et les produits scalaires $\vec{V}_i.\vec{V}_j$.

9. — Soit Z l'ensemble des entiers relatifs. On pose

$$P_k(x) = \frac{1}{k!}(x + 1)(x + 2)\ldots(x + k) \quad [k \in N]$$

a) Démontrer que, quel que soit k,

$$x_0 \in Z \implies P_k(x_0) \in Z.$$

b) Démontrer que tout polynôme sur R, dont le degré n'est pas supérieur à n, peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme

$$A_0 + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \ldots + A_nP_n(x).$$

c) Déterminer tous les polynômes $\Pi(x)$, définis sur R, et tels que

$$\forall x_0 \in Z \implies \Pi(x_0) \in Z.$$

10*. — On donne la relation de récurrence

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \qquad (1)$$

où a et b sont deux nombres donnés, réels. Connaissant u_0 et u_1 réels ou imaginaires la relation (1) permet de déterminer $u_2, \ldots, u_n, \ldots$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions u_n de l'entier n vérifiant (1) est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des complexes.

b) Chercher les solutions de (1) qui sont de la forme $u_n = r^n$, où r est un nombre réel ou imaginaire, et en déduire, si $a^2 + 4b \neq 0$, l'expression de u_n en fonction de u_0 et de u_1.

c) Si $a^2 + 4b = 0$, il n'existe qu'une solution de la forme r^n; en étudiant la suite u_n définie par $u_n = r^n v_n$, on pourra encore exprimer u_n en fonction de u_0 et de u_1.

(Le lecteur comparera ces méthodes à celles qui sont utilisées dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients réels constants (II, n° 250.)

Applications numériques :

1° $a = 1, \quad b = 1;$ 2° $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2};$ 3° $a = 2, \quad b = -2.$

CHAPITRE XI

APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans ce chapitre, E *et* F *désignent deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif* K. *Sauf avis contraire, les définitions posées et les propositions démontrées sont valables aussi bien si* E *et* F *ont une dimension finie que s'ils sont de dimension infinie. Quand nous entendrons nous limiter au cas où l'un des espaces vectoriels (ou l'un et l'autre) a une dimension finie, nous le dirons explicitement.*

L'étude qui suit généralise celle des homomorphismes de groupes (32).

I. DÉFINITIONS. OPÉRATIONS

161. ***Homomorphisme d'espaces vectoriels ou application linéaire.*** — 1° DÉFINITION. — **On appelle homomorphisme d'espaces vectoriels, ou application linéaire, tout homomorphisme d'un espace vectoriel** E **dans un espace vectoriel** F (sur le même corps) **qui, aux lois de structure de** E, **fait correspondre les lois de structure de** F, **c'est-à-dire toute application** f **de** E **dans** F **telle que**

$$\begin{cases} \forall \vec{X},\ \vec{X'} \in E & f(\vec{X} + \vec{X'}) = f(\vec{X}) + f(\vec{X'}) \qquad (1) \\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{X} \in E & f(\lambda \vec{X}) = \lambda f(\vec{X}). \qquad (2) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) sont appelées *critères* (ou axiomes) *de linéarité.* Leur application répétée conduit à la formule

$$f\left(\sum_1^n \lambda_i \vec{X}_i\right) = \sum_1^n \lambda_i f(\vec{X}_i). \qquad (3)$$

Dans le premier (resp. second) membre de (1), le signe + est relatif à la loi interne de E (resp. de F); les lois externes qui interviennent dans (2) sont relatives à E (resp. à F) au premier (resp. second) membre.

Si F = E, f est dit *endomorphisme* (ou *opérateur linéaire*) de E.

2° **Image de l'élément nul.** — D'après les critères de linéarité

$$f(\vec{X}) = f(\vec{X} + \vec{0}_E) = f(\vec{X}) + f(\vec{0}_E)$$

d'où il résulte que : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ (4)

(Les indices servent à distinguer les éléments nuls de E et de F).

3° **Images d'éléments opposés.** — D'après (2) : $f(-\vec{X}) = -f(\vec{X})$. Deux vecteurs opposés de E ont pour images deux vecteurs opposés de F.

4° **Autre critère de linéarité.** — THÉORÈME. — **L'application f de l'espace vectoriel** E **dans l'espace vectoriel** F (sur le même corps commutatif K) **est linéaire si et seulement si**

$$\forall (\lambda, \vec{X}, \vec{X}') \in K \times E \times E, \qquad f(\lambda \vec{X} + \vec{X}') = \lambda f(\vec{X}) + f(\vec{X}') \quad (5)$$

N) Les relations (1) et (2) du 1° entraînent (5).

S) Inversement, supposons (5) satisfaite. En utilisant d'abord $\lambda = +1$, puis $\lambda = -1$ et $\vec{X}' = \vec{X}$, on en déduit (1) et (4).

En faisant $\vec{X}' = \vec{0}_E$ dans (5), on en déduit (2).

162. Exemples d'applications linéaires. — **Exemple I.** *Forme générale des applications linéaires d'un espace vectoriel* E *de dimension finie n dans un espace vectoriel* F, *de dimension finie ou infinie.*

Analyse. — Rapportons E à une base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$; le vecteur générique $\vec{X}$ de E s'écrit

$$\vec{X} = \sum_1^n x_i \vec{u}_i$$

et a une image de la forme

$$f(\vec{X}) = \sum_1^n x_i \vec{l}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{l}_i = f(\vec{u}_i);$$

les vecteurs $f(\vec{u}_i)$ sont les images dans F des vecteurs de la base de E.

Synthèse. — Inversement, donnons-nous arbitrairement n vecteurs distincts ou confondus $\vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_n$ de F et soit f l'application de E dans F déterminé par

$$\vec{X} = \sum_1^n x_i \vec{u}_i \quad \longrightarrow \quad f(\vec{X}) = \sum_1^n x_i \vec{l}_i.$$

Vérifions que f satisfait aux critères de linéarité :

a) Soit $\vec{X}'$ un second vecteur de E. Nous avons

$$\vec{X}' = \sum_1^n x_i' \vec{u}_i; \qquad \vec{X} + \vec{X}' = \sum_1^n (x_i + x_i') \vec{u}_i; \qquad f(\vec{X} + \vec{X}') = \sum_1^n (x_i + x_i') \vec{l}_i$$

et

$$f(\vec{X} + \vec{X}') = f(\vec{X}) + f(\vec{X}').$$

b) Soit λ un scalaire de K. Nous avons

$$\lambda \vec{X} = \sum_1^n \lambda x_i \vec{u}_i; \qquad f(\lambda \vec{X}) = \sum_1^n \lambda x_i \vec{l}_i \qquad \text{et} \qquad f(\lambda \vec{X}) = \lambda f(\vec{X}).$$

En résumé, toute application linéaire f de E (de dimension n) dans F peut être obtenue ainsi :

a) On choisit une base $\{\vec{u_i}\}$ de E;

b) on choisit dans F n vecteurs quelconques $\vec{l_1}, \ldots, \vec{l_n}$; alors l'application linéaire f est définie par

$$\vec{X} = \sum_1^n x_i \vec{u_i} \xrightarrow{f} f(\vec{X}) = \sum_1^n x_i \vec{l_i}.$$

Exemple II. — Notion de projection. — Soit E un espace vectoriel quelconque sur K, et E′, E″ deux sous-espaces supplémentaires.

On écrit, d'une seule façon (n° 154)

$$\vec{X} = \vec{X'} + \vec{X''}, \qquad \vec{X} \in E, \qquad \vec{X'} \in E', \qquad \vec{X''} \in E''.$$

Nous avons appelé $\vec{X'}$ projection de $\vec{X}$ sur E′ parallèlement à E″; posons $\vec{X'} = \text{proj } \vec{X}$.

L'application de E dans E′ qui a tout $\vec{X}$ associe sa projection $\vec{X'}$ est linéaire : en effet

les égalités
$$\begin{cases} \vec{X_1} = \vec{X_1'} + \vec{X_1''} & \vec{X_1'} = \text{proj } \vec{X_1} \\ \vec{X_2} = \vec{X_2'} + \vec{X_2''} & \vec{X_2'} = \text{proj } \vec{X_2} \end{cases}$$

entraînent
$$\vec{X_1} + \vec{X_2} = \underset{\in E'}{\left(\vec{X_1'} + \vec{X_2'}\right)} + \underset{\in E''}{\left(\vec{X_1''} + \vec{X_2''}\right)}$$

d'où
$$\text{proj}\left(\vec{X_1} + \vec{X_2}\right) = \text{proj } \vec{X_1} + \text{proj } \vec{X_2}.$$

De même
$$\forall \lambda \in K, \qquad \lambda \vec{X} = \underset{\in E'}{\lambda \vec{X'}} + \underset{\in E''}{\lambda \vec{X''}}$$

entraîne
$$\text{proj}(\lambda \vec{X}) = \lambda \text{proj } \vec{X}.$$

Exemple III. — Soit E un espace vectoriel sur K et soit k un scalaire fixe de K. En associant au vecteur générique $\vec{X}$ de E le vecteur $k\vec{X}$ de E on détermine une application de E dans E, qui est dite *homothétie de rapport* k, et qui vérifie les critères de linéarité.

Exemple IV. — Soit $\vec{X}(x_1, \ldots, x_n)$ le vecteur générique de l'espace vectoriel K^n sur le corps K. Étant donnés les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ de K, on désigne par f l'application de K^n dans K définie par

$$\vec{X} \xrightarrow{f} f(\vec{X}) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

Cette application vérifie les critères de linéarité; il suffit, dans l'exemple I de remplacer les vecteurs $\vec{l_i}$ par les éléments a_i du corps K.

Une telle application linéaire est un cas particulier des *formes linéaires* qui seront étudiées au chapitre XIII.

Exemple V. — Soit $\vec{V}(x, y, z)$ un élément de R^3, $\vec{W}(x', y')$ un élément de R^2; les formules

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \end{cases} \qquad (1)$$

où les coefficients sont réels, associent un vecteur $\vec{W}$ à un vecteur $\vec{V}$; soit f l'application ainsi définie de R^3 dans R^2 :

$$\vec{W} = f(\vec{V}).$$

Montrons qu'elle vérifie les critères de linéarité :

1° soit $\vec{W}_1 = f(\vec{V}_1)$ $\begin{cases} x_1' = ax_1 + by_1 + cz_1 \\ y_1' = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 \end{cases}$

$\vec{W}_2 = f(\vec{V}_2)$ $\begin{cases} x_2' = ax_2 + by_2 + cz_2 \\ y_2' = a'x_2 + b'y_2 + c'z_2. \end{cases}$

$f(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$ est le vecteur de R^2 qui a pour coordonnées

$\begin{cases} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) \\ a'(x_1 + x_2) + b'(y_1 + y_2) + c'(z_1 + z_2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1' + x_2' \\ y_1' + y_2' \end{cases}$

c'est donc que $f(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = f(\vec{V}_1) + f(\vec{V}_2)$.

2° $f(\lambda\vec{V})$ est le vecteur de R^2 qui a pour coordonnées

$\begin{cases} a(\lambda x) + b(\lambda y) + c(\lambda z) \\ a'(\lambda x) + b'(\lambda y) + c'(\lambda z) \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lambda x' \\ \lambda y' \end{cases}$

c'est donc que $f(\lambda\vec{V}) = \lambda f(\vec{V})$.

163. ***Isomorphisme d'espaces vectoriels.*** — Conformément à la terminologie introduite au n° 23, 3° nous dirons qu'**une application linéaire bijective f de E sur F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.**

Rappelons que, $*$ et T étant des lois internes (resp. externes) sur des ensembles E et F, nous avons démontré (23, 2°, 5°) que si f est un isomorphisme de E $(*)$ sur F (T), f^{-1} est un isomorphisme de F(T) sur E$(*)$. Il en résulte :

THÉORÈME. — **L'application réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels est un isomorphisme d'espaces vectoriels.**

On peut aussi énoncer :

THÉORÈME. — **L'application réciproque d'une application linéaire bijective est une application linéaire bijective.**

CAS PARTICULIER. — Si F coïncide avec E, f est un endomorphisme de E (n° 161, 1°). On peut alors énoncer :

L'application réciproque d'un endomorphisme bijectif est un endomorphisme bijectif.

Conformément à une définition du n° 23, nous appellerons *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E.

Les automorphismes de E seront étudiées au chapitre XVI.

164. — ***Opérations linéaires sur les applications linéaires.***

1° **Notations.** — Soit E et F deux espaces vectoriels sur le *même* corps K; l'ensemble des applications linéaires de E dans F est désigné par $\mathfrak{L}_K(E, F)$. Quand il n'y aura pas de confusion possible, nous noterons $\mathfrak{L}(E, F)$, ou même simplement $\mathfrak{L}$.

Nous désignerons par $f, g, h, k, \ldots$ des éléments de $\mathfrak{L}(E, F)$, par $\lambda, \mu, \ldots$ des scalaires du corps K.

2° **Addition.** - *a*) On appelle somme des applications f et g l'application h de E dans F qui, à tout vecteur $\vec{X}$ de E associe dans F le vecteur

(1) $\qquad h(\vec{X}) = f(\vec{X}) + g(\vec{X})$; nous noterons $h = f + g$.

b) L'application h est linéaire; en effet (**161**, 4°)

$$\forall (\lambda, \vec{X}, \vec{X}') \in K \times E \times E,\ h(\lambda\vec{X} + \vec{X}') = f(\lambda\vec{X} + \vec{X}') + g(\lambda\vec{X} + \vec{X}')$$
$$= \lambda f(\vec{X}) + f(\vec{X}') + \lambda g(\vec{X}) + g(\vec{X}')$$
$$= \lambda h(\vec{X}) + h(\vec{X}').$$

c) L'addition est commutative et associative, à cause des propriétés de l'addition dans F; elle admet un élément neutre, l'application o qui à tout $\vec{X}$ de E associe l'élément $\vec{0}$ de F; toute application f admet une opposée, celle qui à tout $\vec{X}$ de E associe le vecteur $-f(\vec{X})$.

En définitive, *les applications linéaires de* E *dans* F *forment un groupe additif.*

3° **Multiplication par un scalaire.** — *a*) Avec les mêmes notations, on appelle *produit* de l'application f par le scalaire $\alpha \in K$ l'application k de E dans F qui, à tout vecteur $\vec{X}$ de E associe le vecteur $\alpha f(\vec{X})$ de F, soit

(2) $\qquad k(\vec{X}) = \alpha f(\vec{X})$; nous noterons $k = \alpha f$.

b) L'application k est linéaire; en effet (**161**, 4°)

$$\forall (\lambda, \vec{X}, \vec{X}') \in K \times E \times E,\ k(\lambda\vec{X} + \vec{X}') = \alpha f(\lambda\vec{X} + \vec{X}')$$
$$= \alpha[\lambda f(\vec{X}) + f(\vec{X}')]$$
$$= \lambda k(\vec{X}) + k(\vec{X}')$$

c) On vérifie successivement : $(1)f = f$; $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$

$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g;\quad (\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f.$$

4° **L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans** F. — Les deux lois précédentes définissent sur l'ensemble $\mathfrak{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F une structure d'espace vectoriel sur le corps K.

5° **L'espace vectoriel** $\mathfrak{F}(E, F)$. — Plus généralement, F étant un espace vectoriel sur le corps K, mais E étant maintenant un ensemble quelconque, non vide, les relations (1) et (2) des 2° et 3° (où $\vec{X}$ ne désigne plus maintenant un vecteur, mais un élément quelconque de l'ensemble E) déterminent sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E, F)$ des applications de E dans F deux lois qui munissent $\mathfrak{F}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel sur K ainsi qu'on le constate en reprenant 2° *c*) et 3° *c*).

165. *Composition des applications linéaires.* — 1° Les espaces vectoriels considérés E, F, G étant relatifs au même corps K, soit f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G.

Soit h l'application de E dans G définie de la façon suivante : à tout $\vec{X}$ de E on associe $f(\vec{X})$ de F, puis à ce dernier vecteur on associe $g[f(\vec{X})]$ dans G.

On note $h(\vec{X}) = g[f(\vec{X})]$ ou $h = g \circ f$.

2° Montrons que l'*application h est linéaire* :

a) $h(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = g[f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2)] = g[f(\vec{X}_1) + f(\vec{X}_2)]$ puisque f est linéaire.

En appliquant alors la linéarité de g, on écrit

$$g[f(\vec{X}_1)] + g[(f(\vec{X}_2)] \quad \text{ou} \quad h(\vec{X}_1) + h(\vec{X}_2).$$

b) $h(\lambda\vec{X}) = g[f(\lambda\vec{X})] = g[\lambda f(\vec{X})] = \lambda g[f(\vec{X})] = \lambda h(\vec{X})$

L'application $g \circ f$, composée des applications f et g, est encore une application linéaire.

Plus généralement, la composition d'un nombre quelconque d'applications linéaires fournit une application linéaire; cette opération est associative, comme toutes les compositions d'applications.

3° *La composition des applications linéaires est distributive par rapport à leur addition.* La distributivité à droite tient au caractère linéaire de g :

$$g[f_1(\vec{X}) + f_2(\vec{X})] = g[f_1(\vec{X})] + g[f_2(\vec{X})]$$

entraîne $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$.

La distributivité à gauche est une propriété générale de la composition d'applications (linéaires ou non) d'espaces vectoriels dans des espaces vectoriels :

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f.$$

II. IMAGE. NOYAU. RANG

166. *Image d'une application linéaire.* — 1° **Image d'un sous-espace vectoriel.** — *a)* THÉORÈME I. **Dans une application linéaire f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, l'image $f(\mathcal{A})$ d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de E est un sous-espace vectoriel de F.**

II. **Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, finie ou infinie, de $\mathcal{A}$, $f(\mathcal{G})$ est une famille génératrice de $f(\mathcal{A})$.**

I. α) On sait (161, 2°) que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$; $f(\mathcal{A})$ est donc une partie non vide de F.

β) Soient $\vec{Y}$ et $\vec{Y}'$ deux vecteurs quelconques de $f(\mathcal{A})$ et soit λ un scalaire quelconque du corps de base K.

Il existe deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X}'$ de $\mathcal{A}$ ($\vec{X}$ et $\vec{X}'$ ne sont pas nécessairement uniques) dont les images par f sont $\vec{Y}$ et $\vec{Y}'$. Du fait de la linéarité de f, nous avons

$$\lambda\vec{Y} + \vec{Y}' = \lambda f(\vec{X}) + f(\vec{X}') = f(\lambda\vec{X} + \vec{X}')$$

Or, $\mathcal{A}$ étant un sous-espace vectoriel de E, $\lambda\vec{X} + \vec{X}'$ est un vecteur de $\mathcal{A}$; il en résulte

$$f(\lambda\vec{X} + \vec{X}') \in f(\mathcal{A}) \qquad \text{et} \qquad \lambda\vec{Y} + \vec{Y}' \in f(\mathcal{A}).$$

Ainsi

$$\forall (\lambda, \vec{Y}, \vec{Y}') \in K \times f(\mathcal{A}) \times f(\mathcal{A}), \qquad \lambda\vec{Y} + \vec{Y}' \in f(\mathcal{A})$$

ce qui permet d'affirmer que $f(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de F.

II. — Supposons maintenant que le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de E admette une famille génératrice, finie ou infinie, $\mathcal{G} = (\vec{A}_i)_{i\in I}$.

Désignons par $f(\mathcal{G})$ la famille $(f(\vec{A}_i))_{i\in I}$ de vecteurs de F.

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire

$\sum_{i\in J} \lambda_i \vec{A}_i$, J désignant une partie finie de I.

$f(\mathcal{A})$ est donc l'ensemble des vecteurs de F qui peuvent s'écrire

$$f\left(\sum_{i\in J} \lambda_i \vec{A}_i\right), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{i\in J} \lambda_i f(\vec{A}_i).$$

$f(\mathcal{A})$ est donc le sous-espace vectoriel de F qui est engendré par la famille $f(\mathcal{G})$, ce qui justifie la deuxième partie de la proposition.

Remarque. — Dans la mesure où nous savons que tout espace vectoriel admet une famille génératrice, ce qui résulte du théorème sur l'existence d'une base (théorème admis dans le cas général) nous aurions pu nous limiter à la partie II du raisonnement précédent.

b) ***Image d'une famille liée.*** — Nous gardons les notations du *a*).

Théorème. — **L'image par une application linéaire d'une famille liée de E est une famille liée de F.**

Soit $\mathcal{G}$ une famille liée de E; il existe alors une sous-famille finie $\mathcal{G}' = (\vec{A}_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{G}$ et une famille finie $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires de K telles que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \vec{A}_j = \vec{0}_E.$$

En prenant les images par f, on en déduit, compte tenu de la linéarité de f,

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f(\vec{A_j}) = \vec{0}_F$$

ce qui prouve que $f(\mathfrak{I})$ est une famille liée de vecteurs de F.

c) Famille dont l'image est libre. — En raisonnant par l'absurde, on déduit du théorème précédent *b*) :

THÉORÈME. — **Une famille de vecteurs de E, dont l'image dans F par une application linéaire f est libre, est elle-même une famille libre.**

REMARQUE. — Il est important d'observer que la réciproque du théorème précédent n'est pas vraie. L'image par f d'une famille libre de E n'est pas nécessairement une famille libre de F.

C'est ainsi que si E' et E'' sont deux sous-espaces supplémentaires de E, il peut se faire qu'une famille libre $\mathfrak{I}$ de E se projette sur E' parallèlement à E'' suivant une famille liée : il en est ainsi quand $\mathfrak{I}$ est constitué par un vecteur unique, non nul, de E''.

2° **Cas d'une dimension finie, d'un rang fini.** — Nous gardons les notations du 1°.

a) $\mathfrak{A}$ *est de dimension finie.* — Plaçons nous dans le cas où le sous-espace vectoriel $\mathfrak{A}$ de E (éventuellement confondu avec E) a une dimension finie m. Soit $\mathfrak{U}$ une base de $\mathfrak{A}$; comme $\mathfrak{U}$ est un système générateur de $\mathfrak{A}$, $f(\mathfrak{U})$ est un système générateur de $f(\mathfrak{A})$, formé de m vecteurs (non nécessairement distincts); $f(\mathfrak{A})$ a donc une dimension finie, au plus égale à m, et nous écrirons

$$\dim f(\mathfrak{A}) \leqslant \dim \mathfrak{A}.$$

Nous traduirons ce résultat de façon condensée par l'énoncé :

THÉORÈME. — **Une application linéaire ne peut augmenter la dimension.**

b) *La famille génératrice* $\mathfrak{I}$ *est finie.* — Nous supposons que $\mathfrak{I}$ est un système de m vecteurs de l'espace vectoriel E; $f(\mathfrak{I})$ désigne son image par l'application linéaire f de E dans F.

Soit $\mathfrak{A}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathfrak{I}$ et soit $\rho(\mathfrak{I})$ le rang de $\mathfrak{I}$; nous avons (n° 157, 2°)

$$\rho(\mathfrak{I}) = \dim \mathfrak{A}.$$

De même, $f(\mathfrak{I})$ étant un système générateur de $f(\mathfrak{A})$,

$$\rho[f(\mathfrak{I})] = \dim f(\mathfrak{A}).$$

Or nous venons de voir que :

$$\dim f(\mathfrak{A}) \leqslant \dim \mathfrak{A}.$$

Il en résulte

$$\rho[f(\mathfrak{I})] \leqslant \rho(\mathfrak{I}).$$

De façon condensée, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Une application linéaire ne peut augmenter le rang d'un système de vecteurs.**

3° **Image d'une application linéaire.** — Le théorème du 1°, *a*) s'applique à E, considéré comme un sous-espace vectoriel de E. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION I. — **Dans une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'image de E est un sous-espace vectoriel de F que l'on appelle image de l'application linéaire *f*.**

L'image $f(E)$ de f se désigne aussi par $\mathrm{Im}\, f$.

DÉFINITION II. **Dans le cas particulier où $\mathrm{Im}\, f$ a une dimension finie r on dit que r est le rang de l'application linéaire f et on écrit $r = \rho(f)$.**

On utilise aussi le symbole rg pour désigner le rang :

$$\mathrm{rg} f = \dim f(E).$$

4° **Propriété caractéristique d'une application linéaire surjective.** Il résulte de ces diverses définitions que

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im} f = F$$

et qu'une application linéaire de rang fini ne peut être surjective que si l'espace-image a une dimension finie.

b) Inversement, soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E (sur lequel on ne fait aucune hypothèse de dimension) dans l'espace vectoriel F, de dimension finie p. $\mathrm{Im}\, f$, sous-espace vectoriel de F, a une dimension finie $r \leqslant p$ et on sait que $\mathrm{Im}\, f$ est confondu avec F si, et seulement si, $r = p$.

Retenons :

THÉORÈME. — **Une application linéaire dans laquelle l'espace-image a une dimension finie p est surjective si et seulement si elle est de rang p.**

c) Dans le cas particulier où E a une dimension finie, n, soit $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_i\}$ une base de E. Nous savons (1°) que $f(\mathfrak{U})$ engendre $\mathrm{Im}\, f$.

Si f est surjective, $\mathrm{Im}\, f = F$, alors $f(\mathfrak{U})$ engendre F.

Inversement, si $f(\mathfrak{U})$ engendre F, tout vecteur $\vec{Y}$ de F peut s'écrire

$$\vec{Y} = \sum_1^m \lambda_i f(\vec{u}_i) \qquad \text{et donc} \qquad \vec{Y} = f\left(\sum_1^m \lambda_i \vec{u}_i\right),$$

et par suite f est surjective.

Lorsque l'espace-objet E *est de dimension finie, l'application linéaire f de* E *dans* F *est surjective si, et seulement si, l'image d'une base de* E *est un système générateur pour* F.

167. *Noyau d'une application linéaire.* — 1° Image réciproque d'un sous-espace vectoriel.

THÉORÈME. — **Dans une application linéaire f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{B})$ d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.**

Rappelons que $f^{-1}(\mathcal{B})$ désigne l'ensemble des vecteurs $\vec{X}$ de E tels que

$$f(\vec{X}) \in \mathcal{B}.$$

α) Puisque $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, $f^{-1}(\mathcal{B})$, qui contient $\vec{0}_E$, est une partie non vide de E.

β) Soit $\vec{X}$ et $\vec{X}'$ deux vecteurs quelconques de $f^{-1}(\mathcal{B})$: les deux vecteurs $f(\vec{X})$ et $f(\vec{X}')$ appartiennent à $\mathcal{B}$ et il en est de même pour leur somme $f(\vec{X}) + f(\vec{X}')$, qui s'écrit $f(\vec{X} + \vec{X}')$. Ainsi, nous avons :

$$f(\vec{X} + \vec{X}') \in \mathcal{B} \implies \vec{X} + \vec{X}' \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

γ) Soit λ un scalaire quelconque de K; soit $\vec{X}$ un vecteur quelconque de $f^{-1}(\mathcal{B})$: le vecteur $f(\vec{X})$ appartient à $\mathcal{B}$ et il en est de même pour le vecteur $\lambda f(\vec{X})$, qui s'écrit $f(\lambda\vec{X})$. Ainsi, nous avons :

$$f(\lambda\vec{X}) \in \mathcal{B} \implies \lambda\vec{X} \in f^{-1}(\mathcal{B}).$$

2° Noyau d'une application linéaire. — Le théorème du 1° s'applique à $\{\vec{0}_F\}$, considéré comme un sous-espace vectoriel de F on peut donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Dans une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'image réciproque du vecteur nul de F est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle noyau de l'application linéaire f.**

Le noyau $f^{-1}(\vec{0}_F)$ de f se désigne aussi par Ker f.

En d'autres termes :

$$\vec{s} \in \mathrm{Ker} f \iff f(\vec{s}) = \vec{0}_F.$$

Le lecteur constatera que ce résultat est une extension de celui qui a été obtenu au n° 32, à propos des homomorphismes de groupes.

3° Propriété caractéristique d'une application linéaire injective. — a) Soit f une application linéaire de E dans F et soit $\vec{X}_0$ un vecteur de E.

Étudions l'équation sur E, à l'inconnue $\vec{X}$,

$$(1) \qquad f(\vec{X}) = f(\vec{X}_0) \qquad \text{ou} \qquad f(\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{0}_F.$$

Nous avons :

$$(1) \iff \vec{X} - \vec{X}_0 \in \operatorname{Ker} f.$$

ou $$(1) \iff \vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{s}, \quad \vec{s} \in \operatorname{Ker} f.$$

Selon que $\operatorname{Ker} f$ se réduit à $\{\vec{0}_E\}$ ou que $\operatorname{Ker} f$ contient d'autres vecteurs que $\vec{0}_E$, l'équation (1) admet la solution unique $\vec{X} = \vec{X}_0$ ou admet plusieurs solutions. Il en résulte (n° 17) :

THÉORÈME. — **L'application linéaire f de E dans F est injective si, et seulement si, son noyau se réduit à $\{\vec{0}_E\}$.**

b) Reprenons l'étude de l'image d'un système fini dans une application linéaire. Nous avons vu au n° 166, 2° que l'image d'un système lié est toujours un système lié. Étudions, cette fois, l'image d'un système libre,

$$\mathcal{S} = \{\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m\},$$

de vecteurs de E. $f(\mathcal{S})$ est lié si, et seulement si, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de K, non tous nuls assurant l'égalité

$$\sum_1^m \lambda_i f(\vec{A}_i) = \vec{0}_F \quad \text{ou} \quad f\left(\sum_1^m \lambda_i \vec{A}_i\right) = \vec{0}_F \quad \text{ou} \quad \sum_1^m \lambda_i \vec{A}_i \in \operatorname{Ker} f.$$

Autrement dit :

THÉORÈME. — **Soit f une application linéaire de E dans F; un système libre $\mathcal{S}$ de E a pour image un système lié de F si, et seulement si, le sous-espace de E engendré par $\mathcal{S}$ contient un vecteur non nul du noyau de f.**

REMARQUE. — Si $\mathcal{S}$ et $f(\mathcal{S})$ sont libres simultanément, on peut affirmer que parmi les vecteurs du sous-espace engendré par $\mathcal{S}$, seul le vecteur $\vec{0}_E$ appartient au noyau de f.

c) Revenons au cas où f est une application linéaire injective, c'est-à-dire où $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$; le sous-espace de E engendré par un système libre $\mathcal{S}$ ne peut contenir un vecteur non nul du noyau de f, et par suite $f(\mathcal{S})$ est libre. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Dans une application linéaire injective, tout système libre a pour image un système libre.**

d) Il résulte du théorème *c*) que dans une application linéaire injective de rang fini r, l'espace-objet E ne peut avoir de système libre d'ordre supérieur à r et que, par suite, E a une dimension finie.

e) Inversement soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E, de dimension finie n, dans l'espace vectoriel F (sur lequel on ne fait aucune hypothèse de dimension). Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ une base arbitrairement choisie

de E; le système $f(\mathfrak{U})$, formé de n vecteurs, engendre Im f, qui a ainsi une dimension finie, soit r.

I. Supposons que $f(\mathfrak{U})$ est libre, c'est-à-dire que $r = n$. D'après *b*), le sous-espace de E engendré par $\mathfrak{U}$, qui est E lui-même, ne contient pas de vecteur non nul du noyau de f qui est ainsi réduit à $\{\vec{0}_E\}$; f est donc injective.

II. Supposons maintenant que f est injective; $f(\mathfrak{U})$, image d'un système libre, est un système libre et on a $r = n$.

Retenons :

THÉORÈME. — **Une application linéaire dans laquelle l'espace-objet a une dimension finie n est injective si, et seulement si, elle est de rang n, c'est-à-dire si elle conserve la dimension.**

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général qui va être établi aux nos **168** et **169**.

168. ***Relation entre le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau.*** — Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E, de dimension finie n, dans l'espace vectoriel F, de dimension finie ou infinie. Le noyau, Ker f, qui est un sous-espace de E, a une dimension finie $s \leqslant n$; soit $\mathfrak{U}' = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s\}$ une base de ce noyau.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut adjoindre à $\mathfrak{U}'$ un système $\mathfrak{U}'' = \{\vec{u}_{s+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vecteurs de E, de façon à obtenir une base de $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}''$ est une base d'un sous-espace vectoriel T, supplémentaire de Ker f pour E.

L'image Im f est le sous-espace vectoriel de F qui est engendré par le système de vecteurs $f(\mathfrak{U})$, c'est-à-dire par $f(\mathfrak{U}'')$, car tous les vecteurs de $f(\mathfrak{U}')$ sont confondus avec $\vec{0}_F$.

Le sous-espace T de E engendré par le système libre $\mathfrak{U}''$ n'ayant en commun avec le noyau que le vecteur $\vec{0}_E$, nous savons, d'après le n° **167**, 3°, *b*), que $f(\mathfrak{U}'')$ est un système libre; il s'agit donc d'une base de f(E), qui est ainsi de dimension $n - s$; le rang de f est ainsi $n - s$.

En résumé, sous la seule réserve que l'espace-objet E ait une dimension finie :

$$\boxed{\dim (\text{Ker } f) + \dim (\text{Im } f) = \dim \text{E}.}$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Lorsqu'une application linéaire f agit sur un espace vectoriel de dimension finie, cette dimension est la somme des dimensions du noyau et de l'image de f.**

Le raisonnement reste valable si Ker $f = \{\vec{0}_E\}$, à condition d'adopter $s = 0$ et $\mathfrak{U}' = \{\vec{0}_E\}$.

REMARQUE I. — Soit $\vec{X} = \lambda_1 \vec{u_1} + \ldots + \lambda_n \vec{u_n}$ un vecteur quelconque de E; son image par f est donnée par

$$f(\vec{X}) = \lambda_{s+1} f(\vec{u_{s+1}}) + \ldots + \lambda_n f(\vec{u_n}),$$

puisque $$f(\vec{u_i}) = \vec{0}_F \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

$\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n$ sont donc les coordonnées de $f(\vec{X})$ dans la base $f(\mathfrak{U}'')$ du sous-espace vectoriel $f(E)$ de F.

On peut donc conclure (cf. n° 170, 5°) que la restriction, $\hat{f}$, de f à T, qui est déterminée par

$$\sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i \vec{u_i} \longrightarrow \sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i f(\vec{u_i}),$$

est un isomorphisme de T sur Im f. Au n° 169, nous donnerons de cette proposition une démonstration valable sans condition de dimension.

REMARQUE II. — Même dans l'hypothèse où F est confondu avec E, il ne faudrait pas déduire du théorème précédent que le noyau de f et l'image de f sont deux sous-espaces supplémentaires de E; cela est en général inexact (cf. exercice n° 7, à la fin du présent chapitre).

169. ***Factorisation canonique d'une application linéaire.*** — 1° Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Nous ne faisons aucune hypothèse de dimension.

La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur E par

« $\vec{X} \mathcal{R} \vec{Y}$ signifie $f(\vec{X}) = f(\vec{Y})$ »

s'écrit aussi :

« $\vec{X} \mathcal{R} \vec{Y}$ signifie $f(\vec{X} - \vec{Y}) = \vec{0}_F$ ou $\vec{X} - \vec{Y} \in \operatorname{Ker} f$ ».

Tous les vecteurs de E qui donnent par f la même image $f(\vec{X})$ qu'un vecteur donné $\vec{X}$ de E constituent une classe d'équivalence, élément de l'espace vectoriel E/Ker f, quotient de l'espace vectoriel E par son sous-espace vectoriel Ker f (n° 154, 5°).

Soit φ la surjection canonique (17,8°) de E sur E/Ker f qui associe à tout vecteur de E la classe d'équivalence à laquelle il appartient. Soit ψ la bijection canonique de E/Ker f sur l'espace vectoriel Im f qui associe à une classe d'équivalence l'image commune de tous les vecteurs de E qui constituent la classe et soit enfin i l'injection canonique de Im f dans E.

D'après le théorème général sur la factorisation d'un homomorphisme démontré au n° 23, 9°, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — **Toute application linéaire f de E dans F peut être factorisée sous la forme** $f = i \circ \psi \circ \varphi$,

φ désignant une application linéaire surjective de E **sur** E/Ker f,

ψ désignant une application linéaire bijective de E/Ker f **sur** Im f,

***i* désignant une application linéaire injective de** Im f **dans** F.

2° De cette étude résulte l'importante proposition suivante (déjà rencontrée dans un cas particulier) :

THÉORÈME. — **Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel** E **dans l'espace vectoriel** F **et soit** T **un sous-espace de** E **supplémentaire du noyau de f. La restriction, $\hat{f}$, de f à** T **est un isomorphisme de** T **sur l'image de f.**

En effet nous avons montré au n° **154**, 5° qu'il existe un isomorphisme de T sur l'espace vectoriel E/Ker f, quotient de E par un sous-espace supplémentaire de T. En désignant par g cet isomorphisme nous avons (cf. 1°)

$$\hat{f} = \psi \circ g.$$

Or le produit de deux isomorphismes est un isomorphisme, comme cela résulte du théorème du n° **23**, 9°, *a*) appliqué au cas où l'on compose deux bijections.

170. ***Applications linéaires en dimension finie.*** — 1° Dans ce paragraphe, qui constitue une transition entre le présent chapitre et le suivant, nous nous limitons au cas où E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finis n et p, sur le même corps commutatif K.

Soit f une application linéaire de E dans F.

a) Im f est un sous-espace vectoriel de F; la dimension de ce sous-espace est donc finie, or c'est le rang, $\rho(f)$, de f; par suite

$$\rho(f) \leqslant p.$$

b) D'autre part, le rang de f, d'après le n° **168**, ne peut surpasser la dimension de E :

$$\rho(f) \leqslant n.$$

2° **Propriété caractéristique d'une application linéaire injective.** Le résultat obtenu au n° **167**, 3°, *e*) permet de noter

$$\boxed{f \text{ est injective} \iff \rho(f) = n.}$$

3° **Propriété caractéristique d'une application linéaire surjective.** Le résultat obtenu au n° **166**, 3° permet de noter

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff \rho(f) = p.}$$

4° **Propriété caractéristique d'une application linéaire bijective.** — L'application linéaire f de E dans F est bijective si, et seulement si, elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\rho(f) = n$ et $\rho(f) = p$, ou enfin si $n = p$: E et F sont de même dimension

$$\boxed{f \text{ est bijective} \iff n = p = \rho(f).}$$

On peut alors donner l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — **Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps K, de dimensions finies.**

a) **Il ne peut exister une application linéaire bijective de E sur F que si E et F sont de même dimension.**

b) **Si E et F sont de même dimension, toute application linéaire de E dans F qui est injective** (resp. **surjective**) **est aussi surjective** (resp. **injective**), **et par suite elle est bijective.**

CAS PARTICULIER. — Si E et F sont confondus, f est alors un endomorphisme de E, et nous pouvons énoncer : *Si l'espace vectoriel* E *est de dimension finie, tout endomorphisme de* E *qui est injectif* (resp. *surjectif*) est aussi *surjectif* (resp. *injectif*), et par suite *cet endomorphisme est bijectif.*

5° **Isomorphisme d'espaces vectoriels.** — *a*) Le résultat du 4° peut s'énoncer sous la forme suivante :

Un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie conserve la dimension.

b) ***Détermination d'un isomorphisme.*** — Soit E et F deux espaces vectoriels *de même dimension n.* Rappelons (n° **162,** ex. I) que l'application linéaire la plus générale, f, de E dans F s'obtient en choisissant d'une part une base $\mathfrak{U} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \right\}$ de E et d'autre part un système $\mathfrak{V} = \left\{ \vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_n \right\}$ de n vecteurs de F et en imposant les conditions $\vec{l}_j = f(\vec{u}_j)$.

f est alors déterminée par

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{u}_j \quad \xrightarrow{f} \quad f(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{l}_j.$$

f est un isomorphisme si et seulement si f est injective (n° **167,** 3°), c'est-à-dire si et seulement si $f(\mathfrak{U})$, qui est $\mathfrak{V}$, est un système libre, ou encore si et seulement si $\mathfrak{V}$ est une base de F.

En résumé, **si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension n sur le corps commutatif K, tout isomorphisme f de E sur F peut être obtenu par**

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{u}_j \quad \xrightarrow{f} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v}_j$$

$\left\{ \vec{u}_j \right\}$ **et** $\left\{ \vec{v}_j \right\}$ **étant des bases convenablement choisies de** E **et de** F.

APPLICATION. — Tout espace vectoriel de dimension n sur le corps K. est, et d'une infinité de façons, isomorphe à l'espace vectoriel K^n.

EXERCICES

(*Pour les exercices* 1 *à* 5, *relatifs aux projections, voir aussi le chapitre* XVI.)

Étant donné un espace vectoriel E, de dimension n, nous appellerons *projecteur* tout endomorphisme f de E qui associe à un vecteur quelconque de E sa projection sur un de ses sous-espaces E′ parallèlement à un sous-espace supplémentaire E″.

1. — *a*) Démontrer que E′ et E″ sont, respectivement, l'image et le noyau de f.

b) Soit e l'endomorphisme identique; que peut-on dire de l'endomorphisme $g = e - f$? Quels sont son image, son noyau?

c) Démontrer que $f^2 = f$; démontrer que, réciproquement, si un endomorphisme f de E est tel que $f^2 = f$, c'est un projecteur. [On considérera l'ensemble E′ des vecteurs de la forme $f(\vec{X})$ et l'ensemble E″ des vecteurs de la forme $\vec{X} - f(\vec{X})$, $\vec{X}$ étant un vecteur quelconque de E].

2. — Démontrer que, pour que l'endomorphisme $f = \frac{1}{2}(g + e)$ soit un projecteur, il faut et il suffit que l'endomorphisme g soit involutif ($g^2 = e$).

3. — Démontrer que, pour que la somme de deux projecteurs f et g soit un projecteur, il faut et il suffit que $fg = -gf$.

4. — Démontrer que, pour que deux projecteurs f et g aient même noyau, il faut et il suffit que $f = fg$ et $g = gf$.

5. — On dit qu'un sous-espace vectoriel E_1 de l'espace vectoriel E est stable par un endomorphisme g de E si $g(E_1) \subseteq E_1$. Démontrer que si les deux sous-espaces supplémentaires E′ et E″ sont stables par un endomorphisme g, et si f est la projection de E sur E′ parallèlement à E″, les endomorphismes f et g commutent [$g \circ f = f \circ g$]. (Comparer avec l'exercice 1.)

6. — Si deux endomorphismes f et g d'un même espace vectoriel E commutent le noyau et l'image de f [resp. de g] sont stables par g [resp. par f] (cf. exercice 5).

7. — Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

a) Montrer que si le noyau et l'image de f sont des sous-espaces supplémentaires de E, les endomorphismes f et f^2 ont la même image.

b) Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où f a une dimension finie, mais qu'elle peut être fausse dans le cas contraire (on étudiera la dérivation dans $R[x]$).

8. — Soit f un endomorphisme singulier d'un espace vectoriel E, de dimension n, défini sur un corps K. Soit F un supplémentaire quelconque du noyau $N = \operatorname{Ker} f$. Soit P le projecteur de E sur F parallèlement à N. $\vec{X}$ étant un vecteur quelconque de E, on considère l'application φ qui, au vecteur $P(\vec{X})$ de F associe le vecteur $f(\vec{X})$ de $f(E)$. Démontrer que φ est une application linéaire injective de F sur $f(E)$. En déduire que tout endomorphisme singulier est le produit d'un endomorphisme injectif par un projecteur,

9. — Soit E un espace vectoriel de dimension n défini sur un corps K et rapporté à une base $\mathfrak{B}\{\vec{u}_i\}$.

a) On considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$f(\vec{u}_i) = \vec{u}_i \quad \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant p \quad \text{et} \quad f(\vec{u}_j) = -\vec{u}_j \quad \text{si} \quad p+1 \leqslant j \leqslant n.$$

(p est un entier donné; $0 \leqslant p \leqslant n$). Démontrer que f^2 est l'endomorphisme identique e.

b) Inversement, soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = e$. Démontrer que, $\vec{X}$ parcourant E, l'ensemble des vecteurs $\vec{X}_1 = \vec{X} + f(\vec{X})$ et l'ensemble des vecteurs $\vec{X}_2 = \vec{X} - f(\vec{X})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E. En déduire qu'on peut trouver au moins une base de E telle que $f(\vec{u}_i) = +\vec{u}_i$ ou $-\vec{u}_i$, comme il a été dit en *a*).

10*. — Soit $f \neq o$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.

1° Démontrer que, si $f_2 = o$, $f(E) \subseteq \operatorname{Ker} f \subset E$. En déduire que $2 \dim f(E) \leqslant n$. Soit $r = \dim f(E)$.

On choisit dans E un supplémentaire quelconque F de $\operatorname{Ker} f$, et on prend, dans F, r vecteurs indépendants $\vec{u}_i$. Démontrer que les r vecteurs $\vec{v}_i = f(\vec{u}_i)$ sont aussi indépendants et qu'on peut choisir, dans $\operatorname{Ker} f$, k vecteurs $\vec{w}_i$ tels que le système ($\mathfrak{B}$) $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$ soit une base de E.

Quelle est la matrice de l'application f quand on rapporte E à cette base?

2° Démontrer que, pour qu'un endomorphisme f de E soit tel que $f(E) = \operatorname{Ker} f$, il faut et il suffit que

$$f^2 = o, \qquad n \text{ pair}, \qquad \dim f(E) = \frac{n}{2}.$$

11*. — E et F sont deux espaces vectoriels sur le corps K, de dimensions n et p; f et g sont deux applications linéaires de E dans F, de rangs $\rho(f)$ et $\rho(g)$; S est le noyau de f.

a) Si X est un sous-espace de E de dimensions λ et si $X \cap S$ a pour dimension k, $f(X)$ est un sous-espace de F de dimensions $\lambda - k$.

b) Soit Y un sous-espace de F et μ la dimension de $Y \cap f(E)$. Montrer que $f^{-1}(Y)$ est un sous-espace de E dont la dimension est $n + \mu - \rho(f)$.

c) Montrer que $|\rho(f) - \rho(g)| \leqslant \rho(f+g) \leqslant \inf[n, p, \rho(f) + \rho(g)]$

12*. — E, F, G, H sont des espaces vectoriels sur le corps K de dimensions n, p, q, s; f, g, h sont respectivement des applications linéaires de E dans F, de F dans G, de G dans H; Σ est le noyau de g. Vérifier les relations

$$\dim[f(E) \cap \Sigma] = \rho(f) - \rho(g \circ f)$$

$$\sup[0, \rho(f) + \rho(g) - n] \leqslant \rho(g \circ f) \leqslant \inf[\rho(f), \rho(g)]$$

$$\rho(g \circ f) + \rho(h \circ g) \leqslant \rho(g) + \rho(h \circ g \circ f)$$

13*. — E, F, G sont des espaces vectoriels sur le corps K; f et g sont des applications linéaires de E dans F et de E dans G telles que le noyau de g est inclus dans celui de f. Montrer qu'il existe une application linéaire h de G dans F telle que : $f = h \circ g$.

14. — Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps K. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que, $\vec{X}_0$ désignant un vecteur convenablement choisi de E, le système $\left\{ \vec{X}_0, f(\vec{X}_0), \ldots, f^{n-1}(\vec{X}_0) \right\}$ est une base de E.

f étant ainsi choisi, montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec f sont les endomorphismes de la forme

$$g = a_0 e + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}.$$

CHAPITRE XII

MATRICES

I. REPRÉSENTATION DE VECTEURS ET D'APPLICATIONS LINÉAIRES

171. — ***Matrices sur un corps.*** — 1° DÉFINITION. — **Étant donné le corps commutatif** K **et les deux entiers positifs** n **et** p, **on appelle matrice du type** (n, p) **sur** K **toute famille d'éléments de** K **indexée par l'ensemble produit** $[1, n] \times [1, p]$

Nous représenterons une telle matrice par un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes. Nous noterons a_{kl} *l'élément* de la k-ième ligne et de la l-ième colonne (1) $k \in [1, n]$, $l \in [1, p]$; les lignes sont numérotées de haut en bas, les colonnes de la gauche vers la droite. Nous écrirons la matrice A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

en encadrant le tableau rectangulaire ou bien de deux grandes parenthèses ou bien de deux grands crochets, à gauche et à droite.

A n'est pas un élément de K, mais l'ensemble des éléments a_{kl} rangés comme il a été indiqué.

Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on écrira abréviativement

$$A = [a_{kl}].$$

2° **Dimensions.** — Lorsqu'une matrice A a n lignes et p colonnes, on dit qu'elle a pour *dimensions* n et p; nous écrirons A (n, p). Le nombre n des lignes est appelé *hauteur* de la matrice; le nombre p des colonnes est appelé *largeur* de la matrice.

Si une matrice a pour dimensions (n, n), on dit qu'elle est *carrée*, d'ordre n.

Une matrice $(1, p)$ est dite *uniligne*, une matrice $(n, 1)$ est dite *unicolonne*.

Si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions sur le corps K,

$$A = B \iff a_{kl} = b_{kl} \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ l = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

---

(1) Certains auteurs utilisent a_l^k au lieu de a_{kl}.

3° **Sous-matrice.** — On appelle *sous-matrice* de la matrice A (n, p) toute matrice A′ obtenue en supprimant q lignes et r colonnes de A; A′ a pour dimensions $(n - q, p - r)$.

4° **Matrice nulle.** — On appelle matrice nulle une matrice dont tous les éléments sont nuls. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on la note O, (0), [0] quelles que soient ses dimensions, mais on observera que deux matrices nulles ne sont égales que si elles ont les mêmes dimensions.

5° **Matrice transposée.** — On appelle matrice *transposée* de A, et on note $\tilde{A}$ (ou tr A) la matrice obtenue en mettant l'élément a_{ij} à la i^e colonne et à la j^e ligne :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$ a pour dimensions p et n.

172. ***Représentation d'un système de vecteurs par une matrice.*** — Nous supposons donné un espace vectoriel E sur le corps K, de dimension n; soit $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \}$ une base de E.

1° **Représentation d'un vecteur.** — A tout vecteur $\vec{X}$ de E nous associons la matrice unicolonne X formée par ses coordonnées dans la base $\mathfrak{U}$, ou la matrice transposée uniligne $\tilde{X}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \tilde{X} = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n].$$

2° **Représentation d'un système de vecteurs.** — Soit un système $\mathfrak{S}$ de p vecteurs de E

$$\mathfrak{S} = \{ \vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p \}.$$

Nous associerons à $\mathfrak{S}$ la matrice $\mathfrak{X}$ (n, p) obtenue en mettant dans la i-ième colonne les coordonnées du vecteur $\vec{X}_i$ dans la base $\mathfrak{U}$.

$$\begin{array}{c|c} & \vec{X}_1 \ \ldots \ \vec{X}_i \ \ldots \ \vec{X}_p \\ \hline \vec{u}_1 & \\ \vec{u}_2 & \\ \vdots & \\ \vec{u}_j & \\ \vdots & \\ \vec{u}_n & \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} x_{11} & \cdot & x_{1i} & \cdot & x_{1p} \\ x_{21} & \cdot & x_{2i} & \cdot & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & x_{ji} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdot & x_{ni} & \cdot & x_{np} \end{array}\right] = \mathcal{H}$$

Au-dessus de chaque colonne de $\mathcal{H}$ nous avons indiqué le vecteur dont elle fournissait les coordonnées; à gauche de chaque ligne nous avons indiqué le vecteur de la base auquel cette ligne était relative.

On peut noter encore la matrice $\mathcal{H}$ sous la forme

$$\mathcal{H} = \left[\vec{X}_1 \ \ldots \ \vec{X}_i \ \ldots \ \vec{X}_p\right],$$

étant bien entendu que $\vec{X}_i$, dans cette écriture, est une notation raccourcie pour représenter toute la colonne des coordonnées du vecteur $\vec{X}_i$, dans la base $\mathcal{U}$.

S'il était nécessaire de préciser la base qui a permis d'écrire la matrice $\mathcal{H}$, on écrirait

$$\mathcal{H} = \left[\vec{X}_1 \ \ldots \ \vec{X}_i \ \ldots \ \vec{X}_p\right]_{\mathcal{U}}.$$

Lorsque aucune confusion n'est à craindre, on peut noter, en abrégé,

$$\begin{array}{c|c} & \vec{X}_i \\ \hline \vec{u}_j & [x_{ji}] \end{array} = \mathcal{H} \qquad \begin{cases} i = 1, \ \ldots \ p \\ j = 1, \ \ldots, \ n. \end{cases}$$

La matrice transposée $\tilde{\mathcal{H}}$ peut se noter

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left[\begin{array}{c} \vec{X}_1 \\ \vdots \\ \vec{X}_i \\ \vdots \\ \vec{X}_p \end{array}\right]$$

étant bien entendu que, maintenant, $\vec{X}_i$ est une notation raccourcie pour représenter toute la ligne des coordonnées du vecteur $\vec{X}_i$ dans la base $\mathcal{U}$.

3° **Vecteurs-colonnes et vecteurs lignes d'une matrice.** — Inversement, étant donnée une matrice quelconque A (n, p) on peut lui associer deux familles de vecteurs :

1° *les vecteurs-colonnes*; ayant choisi une base dans un espace vectoriel de dimension n sur K, un vecteur-colonne de A est un vecteur dont les coordonnées, dans la base choisie, sont les éléments d'une colonne de A, par exemple

$$\vec{C}_i \left\{ \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ni} \end{pmatrix} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

2° *les vecteurs-lignes*; ayant choisi une base dans un espace vectoriel de dimension p sur K, un vecteur-ligne de A est un vecteur dont les coordonnées, dans la base choisie, sont les éléments d'une ligne de A, par exemple

$$\vec{L}_j \left\{ a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jp} \right\} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dans le cas d'une matrice carrée d'ordre n, les vecteurs-colonnes et les vecteurs-lignes seront rapportés à la même base d'un espace vectoriel de dimension n.

173. ***Représentation d'une application linéaire par une matrice.*** — 1° Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps K, et f une application linéaire de E dans F. Nous choisissons dans E une base $\mathfrak{U} = \left\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \right\}$ et, dans F, une base $\mathfrak{V} = \left\{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \right\}$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur de E défini par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ relatives à $\mathfrak{U}$:

$$\vec{X} = x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_n\vec{u}_n. \tag{1}$$

L'application linéaire f lui fait correspondre dans F le vecteur

$$f(\vec{X}) = x_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + x_n f(\vec{u}_n). \tag{2}$$

Ce vecteur est connu dès que sont connus par leurs coordonnées dans $\mathfrak{V}$ les vecteurs $f(\vec{u}_i)$. Posons

$$f(\vec{u}_i) = a_{1i}\vec{v}_1 + \ldots + a_{pi}\vec{v}_p.$$

$$f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ji}\vec{v}_j \right)$$

ou, en groupant les divers scalaires qui multiplient les vecteurs $\vec{v}_j$

$$f(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \right) \vec{v}_j \tag{3}$$

On simplifie l'obtention de la formule (3) en rangeant dans une matrice $A(p, n)$ les coordonnées des vecteurs $f(\vec{u}_i)$ dans la base $\mathfrak{V}$ de F :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & \dots & f(\vec{u}_i) & \dots & f(\vec{u}_n) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_p \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1i} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2i} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdot & a_{ji} & \cdot & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & a_{pi} & \cdot & a_{pn} \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{A}$$

La i-ième colonne de A est formée des coordonnées, dans la base $\mathfrak{V}$ de F, du vecteur $f(\vec{u}_i)$. Nous avons rappelé, au-dessus de chaque colonne de A, le vecteur associé; à gauche de chaque ligne, nous avons rappelé le vecteur de la base $\mathfrak{V}$ auquel cette ligne était relative.

Les expressions des coordonnées $y_1, \dots y_j, \dots y_p$ de $f(\vec{X})$ dans la base $\mathfrak{V}$ s'obtiennent en remplaçant dans (2) chacun des vecteurs successivement par sa coordonnée de numéro 1, ... j, ... p; on trouve ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

L'écriture préalable de la matrice A permet de les reconstituer rapidement; les éléments a_{ji} de K figurent rangés de la même façon, dans la matrice A et dans les formules (4). On retrouve les formules (4) en multipliant les éléments de chaque ligne de A successivement par $x_1, x_2, \dots, x_n$ et en faisant la somme des résultats obtenus.

2° **Notation matricielle d'une application linéaire.** — Nous allons voir une convention qui permet d'obtenir les formules (4) par un mécanisme simple.

Nous ferons correspondre aux symboles $\vec{Y}$, f, $\vec{X}$ qui figurent dans la formule $\vec{Y} = f(\vec{X})$, des symboles matriciels pris dans le même ordre :

à $\vec{Y}$ correspond $\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{bmatrix}$; à f correspond A, à $\vec{X}$ correspond $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$

Nous écrirons : $$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} \qquad (5)$$

en convenant que le second membre représente la matrice unicolonne $(p, 1)$

dont le j-ième élément (c'est-à-dire y_j)est la somme des produits des éléments de la j-ième ligne de A par les éléments de même rang de la matrice unicolonne X.

En abrégé, nous avons multiplié « ligne par colonne, dans l'ordre de l'écriture ». Cela sera généralisé au n° 178.

La matrice A associée à l'application linéaire f, et qui permet de déterminer cette application, quand on a choisi une base $\mathfrak{U}$ dans E et une base $\mathfrak{V}$ dans F, est dite matrice de f; on peut la noter M(f).

3° **Application linéaire associée à une matrice donnée.** — Donnons-nous arbitrairement une matrice A(p, n) dont les éléments appartiennent au corps K. Considérons un espace vectoriel E de dimension n, sur le corps K, et choisissons dans E une base $\mathfrak{U}$; considérons de même un espace vectoriel F de dimension p, sur le corps K, et choisissons dans F une base $\mathfrak{V}$.

La colonne de rang i, dans A, définit par ses coordonnées dans $\mathfrak{V}$ un vecteur $\vec{l}_i$ de F. Au vecteur $\vec{X}$ de E donné par ses coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathfrak{U}$, associons le vecteur

$$\vec{Y} = \vec{l}_1 x_1 + \vec{l}_2 x_2 + \ldots + \vec{l}_n x_n.$$

L'application f ainsi définie de E dans F est linéaire (162).

Au vecteur $\vec{u}_i$ de la base (toutes ses coordonnées sont nulles, sauf la i^e, égale à 1) correspond le vecteur $\vec{l}_i$, en sorte que $f(\vec{u}_i) = \vec{l}_i$.

A toute matrice (p, n) est associée une application linéaire de E (rapporté à la base $\mathfrak{U}$) dans F (rapporté à la base $\mathfrak{V}$).

REMARQUE. — La donnée des p relations (4) où les coordonnées $y_1, \ldots y_p$ de $\vec{Y}(\in F)$ sont des polynômes homogènes du premier degré des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de $\vec{X}(\in E)$, revient à la donnée de la matrice A, donc à celle d'une application linéaire de E dans F.

4° **Correspondance entre applications linéaires et matrices.** — En résumé, des bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ étant choisies respectivement dans les espaces vectoriels E et F, il existe une bijection, φ, de l'ensemble $\mathfrak{L}$ (E, F) des applications linéaires de E dans F, sur l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices (p, n) sur K. En particulier φ associe à l'application o (164, 2°, c) la matrice nulle (p, n).

5° **Application identique et matrice unité.** — L'application identique de E dans E est linéaire; elle se traduit par les formules

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

et la matrice associée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice carrée (n, n) dont les éléments sont tels que

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \delta_{ii} = 1. \end{cases} \qquad \text{(notation de Kronecker)}$$

On dit que c'est la matrice unité d'ordre n; on la note I_n; on supprimera l'indice lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le nombre des rangées.

174. ***Exemples de matrices représentatives d'applications linéaires.*** — Les exemples donnés dans ce paragraphe s'adressent aux lecteurs qui suivent les programmes A1 et A2; les lecteurs qui suivent le programme A'2 trouveront au tome III (particulièrement au chapitre X) des exemples analogues, mais adaptés à leur axiomatique.

Nous considérons l'espace de la géométrie élémentaire comme un modèle d'espace affine; nous appelons M le point générique. Ayant choisi un point arbitraire O, nous considérons l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des vecteurs $\overrightarrow{OM}$; un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est formé par l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ lorsque M appartient à un plan II contenant O.

Nous pourrons désigner par une seule lettre, soit $\vec{V}$, un vecteur d'origine O. A tout vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ on peut associer son extrémité M, à toute transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ transformant M en $M' = \mathcal{T}(M)$, on peut donc associer une application f de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ en lui-même, et inversement.

On dit que la transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ est linéaire si on peut trouver un point O tel que l'application associée f soit linéaire, c'est-à-dire si les critères de linéarité

$$f\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) = f\left(\overrightarrow{OM_1}\right) + f\left(\overrightarrow{OM_2}\right)$$
$$f\left(\lambda \overrightarrow{OM}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

sont vérifiés pour un choix convenable de O, quels que soient les points M, M_1, M_2, et quel que soit le nombre réel λ.

Comme $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ (**161**, 3°), la transformation linéaire $\mathcal{T}$ transforme O en O, autrement dit O est un point invariant de la transformation $\mathcal{T}$: pour qu'une transformation ponctuelle soit linéaire, il faut qu'elle admette au moins un point invariant; c'est ainsi que la translation n'est pas une transformation ponctuelle linéaire.

Nous rapportons l'espace à un repère cartésien $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ et nous supposerons que le plan II est le plan rapporté au repère $\left\{ O, \vec{i}, \vec{j} \right\}$. Dans les questions métriques, le repère est orthonormé.

Les composantes scalaires de $\vec{V}$ sont aussi les coordonnées de l'extrémité M du représentant $\overrightarrow{OM}$.

EXEMPLE I. — *Projection orthogonale sur le plan xOy.* — Soit $\vec{V'} = \overrightarrow{OM'}$ la projection orthogonale de $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sur le plan xOy.

En considérant $\vec{V'}$ comme faisant partie de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, nous avons montré (162) que cette construction réalisait une application linéaire f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; par suite

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = \vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{0} \end{cases}$$

d'où la matrice associée

$$\begin{array}{c|ccc} & f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 0 \end{array} = A$$

et les formules

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

En considérant $\vec{V'}$ comme appartenant à l'espace vectoriel $\mathfrak{F}$, et prenant les coordonnées de $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{k})$ dans la repère $\vec{i}$, $\vec{j}$, de $\mathfrak{F}$, on obtient la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifiera que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

EXEMPLE II. — *Homothétie.* — Nous avons vu également au n° 162 que l'homothétie est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

La définition $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ donne immédiatement les formules

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$$

d'où la matrice représentative

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

EXEMPLE III. — *Rotation dans le plan* II *autour de* O. — La rotation R de centre O, d'angle θ, dans II, est une transformation linéaire dans l'ensemble $\mathfrak{F}$, car elle satisfait aux deux critères de linéarité.

$R(\vec{i})$ et $R(\vec{j})$ sont respectivement les vecteurs unitaires dans les directions orientées d'angles polaires θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$, par suite

$$\begin{cases} R(\vec{i}) = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta \\ R(\vec{j}) = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta. \end{cases}$$

La matrice de la transformation est

$$\begin{array}{c|cc} & R(\vec{i}) & R(\vec{j}) \\ \hline \vec{i} & \cos\theta & -\sin\theta \\ \vec{j} & \sin\theta & \cos\theta \end{array} = \mathcal{R}$$

Le transformé $M'(x', y')$ de $M(x, y)$ par R est donné par

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{R} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

soit encore

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

Rotation autour de l'axe Oz. — L'étude précédente permet d'obtenir la matrice de la rotation d'angle θ autour de l'axe Oz, dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, puisque le vecteur $\vec{k}$ sur Oz est transformé en lui-même

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLE IV. — *Symétrie par rapport à une droite* $O\Delta$, *dans* Π. — Soit Δ la droite issue de O, d'angle polaire α, dans le plan Π :

$$(Ox, \Delta) = \alpha \qquad [\pi].$$

La symétrie S par rapport à $O\Delta$, dans Π, est une transformation linéaire dans l'ensemble $\mathfrak{L}$. $S(\vec{i})$ et $S(\vec{j})$ sont respectivement les vecteurs unitaires dans les directions orientées d'angles polaires 2α et $2\alpha - \frac{\pi}{2}$, par suite

$$\begin{cases} S(\vec{i}) = \vec{i}\cos 2\alpha + \vec{j}\sin 2\alpha \\ S(\vec{j}) = \vec{i}\sin 2\alpha - \vec{j}\cos 2\alpha. \end{cases}$$

La matrice de la transformation est

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} S(\vec{i}) & S(\vec{j}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \mathcal{S} \end{array}$$

Le transformé M′ de M par S est donné par

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{S} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

soit encore

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha. \end{cases}$$

EXEMPLE V. — *Rotation de* $\frac{2\pi}{3}$ *autour de la droite* $\Delta(x = y = z)$. — On sait qu'une diagonale d'un cube est un axe de répétition d'ordre 3 pour cette figure. Il en résulte qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de la droite $\Delta(x = y = z)$ convenablement orientée effectue une substitution circulaire sur les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ du repère unitaire orthogonal. Cette rotation f est une transformation linéaire :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} \\ f(\vec{j}) = \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{i} \end{cases} \qquad \text{d'où la matrice} \qquad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

associée à la transformation f; $\mathcal{A}$ est une matrice-substitution (cf. n° 224).

II. OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

175. ***Introduction.*** — *a*) Nous nous proposons de munir d'une structure d'espace vectoriel l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices (p, n) sur le corps commutatif K.

Nous nous appuierons sur le fait que, une fois effectué le quadruple choix de deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et p, sur le corps K, d'une base $\mathfrak{U}$ de E et d'une base $\mathfrak{V}$ de F, nous avons su définir (173, 4°) une bijection, φ, de l'ensemble $\mathfrak{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F sur l'ensemble $\mathfrak{M}$.

Étant donné que nous disposons sur $\mathfrak{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel (164), la bijection φ permet de *transporter* cette structure sur $\mathfrak{M}$, ainsi que cela a été expliqué au n° 23, 4°. Nous vérifierons que les définitions des opérations sur $\mathfrak{M}$ ainsi introduites sont indépendantes du quadruple choix de E, F, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ (ce qui aurait permis de poser ces définitions *a priori*). Cela tient à ce que, si on remplace E, F, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ par E', F', $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur E' (resp. de F sur F') qui transforme $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{U}'$ (resp. $\mathfrak{V}$ en $\mathfrak{V}'$), ainsi que nous l'avons montré au n° 170.

b) Nous nous donnons deux matrices (p, n), A et B, déterminées par

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}] \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Nous les considérons comme les matrices de deux applications linéaires, f et g, de l'espace vectoriel E (dim E = n) dans l'espace vectoriel F (dim F = p), ces deux espaces vectoriels étant rapportés respectivement aux bases

$$\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}.$$

Avec la notation du *a*), A = $\varphi(f)$, B = $\varphi(g)$.

176. *Somme de deux matrices.* — La matrice de l'application linéaire $f + g$ a pour colonne de rang j les coordonnées du vecteur $f(\vec{u}_j) + g(\vec{u}_j)$, c'est-à-dire les éléments $a_{ij} + b_{ij}$, pour $i = 1, 2, \ldots p$.

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION. — **On appelle somme des matrices A et B, de mêmes dimensions p et n, et on note A + B, la matrice obtenue en faisant la somme des éléments correspondants de mêmes indices :**

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]. \tag{1}$$

Dans ces conditions : la matrice de l'application $f + g$ est la somme des matrices de f et de g.

Autrement dit : $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

La bijection φ est ainsi un isomorphisme de $\mathfrak{L}(E, F)$ sur $\mathfrak{M}$, chacun des ensembles étant muni de son addition. Il en résulte que l'addition sur $\mathfrak{M}$ est une loi de groupe abélien, ce qu'il est aisé de retrouver directement, à partir de (1).

En particulier, opp A = $[-a_{ij}]$, que l'on note — A.

177. *Produit d'une matrice par un scalaire.* — La matrice de l'application linéaire λf, ($\lambda \in K$) a pour colonne de rang j les coordonnées du vecteur $\lambda f(\vec{u_j})$, c'est-à-dire les éléments $\lambda a_{ij} (i = 1, 2, \ldots p)$. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION. — **On appelle produit de la matrice A par le scalaire λ, et on note λA ou $A\lambda$, la matrice obtenue en multipliant par le scalaire λ tous les éléments de A :**

$$\lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]. \tag{1}$$

Dans ces conditions, la matrice de l'application λf est le produit par λ de la matrice de f.

Autrement dit, $\varphi(\lambda f) = \lambda \varphi(f)$.

La bijection φ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}(E, F)$ sur $\mathfrak{M}$, chacun de ces ensembles étant muni de son addition et sa multiplication externe. Il en résulte que $\mathfrak{M}$ possède une structure d'espace vectoriel sur K, ce qu'il est aisé de retrouver à partir des formules (1) des nos **176** et **177**.

CONSÉQUENCE. — Désignons par H_{ij} la matrice (p, n) dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui correspond à la ligne i et à la colonne j, cet élément étant l'élément 1 du corps K. En utilisant les définitions des nos **176** et **177**, nous obtenons

$$A = [a_{ij}] \iff A = \sum_{i,j} a_{ij} H_{ij}. \tag{2}$$

Le système des pn matrices $\{ H_{ij} \}$ est donc un système générateur de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$. Ce système est libre; en effet, d'après (2),

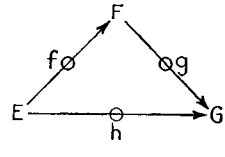
$$\sum_{i,j} a_{ij} H_{ij} = [0] \implies A = [0] \implies (\forall i, \forall j) \quad a_{ij} = 0.$$

$\{ H_{ij} \}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ qui a ainsi pour dimension pn. Par isomorphisme (**170**, 2°). il en résulte que l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(E, F)$, a, lui aussl, pour dimension pn.

178. *Produit d'une matrice par une matrice.* — 1° Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps K, de dimensions respectives n, p, q. Nous les rapportons aux bases

$$\mathfrak{u}(\vec{u_k}) \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad \mathfrak{v}(\vec{v_j}) \quad j = 1, 2, \ldots, p \qquad \mathfrak{w}(\vec{w_i}) \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

Considérons une application linéaire f de E dans F, une application linéaire g de F dans G; nous savons que l'application composée $g \circ f = h$ est aussi linéaire



$h = g \circ f$.

Cherchons la matrice C de h, connaissant les matrices A(p, n) de f et B(q, p) de g :

$$\begin{array}{ll} B = [b_{ij}] & A = [a_{jk}] \\ i = 1, 2, \ldots q & j = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, p & k = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Nous écrivons B à gauche pour respecter l'ordre suivi dans la notation $g \circ f$.

La colonne de rang k de la matrice C est formée des coordonnées dans la base $\mathfrak{W}$ du vecteur $h\left(\vec{u}_k\right)$, c'est-à-dire $g\left[f\left(\vec{u}_k\right)\right]$.

$f\left(\vec{u}_k\right)$ est le vecteur de F dont les coordonnées dans $\mathfrak{V}$ sont les éléments de la colonne de rang k dans la matrice A :

$$f\left(\vec{u}_k\right) = \vec{v}_1\, a_{1k} + \vec{v}_2\, a_{2k} + \ldots + \vec{v}_p\, a_{pk}.$$

L'application g étant linéaire

$$g\left[f\left(\vec{u}_k\right)\right] = g\left(\vec{v}_1\right) a_{1k} + g\left(\vec{v}_2\right) a_{2k} + \ldots + g\left(\vec{v}_p\right) a_{pk}.$$

Or $g\left(\vec{v}_j\right)$ est le vecteur de G dont les coordonnées dans $\mathfrak{W}$ sont les éléments de la colonne de rang j dans la matrice B :

$$g\left(\vec{v}_j\right) = \vec{w}_1\, b_{1j} + \vec{w}_2\, b_{2j} + \ldots \vec{w}_q\, b_{qj}.$$

Finalement :

$$gf\left[\left(\vec{u}_k\right)\right] = \sum_{j=1}^{p} g\left(\vec{v}_j\right) a_{jk} = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{q} \vec{w}_i\, b_{ij} \right) a_{jk}.$$

L'élément placé à la ligne i et à la colonne k dans C, soit c_{ik}, est le coefficient de $\vec{w}_i$ dans la double sommation précédente, c'est donc

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} a_{jk}$$

$$c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + \ldots + b_{ip}a_{pk}.$$

$$i = 1, 2, \ldots, q \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION. — **Étant donné les matrices** A **et** B, **le produit de** B **par** A **à droite** (ou de A par B à gauche) **est la matrice** C **dont l'élément général est donné par la formule**

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} a_{jk}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, q \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

et on note $\quad C = B \times A \quad$ ou $\quad C = BA.$

Dans ces conditions la matrice de l'application $g \circ f$ est la matrice B $\times$ A, produit, dans l'ordre de l'écriture, des matrices des applications g et f.

2° **Observations diverses sur le produit d'une matrice par une autre.** — *a*) Le produit BA n'existe que si le nombre de colonnes de B est égal au nombre des lignes de A. En notant les dimensions des matrices, on écrit

$$\underset{(q,\ p)}{B} \times \underset{(p,\ n)}{A} = \underset{(q,\ n)}{C}$$

Ce nombre p est la dimension de l'ensemble vectoriel intermédiaire F, ensemble d'arrivée pour l'application f, ensemble de départ pour l'application g.

b) De même que dans la notation $g \circ f$ la première application est notée à droite, dans le produit B × A, la première matrice est notée à droite.

Pour éviter toute confusion, on conseille d'énoncer la matrice BA en énonçant *d'abord* la matrice A de la première transformation, *puis* la matrice B de la seconde transformation, et en précisant que B est à gauche de A : BA produit de A par B, à gauche.

c) La règle de formation de l'élément c_{ik} de la matrice produit peut s'expliciter ainsi :

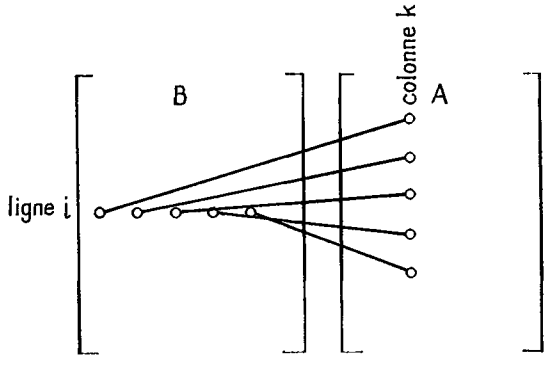


FIG. 34.

Chaque ligne (de rang *i*) de la matrice de gauche est associée à chaque colonne (de rang *k*) de la matrice de droite : la somme des produits respectifs de leurs éléments de même rang fournit l'élément c_{ik} de la matrice C

En abrégé le produit de deux matrices s'effectue « **ligne par colonne dans l'ordre de l'écriture** » (fig. 34).

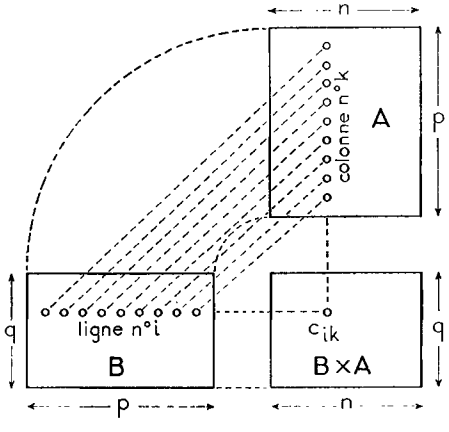


FIG. 35.

On dit parfois que c_{ik} est le « produit symbolique » de la i-ième ligne de B par la k-ième colonne de A.

On peut aussi faire le schéma ci-contre (fig. 35), où l'on a déplacé vers le haut la matrice A, et où l'on peut marquer c_{ik} à l'intersection de la i-ième ligne de B et de la k-ième colonne de A.

d) L'expression *produit matriciel* s'applique au produit d'une matrice par une autre.

179. *Propriétés du produit matriciel.* — 1° **Le produit matriciel n'est pas commutatif.** — Cette propriété résulte de ce que le produit de deux applications linéaires n'est pas commutatif.

D'ailleurs le produit BA n'est possible que si dans le schéma des dimensions

$$(q,\ p) \times (p,\ n)$$

le même nombre p figure comme intermédiaire.

Le produit AB, de schéma $(p, n) \times (q, p)$ n'est possible que si $n = q$.

En outre, en supposant $n = q$,

BA, de schéma $(n, p) \times (p, n)$ est une matrice (n, n)

AB, de schéma $(p, n) \times (n, p)$ est une matrice (p, p).

Ce n'est que si A et B sont des matrices carrées (n, n) qu'il pourra arriver que le produit de deux matrices particulières soit commutatif (voir ex. n° 4, 14 et 15, à la fin du chapitre).

EXEMPLE. — Posons $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Sigma a\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le dernier exemple montre que le produit de deux matrices dont aucune n'est nulle peut néanmoins être une matrice nulle.

2° **Le produit matriciel est associatif.** — Cette propriété résulte de ce que la composition des applications linéaires est associative.

Soit les matrices $\begin{cases} \mathrm{A}(p, n) \\ \mathrm{B}(q, p) \\ \mathrm{C}(r, q) \end{cases}$ associées aux applications linéaires $\begin{cases} f \\ g \\ h \end{cases}$

On sait que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

c'est donc que $\mathrm{C} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{A}) = (\mathrm{C} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{A}$.

On pourra écrire l'un ou l'autre des deux membres sous la forme C × B × A, ou CBA; le résultat est une matrice (r, n).

La vérification directe de cette importante propriété résulte des calculs suivants :

$$\mathrm{BA} = \left[\sum_j b_{ij} a_{jk}\right]$$

C(BA) a pour terme général $\sum_i c_{mi} \left(\sum_j b_{ij} a_{jk}\right)$

$$\mathrm{CB} = \left[\sum_i c_{mi} b_{ij}\right]$$

(CB)A a pour terme général $\sum_j \left(\sum_i c_{mi} b_{ij}\right) a_{jk}$.

Dans les deux cas le terme général est donné par

$$p_{mk} = \sum_i \sum_j c_{mi} b_{ij} a_{jk}.$$

3° **Le produit matriciel est distributif à gauche, et à droite, pour l'addition des matrices.** — Cette propriété résulte de la propriété analogue des applications linéaires :

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A \quad \text{car} \quad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$
$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2 \quad \text{car} \quad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2.$$

4° **Application aux matrices d'un seul élément.** — Considérons les matrices à une ligne et une colonne; elles ne comprennent qu'un seul élément a du corps K, soit $[a]$. Il y a correspondance biunivoque entre ces matrices et les éléments de K, et les opérations d'addition et de multiplication des matrices, définies précédemment, réalisent un isomorphisme avec K, pour les opérations de même nom.

Dans certaines questions, on pourra confondre $[a]$ et a.

180. ***Cas particuliers et exemples de produits matriciels.*** — 1° Soit f une application linéaire de E dans F, $A(p, n)$ la matrice représentative; si e_n est l'application identique de E dans E, dont la matrice représentative est I_n (n° 173, 5°), à l'expression $f \circ e_n = f$ correspond la relation matricielle $AI_n = A$.

De même si e_p est l'application identique de F dans F, à l'expression $e_p \circ f = f$ correspond la relation matricielle $I_pA = A$.

2° Soit f une application linéaire de E dans E; on peut la réitérer; l'application $f \circ f$ est associée à la matrice AA.

On convient de noter $AA = A^2$, et on généralise par récurrence

$$AA^2 = A^3, \quad \ldots \quad AA^{n-1} = A^n.$$

3° **Exemples de produits matriciels d'origine géométrique.** — I. Si l'on compose deux rotations de centre O, d'angles θ et θ', la transformation produit est la rotation de même centre, d'angle $\theta + \theta'$; on vérifiera que si $\mathcal{R}_\theta$ est la matrice de rotation étudiée au n° 174,

$$\mathcal{R}_{\theta'} \times \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta+\theta'},$$

le produit qui figure au premier membre est commutatif.

II. Si l'on compose les symétries autour des droites OΔ et OΔ′, la transformation produit est la rotation de centre O, d'angle $2(O\Delta, O\Delta')$; on vérifiera que si $\mathcal{S}_\alpha$ est la matrice de symétrie étudiée au n° 174,

$$\mathcal{S}_\beta \times \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{2(\beta-\alpha)};$$

le produit qui figure au premier membre n'est pas commutatif.

En particulier $(\mathcal{S}_\alpha)^2$ donne la matrice unité d'ordre 2 : c'est que la symétrie par rapport à OΔ étant une transformation réciproque, sa réitération donne la transformation identique.

III. Réitérons la rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $\Delta(x = y = z)$, étudiée au n° 174.

Posons $g = f \circ f$

$$\begin{cases} g(\vec{i}) = \vec{k} \\ g(\vec{j}) = \vec{i} \\ g(\vec{k}) = \vec{j} \end{cases}$$

et la matrice de g est $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En se reportant au n° 174, on vérifiera que

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^2.$$

Enfin $f \circ g$ ou $g \circ f$ est la transformation identique, et on vérifiera que

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathrm{I}.$$

4° **Transformé d'un vecteur par une composition d'applications linéaires.** — Reprenons les notations du n° 173, 2°, soit

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$$

la traduction matricielle d'une application linéaire f de E dans F.

Donnons-nous une application linéaire g de F dans G, traduite sous forme matricielle par

$$\mathrm{Z} = \mathrm{BY},$$

B étant une matrice (q, p), et Z la matrice unicolonne $(q, 1)$ des coordonnées du vecteur $\vec{Z}$ image par g de $\vec{Y}$.

$$\mathrm{Z} = \mathrm{B}(\mathrm{AX}).$$

Utiliser alors l'associativité du produit matriciel revient à utiliser le fait, déjà établi, que l'application composée $g \circ f$ a pour matrice BA :

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{BA})\mathrm{X}.$$

La multiplication matricielle donne un moyen mécanique de réaliser la composition des applications linéaires.

181. ***Opérations matricielles et matrices transposées.*** — Soit

$$\mathrm{A} = [a_{jk}] \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{A}} = [a'_{jk}] \quad \text{avec} \quad a'_{jk} = a_{kj}$$
$$\mathrm{B} = [b_{jk}] \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{B}} = [b'_{jk}] \quad \text{avec} \quad b'_{jk} = b_{kj}.$$

1° Supposons A et B de mêmes dimensions (p, n);

posons $s_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$ $\quad \mathrm{A} + \mathrm{B} = [s_{jk}]$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = [s'_{jk}] \quad \text{avec} \quad s'_{jk} = s_{kj} = a_{kj} + b_{kj} = a'_{jk} + b'_{jk}.$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{tr}\,\mathrm{A} + \mathrm{tr}\,\mathrm{B}.$$

2° Considérons le produit $\mathrm{P} = \underset{(q,\,p)}{\mathrm{B}} \times \underset{(p,\,n)}{\mathrm{A}}$

$$\mathrm{P} = [p_{ik}] \quad \text{avec} \quad p_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$$
$$\widetilde{\mathrm{P}} = [p'_{ik}] \quad \text{avec} \quad p'_{ik} = p_{ki} = \sum_j b_{kj} a_{ji}$$
$$p'_{ik} = \sum_j a'_{ij} b'_{jk}$$

et par suite

$$\widetilde{\mathrm{P}} = \widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}.$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{BA}) = (\mathrm{tr}\,\mathrm{A}) \times (\mathrm{tr}\,\mathrm{B}).$$

Pour obtenir la matrice transposée de BA, *on multiplie, en ordre inverse, les matrices transposées* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *et* $\widetilde{\mathrm{B}}$.

APPLICATION. — Nous avons représenté sous la forme $Y = AX$ une application linéaire en utilisant les matrices unicolonnes des coordonnées des vecteurs sujet et image. Si l'on avait utilisé des matrices unilignes pour représenter ces coordonnées, on aurait obtenu, en formant les matrices transposées dans les deux membres de l'égalité précédente :

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{A}.$$

182. ***Matrices carrées particulières.*** — 1° Dans une matrice carrée $\mathcal{M}(n, n)$ les éléments a_{ii} pour lesquels la ligne et la colonne ont le même numéro constituent ce qu'on appelle la *diagonale principale* de $\mathcal{M}$.

2° **Matrice triangulaire.** — Une matrice $\mathcal{M}(n, n)$ est dite *triangulaire* si les éléments situés d'un côté de la diagonale principale sont nuls.

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} \text{ est une matrice triangulaire.}$$

$\mathcal{M} = [m_{ij}]$ est dite triangulaire inférieure si $m_{ij} = 0$ dès que $i < j$.

triangulaire supérieure si $m_{ij} = 0$ dès que $i > j$.

La transposée d'une matrice triangulaire est encore une matrice triangulaire.

3° **Matrice symétrique.** — Une matrice $\mathcal{M}(n, n)$ est dite *symétrique* si

$$m_{ij} = m_{ji} \qquad \forall\, i,j.$$

Les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \text{ est une matrice symétrique.}$$

Une matrice symétrique est égale à sa transposée, et réciproquement :

$$\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} \iff \mathcal{M} \text{ est symétrique.}$$

4° **Matrice antisymétrique.** — Une matrice $\mathcal{M}(n, n)$ est dite *antisymétrique* si :

a) les éléments de la diagonale principale sont nuls;

b) les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont opposés.

Ces deux conditions sont résumées par

$$m_{ij} + m_{ji} = 0 \qquad \forall i, j.$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \text{ est une matrice antisymétrique.}$$

Une matrice antisymétrique est l'opposée de sa transposée, et réciproquement :

$$\mathfrak{M} = -\tilde{\mathfrak{M}} \iff \mathfrak{M} \text{ est antisymétrique.}$$

5° **Matrice diagonale.** — Une matrice $\mathfrak{M}$ (n, n) est dite *diagonale* si les éléments non situés sur la diagonale principale sont nuls.

En d'autres termes $a_{ij} = 0$, dès que $i \neq j$. Une matrice diagonale est à la fois triangulaire et symétrique.

Une matrice diagonale peut se noter

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & . & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ et, en abrégé } [\alpha_{ii}].$$

La multiplication de la matrice carrée (n, n) $\mathfrak{M} = [m_{ij}]$ par la matrice diagonale $[\alpha_{ii}]$ à gauche revient à la multiplication par α_{ii} des éléments de la i-ième ligne de $\mathfrak{M}$, i variant de 1 à n :

$$[\alpha_{ii}] \times [m_{ij}] = [\alpha_{ii} m_{ij}]$$

De même la multiplication de $\mathfrak{M}$ par $[\alpha_{ii}]$ à droite revient à la multiplication par α_{jj} des éléments de la j-ième colonne de $\mathfrak{M}$, j variant de 1 à n :

$$[m_{ij}] \times [\alpha_{jj}] = [m_{ij} \alpha_{jj}].$$

En particulier le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, et ce produit est commutatif :

$$[\alpha_{ii}] \times [\beta_{ii}] = [\alpha_{ii} \beta_{ii}].$$

On sait donc aisément calculer la puissance n^e d'une matrice diagonale :

$$[\alpha_{ii}]^n = [\alpha_{ii}^n].$$

6° *Toute matrice carrée est, et d'une seule façon, la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

a) Analyse. — Soit $\mathfrak{M}$ (n, n) une matrice quelconque sur le corps K; supposons que

$$\mathfrak{M} = S + A,$$

S étant une matrice symétrique, et A une matrice antisymétrique.

D'après les résultats du n° 181, et ceux du 3° et du 4°

$$\tilde{\mathfrak{M}} = S - A$$

par suite

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(\mathfrak{M} + \tilde{\mathfrak{M}}) \\ A = \frac{1}{2}(\mathfrak{M} - \tilde{\mathfrak{M}}). \end{cases}$$

b) *Synthèse.* — On vérifie immédiatement que les matrices précédentes sont, S, symétrique, A, antisymétrique, et $\mathfrak{M}$ est leur somme.

183. ***Application des produits de matrices aux combinaisons linéaires de vecteurs.*** — Tous les vecteurs dont il sera question dans cette étude appartiennent à un même espace vectoriel E sur le corps K.

1° Représentation par une matrice d'un système de combinaisons linéaires des vecteurs d'un syetème donné

$$\mathcal{S} = \{ \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p \}.$$

Soit
$$\begin{cases} \vec{Y}_i = \vec{X}_1 . a_{1i} + \vec{X}_2 . a_{2i} + \ldots + \vec{X}_p . a_{pi} \\ i = 1, 2, \ldots, q \end{cases}$$

q combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{X}_j$. Mettons dans une matrice A les éléments a_{ji} du corps K de façon que dans la i^e colonne figurent les coefficients relatifs au vecteur $\vec{Y}_i$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & \vec{Y}_1 & \ldots & \vec{Y}_i & \ldots & \vec{Y}_q & \\ \hline \vec{X}_1 & a_{11} & . & a_{1i} & . & a_{1q} & \\ \vec{X}_2 & a_{21} & . & a_{2i} & . & a_{2q} & \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & = \mathrm{A} \\ \vec{X}_j & . & . & a_{ji} & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ \vec{X}_p & a_{p1} & . & a_{pi} & . & a_{pq} & \end{array}$$

Cette notation ne fait que généraliser celle du n° 172, 2°; la matrice $\mathfrak{M}$ introduite alors était celle des coefficients scalaires qui permettent d'exprimer les vecteurs $\vec{X}_i$ sous forme de combinaisons linéaires des vecteurs de la base, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Nous écrirons en abrégé, pour rappeler qu'il s'agit de combinaisons linéaires des vecteurs du système $\mathcal{S}$,

$$\mathrm{A} = \left[\vec{Y}_1 \ \ldots \ \vec{Y}_i \ \ldots \ \vec{Y}_q \right]_{\mathcal{S}}$$

étant bien entendu que $\vec{Y}_i$ représente dans cette notation la colonne des coefficients de $\vec{Y}_i$, combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$.

2° Étude d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_q$. Soit $\vec{Z} = \vec{Y}_1 \, b_1 + \vec{Y}_2 \, b_2 + \ldots + \vec{Y}_q \, b_q$ une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{Y}_i$; $\vec{Z}$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs du système $\mathcal{S}$.

Cherchons la loi de formation des coefficients des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p$, qui permettent d'obtenir $\vec{Z}$.

$$\vec{Z} = \sum_i \vec{Y}_i \, b_i = \sum_i \left(\sum_j \vec{X}_j \, a_{ji} \right) b_i \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots q \\ j = 1, 2, \ldots p. \end{cases}$$

$$\vec{Z} = \sum_j \vec{X}_j \left(\sum_i a_{ji} b_i \right)$$

de sorte que si l'on pose

$$\vec{Z} = \vec{X}_1 \, c_1 + \ldots + \vec{X}_p \, c_p$$

$$\begin{cases} c_1 = a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots + a_{1q} b_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_j = a_{j1} b_1 + a_{j2} b_2 + \ldots + a_{jq} b_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_p = a_{p1} b_1 + a_{p2} b_2 + \ldots + a_{pq} b_q. \end{cases}$$

Les formules précédentes peuvent se condenser sous la forme d'un produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & a_{pq} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_q \end{bmatrix}$$

$(p, 1) \qquad (p, q) \qquad (q, 1).$

Les matrices unicolonnes des coefficients des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{X}_i$ et $\vec{Y}_j$ qui permettent d'obtenir le vecteur $\vec{Z}$ sont donc liées par

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p \end{bmatrix} = \left[\vec{Y}_1 \; \vec{Y}_2 \; \ldots \; \vec{Y}_q \right]_{\mathcal{G}} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_q \end{bmatrix}$$

Notons la correspondance biunivoque

$$(1) \quad \vec{Y}_1 \, b_1 + \vec{Y}_2 \, b_2 + \ldots + \vec{Y}_q \, b_q \longleftrightarrow \left[\vec{Y}_1 \; \vec{Y}_2 \; \ldots \; \vec{Y}_q \right]_{\mathcal{G}} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_q \end{bmatrix} \quad (2)$$

On remarque que l'expression (2), qui est un produit matriciel, peut redonner l'expression (1) du vecteur $\vec{Z}$ si l'on multiplie, dans (2), la ligne par la colonne, dans l'ordre de l'écriture, comme pour un produit matriciel.

3° **Étude d'un système de combinaisons linéaires des vecteurs** $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_q$. — Considérons r combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_q$.

$$\begin{array}{c|c} & \vec{Z}_1 \quad \vec{Z}_2 \quad \dots \quad \vec{Z}_r \\ \hline \vec{Y}_1 & \\ \vec{Y}_2 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \vec{Y}_q & \end{array} \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdot & b_{qr} \end{array}\right] = \mathrm{B}$$

Soit d'autre part la matrice C des coefficients des vecteurs $\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_r$, combinaisons linéaires des vecteurs du système $\mathcal{S}$:

$$\begin{array}{c|c} & \vec{Z}_1 \quad \vec{Z}_2 \quad \dots \quad \vec{Z}_r \\ \hline \vec{X}_1 & \\ \vec{X}_2 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \vec{X}_p & \end{array} \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdot & c_{pr} \end{array}\right] = \mathrm{C} \qquad \mathrm{C} = \left[\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 \dots \vec{Z}_r\right]_{\mathcal{S}}$$

La i-ième colonne de C s'obtient, d'après le 2°, par le produit matriciel

$$\left[\vec{Y}_1 \vec{Y}_2 \dots \vec{Y}_q\right]_{\mathcal{S}} \times \left[\begin{array}{c} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{qi} \end{array}\right]$$

En définitive, si les vecteurs $\vec{Z}_i$ sont les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{Y}_j$ définies par la matrice

$$\begin{array}{c|c} & \vec{Z}_i \\ \hline \vec{Y}_j & \end{array} [b_{ji}] = \mathrm{B}$$

$$\left[\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 \dots \vec{Z}_r\right]_{\mathcal{S}} = \left[\vec{Y}_1 \vec{Y}_2 \dots \vec{Y}_q\right]_{\mathcal{S}} \times \mathrm{B}, \qquad (3)$$

ou encore

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{C} & = & \mathrm{A} & \times & \mathrm{B} \\ (p, r) & & (p, q) & & (q, r) \end{array}$$

les matrices C et A étant celles des coefficients des combinaisons linéaires des vecteurs du système $\mathcal{S}$ qui permettent d'obtenir les vecteurs $\vec{Z}_k$ et $\vec{Y}_j$.

Comme précédemment, l'égalité (3) qui donne les coefficients des vecteur $\vec{Z}_k$, combinaisons linéaires des vecteurs $\mathcal{S}$, en fonction des coefficients des vecteurs $\vec{Y}_i$, combinaisons linéaires de $\mathcal{S}$, peut aussi s'interpréter comme redonnant les combinaisons linéaires initiales en multipliant au second mem-

bre la ligne par les diverses colonnes de B, dans l'ordre de l'écriture

$$\vec{Z}_k = \vec{Y}_1\, b_{1k} + \vec{Y}_2\, b_{2k} + \ldots + \vec{Y}_q\, b_{qk},$$

comme s'il s'agissait d'un produit matriciel.

4° **Applications.** — Si les vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p$ sont ceux qui ont été introduits au n° 172, 2°, par leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{U}$ de E,

$$\vec{u}_j \left| \begin{matrix} \vec{X}_i \\ [x_{ji}] \end{matrix} \right. = \mathfrak{X} \qquad \mathfrak{X} = \left[\vec{X}_1 \ \ldots \ \vec{X}_p\right]_{\mathfrak{U}}$$

on trouvera les coordonnées des vecteurs $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_q$ combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_p$ définies par la matrice A :

$$\vec{X}_j \left| \begin{matrix} \vec{Y}_i \\ [a_{ji}] \end{matrix} \right. = \mathrm{A}$$

en écrivant

$$\left[\vec{Y}_1 \vec{Y}_2 \ \ldots \ \vec{Y}_q\right]_{\mathfrak{U}} = \left[\vec{X}_1 \vec{X}_2 \ \ldots \ \vec{X}_p\right]_{\mathfrak{U}} \times \mathrm{A} \qquad (4)$$

ou encore

$$\underset{(n,\,q)}{\mathfrak{Y}} = \underset{(n,\,p)}{\mathfrak{X}} \times \underset{(p,\,q)}{\mathrm{A}}$$

$\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{X}$ sont les matrices des coordonnées des vecteurs $\vec{Y}_1 \ldots \vec{Y}_q$ et $\vec{X}_1 \ldots \vec{X}_p$ dans la base $\mathfrak{U}$, A est la matrice des coefficients des combinaisons linéaires qui expriment les $\vec{Y}_i$ en fonction des $\vec{X}_j$.

Avec les notations précédentes (3°), on écrira aussi

$$\left[\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 \ \ldots \ \vec{Z}_r\right]_{\mathfrak{U}} = \left[\vec{Y}_1 \vec{Y}_2 \ \ldots \ \vec{Y}_q\right]_{\mathfrak{U}} \times \mathrm{B}$$

ou encore

$$\left[\vec{Z}_1 \vec{Z}_2 \ \ldots \ \vec{Z}_r\right]_{\mathfrak{U}} = \left[\vec{X}_1 \vec{X}_2 \ \ldots \ \vec{X}_p\right]_{\mathfrak{U}} \times (\mathrm{A} \times \mathrm{B}), \qquad (5)$$

en appliquant la règle d'associativité du produit matriciel.

On peut encore dire que l'associativité s'étend aux produits tels que (2) et (3) qui interviennent dans la représentation des combinaisons linéaires de vecteurs.

5° **Emploi des matrices transposées.** — Nous avons dans les études précédentes rangé les vecteurs en ligne et les coefficients scalaires des combinaisons linéaires de vecteurs en colonnes; on pourrait tout aussi bien placer les vecteurs en colonne et les coefficients scalaires des combinaisons linéaires de vecteurs en lignes.

Les égalités (3), (4), (5) deviendront ainsi

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Z}_r \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} = \tilde{B} \times \begin{bmatrix} \vec{Y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Y}_q \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} \qquad \begin{bmatrix} \vec{Y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Y}_q \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} = A \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{X}_p \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Z}_r \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} = (\tilde{B}\,\tilde{A}) \times \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{X}_p \end{bmatrix}_{\mathcal{U}}$$

Si $\mathcal{U}$ est une base de l'espace vectoriel E, les matrices considérées sont celles des coordonnées des vecteurs $\vec{Z}_k$, $\vec{Y}_j$, $\vec{X}_i$ dans cette base écrites en ligne.

EXERCICES

1. — Démontrer que si $\mathcal{A}$ est une matrice quelconque, le produit $\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ existe et est une matrice carrée symétrique.

2. — Calculer $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ sachant que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

3. — Rechercher toutes les matrices carrées A d'ordre deux, à éléments complexes, telles que $A^2 = A$.

4. — *a*) Démontrer que toutes les matrices carrées d'ordre deux qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sont, en général, de la forme $\lambda A + \mu I$ (il y a exception si $A = kI$).

b) En déduire les sous-anneaux commutatifs de l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

5. — Soit C le corps des complexes, et Ω l'ensemble des matrices réelles 2×2 de la forme :

$$\omega = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Démontrer que l'application biunivoque de C dans Ω, définie par

$$a + ib \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme pour l'addition et la multiplication. Que peut-on en déduire pour Ω?

6. — MATRICES DE DIRAC. — On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Former le carré de la matrice $xA + yB + zC + tD$ et en déduire des relations remarquables entre les matrices données.

7*. — PRODUIT DE DEUX MATRICES PAR BLOCS. — On appelle *bloc* toute sous-matrice de A obtenue en considérant les éléments communs à des lignes *consécutives* et à des colonnes *consécutives*.

Par exemple la matrice A (n, p) peut se décomposer en deux blocs en groupant dans une matrice A' les p' premières colonnes, et dans une matrice A'' les p'' autres colonnes $(p' + p'' = p)$; on écrira

$$\underset{(n,\,p)}{\mathrm{A}} = \underset{(n,\,p')}{[\ \mathrm{A}'\ } \quad \underset{(n,\,p'')}{\mathrm{A}''\ ]}.$$

Si l'on a à multiplier A à droite par une matrice B (p, q), on pourra décomposer B en deux blocs en groupant dans une matrice B' les p' premières lignes, et dans une matrice B'' les p'' autres lignes; on écrira

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' \end{bmatrix} \begin{matrix} (p',\ q) \\ (p'',\ q) \end{matrix}$$

On montrera que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = [\ \mathrm{A}'\mathrm{B}' + \mathrm{A}''\mathrm{B}''\ ]$

On peut maintenant décomposer B' et B'' chacune en deux blocs en groupant les q' premières colonnes, puis les q'' autres $(q' + q'' = q)$, ce qui donne

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}'_1 & \mathrm{B}'_2 \\ \mathrm{B}''_1 & \mathrm{B}''_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (p',\ q') & (p',\ q'') \\ (p'',\ q') & (p'',\ q'') \end{matrix}$$

et l'on montrera que

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \Big[\underset{(n,\,q')}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'_1 + \mathrm{A}''\mathrm{B}''_1} \quad \underset{(n,\,q'')}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'_2 + \mathrm{A}''\mathrm{B}''_2} \Big]$$

Plus généralement, la multiplication de deux matrices peut se faire par blocs associés, comme elle se fait par éléments.

8. — L'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps K [a sur la diagonale principale, b partout ailleurs] est un espace vectoriel sur K. En trouver une base.

9. — Montrer que l'ensemble des matrices, sur le corps K, de la forme

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a & \dots & . & a \\ a & b & b & b & \dots & . & b \\ a & b & c & c & \dots & . & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k & k \\ a & b & c & d & \dots & k & l \end{bmatrix}$$

est un espace vectoriel sur K et trouver une base.

10. — *a*) On désigne par ω_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de celui qui est à l'intersection de la ligne de rang i et de la colonne de rang j, et qui est égal à 1. Calculer les produits $\omega_{ij}\,\omega_{kl}$.

b) Déduire de ce calcul que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{O}$ si

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. — Dans l'espace ponctuel $\mathcal{E}_3$, rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ trouver les matrices des transformations ponctuelles linéaires suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ étant un vecteur donné.

b) Symétrie par rapport au plan d'équation $ux + vy + wz = 0$.

c) (Sans nouveau calcul) symétrie par rapport à la droite de paramètres directeur. p, q, r.

d) Produit de trois rotations dont les axes sont déterminés par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, et dont les angles sont respectivement α, β, γ.

12. $\vec{\mathrm{V}}(x, y, z)$ est un vecteur unitaire rapporté à une base orthonormée. On pose

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer $P = M^2 + I$. Vérifier $P^2 = P$. Calculer PM et MP.

Retrouver les résultats par une interprétation géométrique de la question.

13. A est une matière carrée d'ordre 2, quelconque, sur le corps K. Montrer qu'il est possible de trouver des éléments a, b, c, d, e de K tels que

$$aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA + eI = O.$$

Peut-on obtenir l'égalité précédente avec $a = b = 0$?

14. — On considère la matrice

$$M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$$

dans laquelle $a, b, c, d,$ sont des fonctions réelles de la variable réelle admettant des dérivées successives à un ordre quelconque. On pose

$$M'(x) = \begin{bmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{bmatrix} \quad \dots \quad M^{(p)}(x) = \begin{bmatrix} a^{(p)}(x) & b^{(p)}(x) \\ c^{(p)}(x) & d^{(p)}(x) \end{bmatrix}$$

Déterminer $M(x)$ pour que M et M' commutent. Montrer qu'alors M et $M^{(p)}$ commutent

15. — Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui commutent avec une matrice diagonale donnée, dont les éléments de la diagonale ont deux à deux distincts.

16. — Soit $K_n[x]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée définis sur un corps commutatif K, et dont le degré est au plus égal à n. On sait que $K_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ défini sur K. On considère l'application f qui, à tout élément P de $K_n[x]$ associe le polynôme $f(P) = P'$, dérivé du polynôme P. Démontrer que cette application est linéaire; quels sont l'image et le noyau de f? Que peut-on dire de l'application f^{n+1}? Écrire les matrices des applications $f, f^2, f^3, \dots f^n$ quand l'espace $K_n[x]$ est rapportée à la base

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \dots, \quad \frac{x^n}{n!}.$$

Vérifier le résultat obtenu par un calcul direct, en calculant les puissances de la matrice de f.

17. — On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer A^n et B^n (n naturel) en utilisant les matrices

$$A' = A - I \quad \text{et} \quad B' = B - I.$$

18. — *a*) On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; calculer A^n (cf. ex. 17).

b) Trois suites $\{ u_n \}, \{ v_n \}, \{ w_n \}$ sont déterminées par la donnée de u_0, v_0, w_0 et des relations de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + v_{n-1}, \quad v_n = v_{n-1} + w_{n-1}, \quad w_n = w_{n-1}.$$

Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

c) On donne la suite $\{ u_n \}$ déterminée par la donnée de u_0, u_1, u_2 et par la relation de récurrence

$$u_n - 3au_{n-1} + 3a^2u_{n-2} - a^3u_{n-3} = 0.$$

Calculer u_n en fonction de n.

19*. — NOTION D'EXPONENTIELLE DE MATRICE. — Dans cet exercice, il ne sera question que de matrices carrées d'ordre n sur le corps des réels.

Si A est une telle matrice, on notera $(A)_{ij}$ l'élément de la i^e ligne et de la j^e colonne de A. On notera I la matrice unité.

a) Soit M un nombre positif tel que

$$|\,(A)_{ij}\,| \leqslant M \text{ quels que soient } i \text{ et } j.$$

Démontrer par récurrence que, quel que soit l'entier naturel p, on a

$$|\,(A^p)_{ij}\,| \leqslant n^{p-1}M^p. \qquad (1)$$

b) Déduire de l'inégalité (1) que, quels que soient la matrice A et les indices i et j, la série

$$(I)_{ij} + (A_{ij}) + \frac{(A^2)_{ij}}{2!} + \ldots + \frac{(A^p)_{ij}}{p!} + \ldots.$$

est convergente.

On notera α_{ij} la somme de cette série; on appellera « exponentielle de A » et on notera e^A la matrice définie par $(e^A)_{ij} = \alpha_{ij}$, quels que soient i et j.

c) Calculer e^{tI}, où t est un nombre réel quelconque.

d) Calculer e^A, e^B, e^C pour les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -t & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}.$$

20*. — DÉRIVÉE D'UNE MATRICE. — Soit A (x) une matrice à p lignes et n colonnes dans laquelle le terme qui est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est une fonction $a_{ij}(x)$ de la variable réelle définie sur $]-\infty, +\infty[$.

Nous dirons que la matrice A(x) admet une matrice $L = (l_{ij})$ pour limite quand x tend vers x_0 si

$$\forall i, \forall j, \lim_{x \to x_0} a_{ij}(x) = l_{ij}.$$

Nous écrirons dans ce cas $\lim_{x \to x_0} A(x) = L$.

Nous dirons que la matrice A(x) est continue au point x_0 si $\lim_{x \to x_0} A(x) = A(x_0)$.

Nous dirons que la matrice A(x) est dérivable au point x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[A(x_0 + h) - A(x_0)] \text{ existe.}$$

La limite sera alors notée $A'(x_0)$.

a) Montrer que A(x) est dérivable au point x_0 si et seulement si chacune des fonctions $a_{ij}(x)$ est dérivable en ce point.

b) Étudier la dérivée de la somme de deux matrices $p \times n$.

c) Étudier la dérivée du produit d'une matrice $q \times p$ par une matrice $p \times n$.

CHAPITRE XIII

FORMES LINÉAIRES, BILINÉAIRES

I. FORMES LINÉAIRES

184. ***Forme linéaire.*** — 1° DÉFINITION. — **E étant un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur le corps K, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K, K étant considéré comme espace vectoriel sur lui-même.**

En d'autres termes, f est une forme linéaire sur E si on sait associer à tout vecteur $\vec{X}$ de E un scalaire $f(\vec{X})$ de K tel que les critères de linéarité soient vérifiés.

2° **Rang d'une forme linéaire.** — L'image de E par f, $\mathrm{Im}f$, est un sous-espace vectoriel de K. La dimension de K étant 1, deux cas seulement sont possibles (n° 156, 4°) :

a) $\mathrm{Im}f = \{0\}$; dans ce cas, $\forall \vec{X} \in E$, $f(\vec{X}) = 0$. On dit alors que f est la *forme linéaire nulle*; on la note $f = (0)$.

Le rang de la forme linéaire nulle est zéro.

b) $\mathrm{Im}f = K$; f est alors surjective.

Le rang d'une forme linéaire non nulle est 1.

3° **Dual d'un espace vectoriel.** — On a vu au n° 164 que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur K.

Dans l'étude que nous abordons ici, F est remplacé par K lui-même; l'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires sur E est donc un espace vectoriel sur K, et nous énoncerons :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Si E est un espace vectoriel sur le corps K, l'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur K; on l'appelle le dual de E.**

Le dual de E est noté E*.

L'élément neutre de l'addition sur E* est la forme linéaire nulle, (0).

4° Nous pourrons donc, à propos des éléments de E* (c'est-à-dire des formes linéaires sur E) utiliser les notions générales d'indépendance ou de dépendance linéaires, celles de système générateur, de base, ... sans reprendre les démonstrations. Par exemple

DÉFINITIONS. — **Étant donné p formes linéaires $f_1, \ldots, f_p$,**

I) elles sont dites linéairement dépendantes s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p = (0);$$

II) elles sont dites linéairement indépendantes lorsque leur seule combinaison linéaire qui donne la forme nulle est celle dont les coefficients sont tous nuls :

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p = (0) \\ \text{formes indépendantes} \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \ldots,\ \lambda_p = 0.$$

Dans le premier cas, on dit encore que les formes f_i forment un *système lié*, dans le second cas, un *système libre*.

185. *Formes linéaires sur un espace vectoriel* E *de dimension finie.* — 1° THÉORÈME. — **Un espace vectoriel E de dimension finie et son dual E* ont la même dimension.**

Nous savons en effet que l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(E, F)$ des applications linéaires de l'espace vectoriel E, de dimension n, dans l'espace vectoriel F, de dimension p a pour dimension np (177). Or, ici, $F = K$ et $p = 1$; E* a donc pour dimension n.

2° **Expression analytique.** — *a*) Une fois choisie une base,

$$\mathfrak{U} = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \right\} \text{ de E,}$$

la forme linéaire f est telle que

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i x_i \xrightarrow{f} f(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{u}_i) x_i$$

Autrement dit, f est déterminée par les n scalaires de K

$$\alpha_i = f(\vec{u}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

f associe à $\vec{X}$ un élément de K, $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, qui est une combinaison linéaire des coordonnées de $\vec{X}$, à coefficients dans K.

La forme linéaire nulle est caractérisée par $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

b) En associant à la forme linéaire f le polynôme

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n \qquad (\alpha_i \in K),$$

on définit une bijection de E* sur l'ensemble des polynômes homogènes du premier degré aux n indéterminées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, sur le corps K.

3° **Base duale.** — D'après le n° 156, une base de l'espace vectoriel E* est un système libre générateur de E*. Reprenons alors les notations du 2°.

Si à $\vec{X}$ on associe sa k-ième coordonnée x_k, on définit une forme linéaire φ_k sur E :

$$\vec{X} \xrightarrow{\varphi_k} x_k$$

en effet $\varphi_k\left(\vec{X} + \vec{X'}\right) = x_k + x'_k$, c'est-à-dire $\varphi_k\left(\vec{X}\right) + \varphi_k\left(\vec{X'}\right)$

$\varphi_k\left(\lambda\vec{X}\right) = \lambda x_k$, c'est-à-dire $\lambda\varphi_k\left(\vec{X}\right)$ $(\lambda \in K)$.

Observons que $\varphi_k\left(\vec{u_l}\right) = \delta_{kl}$ (notation de Kronecker).

I. *Les formes linéaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *engendrent* E*. En effet, nous avons vu que toute forme linéaire f sur E associait à l'élément générique $\vec{X}$ de E un scalaire de K de la forme

$$f\left(\vec{X}\right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E,

$$f\left(\vec{X}\right) = \alpha_1\varphi_1\left(\vec{X}\right) + \alpha_2\varphi_2\left(\vec{X}\right) + \ldots + \alpha_n\varphi_n\left(\vec{X}\right).$$

En résumé

$$f = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$$

est une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

II. *Les formes linéaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *constituent une base de* E*.

Le système $\mathfrak{U}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est un système générateur de l'espace vectoriel E*; ce système est formé de n vecteurs et d'autre part la dimension de E* est n. Par suite (n° 156, 3°), $\mathfrak{U}^*$ est une base de E*.

On dit que cette base $\mathfrak{U}^*$ de E* est la base *duale* de la base

$$\mathfrak{U} = \left\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\right\} \text{ de E.}$$

4° **Représentation matricielle d'un système de formes linéaires.** — Toutes les fois qu'un espace vectoriel E* interviendra en tant qu'espace dual d'un autre espace vectoriel E, si, comme on a vu au n° 183, on a placé en ligne les éléments de E et en colonnes leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{U}$, on conviendra de placer en colonnes les éléments de E*, et en lignes leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{U}^*$.

Au système $\mathcal{G}^*$ de p formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de E*, nous associons ainsi la matrice $\mathcal{A}(p, n)$ suivante :

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \overset{\begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \end{array}}{\left[\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{array}\right]} = \mathcal{A}$$

Chaque ligne de $\mathcal{A}$ donne les coordonnées dans $\mathcal{U}^*$ d'une forme linéaire de E*.

On peut encore noter la matrice $\mathcal{A}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array}\right]_{\mathcal{U}^*}$$

la mention de la base $\mathcal{U}^*$ pouvant être supprimée si aucune confusion n'est à craindre; il est bien entendu que, dans la notation précédente, f_i est une façon abrégée de représenter la ligne des coordonnées de f_i dans la base $\mathcal{U}^*$.

Aux q combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}^*$

$$g_k = \lambda_{k1} f_1 + \lambda_{k2} f_2 + \ldots + \lambda_{kp} f_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

nous associerons la matrice suivante :

$$\begin{array}{c} \\ g_k \end{array} \overset{\begin{array}{c} f_i \end{array}}{\left[\begin{array}{c} [\lambda_{ki}] \end{array}\right]} = \Lambda \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, q \\ i = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

Comme au n° 183, nous écrirons

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix} = \Lambda\, \mathcal{A} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

La matrice $\Lambda\,\mathcal{A}$ fournit les coordonnées des formes linéaires g_k dans la base $\mathcal{U}^*$.

5° **Notation matricielle de** $f(\vec{X})$. — Si les éléments $\vec{X}$ et f de E et E* sont représentés respectivement dans $\mathcal{U}$ par la matrice-colonne X, et dans $\mathcal{U}^*$ par la matrice-ligne $\mathcal{A}$, le scalaire $f(\vec{X})$ de K est l'élément, unique, de la matrice $\mathcal{A}X$.

6° **Changement de base.** — Après avoir étudié le changement de base dans un espace vectoriel au n° 225, le lecteur pourra étudier au n° 7, du tome III le changement de base simultané dans un espace vectoriel et dans son dual.

7° Sous-espace vectoriel de E* associé à un sous-espace vectoriel de E. — *a*) Soit E' un sous-espace vectoriel de E de dimension $r \leqslant n$; choisissons arbitrairement une base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ de E', et adjoignons-lui des vecteurs de E $\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ de façon à construire une base $\mathfrak{U}$ de E (n°158). Dans cette base, le vecteur générique de E s'écrit

$$\vec{X} = \vec{u}_1 x_1 + \ldots + \vec{u}_r x_r + \vec{u}_{r+1} x_{r+1} + \ldots + \vec{u}_n x_n.$$

$$\vec{X} \in E' \iff x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Avec les notations du 3°, on voit que les $n - r$ formes linéaires $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ sont telles que

$$\vec{X} \in E' \iff \varphi_j(\vec{X}) = 0 \qquad (j = r+1, \ldots, n).$$

Ces formes sont indépendantes car elles appartiennent à la base duale $\mathfrak{U}^*$ de $\mathfrak{U}$ dans E*.

Les formes linéaires $\varphi_j (j = r+1, \ldots, n)$ engendrent un sous-espace vectoriel E''* de E*; toute forme linéaire f de E''* est une combinaison linéaire des φ_j, donc

$$\vec{X} \in E' \implies f(\vec{X}) = 0.$$

En prenant arbitrairement dans E''* $n - r$ formes linéaires indépendantes

$$f_i (i = 1, 2, \ldots n - r),$$

les f_i sont des combinaisons linéaires des φ_j et réciproquement. Il en résulte que

$$\vec{X} \in E' \iff (1) \quad f_i(\vec{X}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - r).$$

On dit que (1) constitue un système d'équations de E'.

b) Plus généralement, toute forme de E* s'écrit, dans la base $\mathfrak{U}^*$,

$$g = \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_r \varphi_r + \alpha_{r+1} \varphi_{r+1} + \ldots + \alpha_n \varphi_n.$$

$$\varphi_i(\vec{X}) = x_i \implies \forall \vec{X} \in E', \quad g(\vec{X}) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r.$$

$$\forall \vec{X} \in E', g(\vec{X}) = 0 \iff \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_r = 0 \iff g \in E''^*.$$

En résumé : THÉORÈME. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension n. L'ensemble des formes linéaires de* E* *telles que* $g(\vec{X}) = 0$ *pour tout vecteur* $\vec{X}$ *d'un sous-espace vectoriel* E' *de* E, *de dimension* $r \leqslant n$, *est un sous-espace vectoriel* E''* *de* E*, *de dimension* $n - r$.

c) *Réciproquement*, on donne un sous-espace vectoriel E''* de E*, de dimension *s*; on appelle $\vec{X}$ tout vecteur de E tel que

$$\forall g \in E''^*, \qquad g(\vec{X}) = 0.$$

On vérifie directement que l'ensemble des $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel E' de E; si alors $k = \dim E'$, l'étude *b*) montre que $\dim E''^* = n - k$, et par suite $k = n - s$. En résumé :

THÉORÈME. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension n. L'ensemble des vecteurs* $\vec{X}$ *de* E *tels que* $g(\vec{X}) = 0$ *pour toute forme linéaire g d'un sous-espace vectoriel* E''* *de* E*, *de dimension s, est un sous-espace vectoriel* E' *de* E, *de dimension* $n - s$.

REMARQUE. — Lorsqu'un vecteur $\vec{X}$ de E et une forme linéaire g de E* sont tels que $g(\vec{X}) = 0$, certains auteurs disent que $\vec{X}$ et g sont *orthogonaux*.

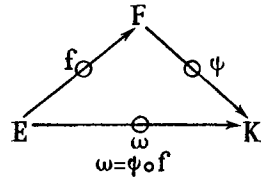
Une partie $\mathfrak{Z}$ de E et une partie Σ^* de E* sont dites orthogonales si tout élément de $\mathfrak{Z}$ est orthogonal à tout élément de Σ^*.

Les théorèmes précédents peuvent alors s'énoncer ainsi :

L'ensemble des éléments de E* (resp. E) orthogonaux à tous les éléments d'un sous-espace vectoriel donné de E (resp. E*) est un sous-espace vectoriel de E* (resp. E); ces deux sous-espaces vectoriels sont dits orthogonaux. La somme de leurs dimensions est la dimension n de E et de E*.

186*. ***Application transposée d'une application linéaire*** (1). — 1° Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ou infinie sur le corps commutatif K, E* et F* les espaces duaux de E et F, et soit f une application linéaire de E dans F.

Soit alors ψ une forme linéaire sur F, application linéaire de F dans K. Le diagramme



montre que l'application composée $\omega = \psi \circ f$ est une forme linéaire sur E.

En d'autres termes, ψ étant un élément quelconque de F*, la correspondance

$$\psi \in F^* \longrightarrow \omega = \psi \circ f \in E^*$$

est une application de F* dans E*; cette application est déterminée par la donnée de f. Nous énoncerons :

DÉFINITION. — **Étant donné une application linéaire f de E dans F, on appelle transposée de f l'application de F* dans E* qui à tout élément ψ de F* associe l'élément $\psi \circ f$ de E*.**

En notant $\tilde{f}$ (ou tr f) l'application transposée, on écrit

$$(\forall \psi \in F^*) \qquad \tilde{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

2° **Propriétés des applications transposées.** — THÉORÈME I. — **L'application $\tilde{f}$ est linéaire.**

En effet quels que soient les formes ψ, ψ_1 de F* et le scalaire λ de K :

$$\begin{cases} \psi \circ f + \psi_1 \circ f = (\psi + \psi_1) \circ f \\ \lambda(\psi \circ f) = (\lambda\psi) \circ f \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tilde{f}(\psi) + \tilde{f}(\psi_1) = \tilde{f}(\psi + \psi_1) \\ \lambda \tilde{f}(\psi) = \tilde{f}(\lambda\psi). \end{cases}$$

THÉORÈME II. — **L'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$ qui à f fait correspondre $\tilde{f}$ est linéaire.**

a) Soient f et g deux applications linéaires quelconques de E dans F; désignons par $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les applications transposées.

Posons $h = f + g$ et $k = \tilde{f} + \tilde{g}$. Nous avons, pour tout $\psi \in F^*$,

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{f}(\psi) = \psi \circ f \\ \tilde{g}(\psi) = \psi \circ g \end{array}\right\} \Longrightarrow k(\psi) = \psi \circ (f + g) \text{ ou } \psi \circ h; \quad k = \tilde{h}.$$

b) Soient λ un scalaire quelconque de K, f une application linéaire quelconque de E dans F, $\tilde{f}$ l'application transposée de f.

---

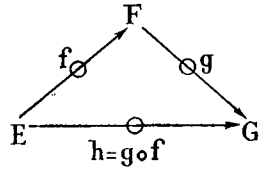
(1) Cette étude, qui ne fait pas partie du programme des classes préparatoires, sera réservée à une seconde lecture.

Posons $h_1 = \lambda f$ et $k_1 = \lambda \tilde{f}$. Nous avons, pour tout $\psi \in F^*$,

$$\tilde{f}(\psi) = \psi \circ f \implies k_1(\psi) = \psi \circ (\lambda f) \text{ ou } \psi \circ h_1; \quad k_1 = \tilde{h}_1.$$

THÉORÈME III. — **L'application transposée de $g \circ f$ est $\tilde{f} \circ \tilde{g}$.**

On considère maintenant les espaces vectoriels E, F, G sur le corps K; soient f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G, et h l'application linéaire composée $g \circ f$.



Soit ζ un élément quelconque de G^*; par définition de $\tilde{h}$,

$$\tilde{h}(\zeta) = \zeta \circ h \quad \text{ou} \quad \zeta \circ (g \circ f)$$

ce qui s'écrit, par associativité, $(\zeta \circ g) \circ f$.

Mais par définition de $\tilde{g}$

$$\zeta \circ g = \tilde{g}(\zeta) \text{ est un élément, } \psi, \text{ de } F^*$$

et par définition de $\tilde{f}$

$$\psi \circ f = \tilde{f}(\psi) \quad \text{ou encore} \quad \tilde{f}[\tilde{g}(\zeta)].$$

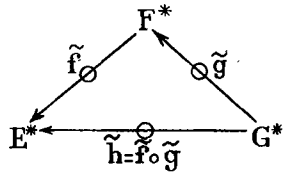
Finalement, $$\forall \zeta \in G^*, \quad \tilde{h}(\zeta) = \tilde{f}[\tilde{g}(\zeta)]$$

ce qui s'exprime par $$\tilde{h} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$$

ou par $$\mathrm{tr}(g \circ f) = (\mathrm{tr}\, f) \circ (\mathrm{tr}\, g)$$

et justifie l'énoncé du théorème.

Le diagramme précédent peut s'accompagner du diagramme



COROLLAIRE. — **L'application transposée d'un automorphisme est un automorphisme.** — Nous sommes maintenant dans le cas où F = E; f, automorphisme de E, est une application linéaire bijective de E sur E (n° 163). L'application réciproque, g, de f est aussi un automorphisme de E, et l'on a

$$g \circ f = f \circ g = e,$$

e désignant l'application identique de E.

L'application transposée de e, $\tilde{e}$, est définie par

$$\forall \omega \in E^*, \quad \tilde{e}(\omega) = \omega \circ e \quad \text{ou} \quad \omega$$

$\tilde{e}$ est donc l'application identique de E^*. D'après le théorème III, les transposées $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ vérifient

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f} = \tilde{e},$$

ce qui prouve que $\tilde{f}$ admet une application réciproque, qui est la transposée de l'application réciproque de f. La proposition en résulte.

THÉORÈME IV. — **Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimensions finie dans un espace vectoriel F de dimension finie, $\tilde{f}$ et f ont le même rang.**

Le noyau, N*, de $\tilde{f}$ est l'ensemble des formes ψ de F* telles que $\psi \circ f$ est la forme nulle de E*, ce qui se tradult par

$$\forall \vec{X} \in E \qquad \psi[f(\vec{X})] = 0$$

ou encore par

$$\forall \vec{Y} \in f(E) \qquad \psi(\vec{Y}) = 0. \tag{1}$$

Étant donné que $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F et que la dimension de $f(E)$ est le rang r de f, l'ensemble des formes ψ de F* vérifiant (1) est (n° 185, 7°) un sous-espace vectoriel N* tel que :

$$\dim N^* = \dim F^* - r.$$

Mais d'après le résultat du n° 169, le rang de $\tilde{f}$, c'est-à-dire la dimension de $\tilde{f}(F^*)$ vérifie

$$\dim F^* = \dim \tilde{f}(F^*) + \dim N^*.$$

Il en résulte que le rang de $\tilde{f}$ est aussi r, ce qui justifie l'énoncé.

3° **Matrice d'une application transposée.** — Nous nous limitons dans ce sous-paragraphe au cas où E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies n et p sur le corps K. Nous choisissons dans E une base $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$ et dans F une base $\mathfrak{V} = \{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \}$; nous disposons ainsi, dans les espaces duaux E* et F*, des bases $\mathfrak{U}^* = \{ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \}$ et $\mathfrak{V}^* = \{ \theta_1, \ldots, \theta_p \}$ respectivement duales de $\mathfrak{U}$ et de $\mathfrak{V}$.

Soit f une application linéaire de E dans F, et ψ une forme linéaire sur F, l'application composée $\omega = \psi \circ f$ est une forme linéaire sur E (cf. 1°).

Dans les bases $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ f est représentée par la matrice

$$\begin{array}{c} \\ \vec{v}_i \end{array} \overset{\begin{array}{c} f(\vec{u}_k) \end{array}}{\left| \begin{array}{c} [a_{ik}] \end{array} \right.} = \underset{(p,\,n)}{A} \tag{2}$$

Les formes linéaires ψ et ω sont représentées respectivement par les matrices

$$\begin{array}{c} \psi(\vec{v}_1) \quad \ldots \quad \psi(\vec{v}_p) \\ [\beta_1 \quad \ldots \quad \beta_p] = \Psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \omega(\vec{u}_1) \quad \ldots \quad \omega(\vec{u}_n) \\ [\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n] = \Omega \end{array}$$

$$\omega = \psi \circ f \text{ se traduit par } \Omega = \Psi A.$$

Au lieu de considérer Ω et Ψ comme des matrices d'applications linéaires de E et F dans K, on peut les considérer comme matrices unilignes des coordonnées d'un élément ω de E* dans la base duale $\mathfrak{U}^*$, et d'un élément ψ de F* dans la base duale $\mathfrak{V}^*$.

Si $\tilde{f}$ est l'application linéaire de F* dans E* définie par

$$\omega = \tilde{f}(\psi) = \psi \circ f,$$

la relation matricielle $\Omega = \Psi A$ donne les coordonnées de ω (en ligne) en fonction de celles

de ψ (en ligne), c'est donc que A est la matrice de $\tilde{f}$ quand on pose

$$\tilde{f}(\theta_i)\Big|^{\varphi_j}_{[a_{ij}]} = A. \tag{3}$$

Nous énoncerons, en résumé :

THÉORÈME. — **En convenant d'écrire en colonne les coordonnées d'un élément de F et en ligne les coordonnées d'un élément de E*, c'est la même matrice qui représente f dans les bases $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ et $\tilde{f}$ dans les bases $(\mathfrak{V}^*, \mathfrak{U}^*)$.**

Naturellement, si nous n'avions pas fait la convention d'écriture « en ligne » dans les espaces duaux, nous aurions obtenu des matrices transposées pour représenter f dans $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ et $\tilde{f}$ dans $(\mathfrak{V}^*, \mathfrak{U}^*)$.

4° **Rang d'une matrice.** — Le rang commun de f et de $\tilde{f}$ (th. IV du 2°) est, d'une part, la dimension du sous-espace vectoriel $f(E)$ de F, c'est-à-dire le rang, dans F, du système des vecteurs

$$\left\{ f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n) \right\},$$

d'autre part la dimension du sous-espace vectoriel $\tilde{f}(F^*)$ de E*, c'est-à-dire le rang, dans E*, du système des vecteurs

$$\left\{ \tilde{f}(\theta_1), \ldots, \tilde{f}(\theta_p) \right\}.$$

Les vecteurs $f(\vec{u}_k)$ sont (formule 2) les vecteurs-colonnes de la matrice A (dans la base $\mathfrak{V}$ de F), les vecteurs $\tilde{f}(\theta_i)$ sont (formule 3) les vecteurs-lignes de la matrice A (dans la base $\mathfrak{U}^*$ de E*).

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — **Dans toute matrice le rang du système des vecteurs-colonnes est égal au rang du système des vecteurs-lignes.**

5° **Recherche du rang d'une matrice.** — Nous donnerons ultérieurement, à partir de la théorie des déterminants, la notion de matrice carrée régulière (n° 199) et celle de rang d'une matrice (n° 204).

Nous allons montrer ici comment ces notions peuvent s'introduire d'une façon indépendante de la théorie des déterminants.

Nous appellerons, dans ce sous-paragraphe :

I) *rang d'une matrice* $A(p, n)$, le rang r commun au système des vecteurs-colonnes et au système des vecteurs-lignes.

On a $$r \leqslant \inf(p, n).$$

II) *matrice carrée régulière* toute matrice carrée d'ordre m et de rang m.

Les vecteurs-colonnes (resp. les vecteurs-lignes) forment un système libre.

THÉORÈME. — **Le rang d'une matrice A est le plus élevé des ordres des sous-matrices carrées régulières de A.**

Soit A une matrice (p, n), de rang r, sur le corps commutatif K. Nous considérons les éléments de la k-ième colonne de A comme les coordonnées d'un vecteur $\vec{C}_k$ de l'espace vectoriel K^p rapporté à sa base canonique et les éléments de la i-ième ligne de A comme les coordonnées d'un vecteur $\vec{L}_i$ de l'espace vectoriel K^n rapporté à sa base canonique.

Soit $\mathfrak{R}$, d'ordre ρ, une sous-matrice carrée régulière de A d'ordre maximum, que nous appellerons *sous-matrice principale* ($\rho \leqslant \inf(p, n)$).

α) Les ρ vecteurs $\vec{C}_k$ qui interviennent pour former $\mathfrak{R}$ forment un système libre; en effet les vecteurs-colonnes de $\mathfrak{R}$ peuvent être considérés comme les projections de ces ρ vecteurs $\vec{C}_k$ sur un sous-espace de K^p, parallèlement à un sous-espace supplémentaire; or, une projection étant une application linéaire, un système qui se projette suivant un système libre est nécessairement libre; les ρ vecteurs $\vec{C}_k$ considérés sont donc libres; comme r est le rang du système des vecteurs $\vec{C}_k$, $\rho \leqslant r$.

En résumé, $\rho \leqslant r \leqslant \inf(p, n)$

β) Supposons $\rho = \inf(p, n)$

nécessairement $r = \rho$.

La proposition est démontrée.

γ) Supposons enfin $\rho < n$ et $\rho < p$. S'il existait $\rho + 1$ vecteurs $\vec{L}_i$ formant un système libre, les lignes correspondantes de A constitueraient une sous-matrice $A'(\rho + 1, n)$ de rang $\rho + 1$; on pourrait trouver $\rho + 1$ vecteurs-colonnes de A' formant un système libre et en déduire une sous-matrice carrée régulière d'ordre $\rho + 1$ de A', et aussi de A, ce qui serait contraire à l'hypothèse faite sur ρ.

Le rang r des vecteurs-lignes de A est donc tel que $r \leqslant \rho$.

En définitive, là encore $\rho = r$, et la proposition est démontrée.

II. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES. FORMES BILINÉAIRES

187. *Application n-linéaire.* — Soit K un corps commutatif et soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels sur K.

1° DÉFINITION. — **On dit qu'une application f de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F, notée**

$$(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n), \quad \vec{X}_i \in E_i \longrightarrow f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) \in F,$$

est n-linéaire si elle satisfait aux critères de linéarité séparément par rapport aux vecteurs de E_1, ..., aux vecteurs de E_n.

Cela signifie que :

a)
$$f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i' + \vec{X}_i'', \ldots, \vec{X}_n) = f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i', \ldots, \vec{X}_n) + f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i'', \ldots, \vec{X}_n).$$

b) $\forall \rho \in K, \quad f(\vec{X}_1, \ldots, \rho\vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_n) = \rho f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_n).$

Notons qu'il ne s'agit pas d'une application linéaire de l'espace vectoriel $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans l'espace vectoriel F. En effet en multipliant $(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ par le scalaire λ, nous obtenons $(\lambda\vec{X}_1, \ldots, \lambda\vec{X}_n)$ dont l'image par f n'est pas $\lambda f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)$, mais $\lambda^n f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)$.

2° **L'espace vectoriel des applications n-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F.** — Soit f et g deux éléments de l'ensemble $\mathfrak{L}$ des applications n-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F; soit λ un scalaire de K.

En s'inspirant du n° 164, le lecteur démontrera que

a) les applications, h et k, de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F déterminées par

$$h(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) + g(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)$$
$$k(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = \lambda f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)$$

sont n-linéaires;

b) en posant $h = f + g$ et $k = \lambda g$ on munit $\mathfrak{L}$ d'une structure d'espace vectoriel sur K.

3° **Les formes n-linéaires sur $E_1 \times \ldots \times E_n$.** — L'étude faite aux 1° et 2° est valable, en particulier, si l'espace vectoriel image, F, est le corps K, considéré comme espace vectoriel sur lui-même. Les applications n-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans K sont dites *formes n-linéaires* sur $E_1 \times \ldots \times E_n$. Elles forment un espace vectoriel sur K.

188. *Forme bilinéaire sur* $E \times F$.

1° **Définition.** — Par application des définitions du n° 187 au cas particulier où l'on donne deux espaces vectoriels E et F sur le même corps commutatif K, on dira :

On appelle forme bilinéaire sur $E \times F$ toute application de $E \times F$ dans K qui satisfait aux critères de linéarité séparément pour les vecteurs de E et pour les vecteurs de F.

L'ensemble $\mathfrak{L}$ des formes bilinéaires sur $E \times F$ a une structure d'espace vectoriel sur K.

2° **Expression d'une forme bilinéaire, lorsque E et F sont de dimension finie.**

Supposons E de dimension n et rapportons-le à une base

$$\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}.$$

Supposons F de dimension p et rapportons-le à une base

$$\mathfrak{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}.$$

Soit $\vec{X} = \vec{u}_1 x_1 + \ldots + \vec{u}_n x_n$ un vecteur de E

$\vec{Y} = \vec{v}_1 y_1 + \ldots + \vec{v}_p y_p$ un vecteur de F.

a) *Analyse.* — Soit φ une forme bilinéaire sur $E \times F$;

$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \varphi\left(\sum_i \vec{u}_i x_i, \sum \vec{v}_j y_j\right)$ s'écrit nécessairement $\sum_i \sum_j x_i \varphi(\vec{u}_i, \vec{v}_j) y_j$.

Posons $\varphi\left(\vec{u}_i, \vec{v}_j\right) = \omega_{ij}$,

nécessairement $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_i \sum_j x_i \omega_{ij} y_j$.

Posons $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \cdot & \omega_{1p} \\ \omega_{21} & \cdot & \omega_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n1} & \cdot & \omega_{np} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_i x_i g_i, \; g_i \text{ étant défini par } g_i = \sum_j \omega_{ij} y_j;$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} = \Omega Y \quad \text{et} \quad [\varphi] = [x_1 \ldots x_n] \times \begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \tilde{X}\Omega Y.$$

Finalement, $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$ est le déterminant de la matrice (1, 1) : $\tilde{X}\Omega Y$

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \det\left(\tilde{X}\Omega Y\right). \qquad (1)$$

b) *Synthèse.* — La formule (1), où Ω est une matrice donnée (n, p) sur K définit une application de $E \times F$ dans K qui vérifie les critères de linéarité par rapport à $\vec{X}$ d'une part, par rapport à $\vec{Y}$ d'autre part; cette application est donc une forme bilinéaire.

2° **Correspondance entre matrices et formes bilinéaires.** — Des bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ ayant été choisies dans les espaces vectoriels E et F sur le corps K, à toute forme bilinéaire sur $E \times F$ est associée une matrice $\Omega(n, p)$, et inversement à toute matrice $\Omega(n, p)$ on peut associer une forme bilinéaire sur $E \times F$. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ et l'ensemble des matrices $\Omega(n, p)$.

On peut noter une forme bilinéaire $\Omega\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$, en rappelant en tête le nom de la matrice associée.

Aux opérations relatives aux formes bilinéaires φ sur $E \times F$ correspondent les opérations relatives aux matrices associées $\Omega(n, p)$.

L'espace vectoriel sur K des formes bilinéaires sur $E \times F$ est isomorphe à l'espace vectoriel sur K des matrices $\Omega(n, p)$, pour l'opération interne d'addition et l'opération externe de multiplication par un élément de K.

3° **Combinaisons linéaires de formes linéaires.** — Soit φ une forme bilinéaire sur $E \times F$:

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \sum_i \sum_j x_i \, \omega_{ij} \, y_j$$

On peut sommer

$$\sum_i x_i \omega_{ij} = f_j\left(\vec{X}\right)$$

f_j étant une forme linéaire sur E;

$$\varphi = \sum_j f_j y_j$$

est une combinaison linéaire de p formes linéaires sur E, dont les coefficients sont les coordonnées d'un vecteur de F.

On peut sommer

$$\sum_j \omega_{ij} y_j = g_i\left(\vec{Y}\right)$$

g_i étant une forme linéaire sur F;

$$\varphi = \sum_i x_i g_i$$

est une combinaison linéaire de n formes linéaires sur F, dont les coefficients sont les coordonnées d'un vecteur de E.

189. ***Forme bilinéaire associée à une matrice carrée.*** — 1° **Expression.** — Étant donné un espace vectoriel E de dimension n sur le corps K, on peut définir une application bilinéaire de E × E sur K; on dit simplement que c'est une forme bilinéaire sur E.

Soit $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux vecteurs de E, rapporté à la base $\mathfrak{U} = \left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right\}$; la forme bilinéaire φ est définie par les scalaires $\varphi\left(\vec{u}_i, \vec{u}_j\right) = \omega_{ij}$, éléments d'une matrice carrée Ω d'ordre n :

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \text{dét}\left(\tilde{X}\Omega Y\right).$$

2° **Forme bilinéaire symétrique.** — DÉFINITION. — **La forme bilinéaire φ sur l'espace vectoriel E est dite symétrique si**

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right)$$

quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ pris dans E.

a) Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que

$$\varphi\left(\vec{u}_i, \vec{u}_j\right) = \varphi\left(\vec{u}_j, \vec{u}_i\right) \qquad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \Big\} = 1, 2, \ldots, n$$

autrement dit que $\omega_{ij} = \omega_{ji}, \quad \forall i, j,$

c'est-à-dire que la matrice carrée Ω soit symétrique.

b) Inversement, toute forme bilinéaire associée à une matrice symétrique Ω est symétrique.

Posons en effet $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \text{dét}\left(\tilde{X}\Omega Y\right)$

alors $\varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right) = \text{dét}\left(\tilde{Y}\Omega X\right).$

Mais la matrice $\tilde{X}\Omega Y$ n'ayant qu'un seul élément est identique à sa transposée, $\tilde{Y}\tilde{\Omega}X$ ou $\tilde{Y}\Omega X$ puisque $\tilde{\Omega} = \Omega$; par suite

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right).$$

3° **Forme bilinéaire alternée.** — DÉFINITION. — **La forme bilinéaire φ sur l'espace vectoriel E est dite alternée si**

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = -\varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right)$$

quels que soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ pris dans E.

a) une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que

$$\varphi\left(\vec{u}_i, \vec{u}_j\right) = -\varphi\left(\vec{u}_j, \vec{u}_i\right) \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n$$

autrement dit que

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad \forall i, j$$

c'est-à-dire que la matrice Ω soit antisymétrique.

b) Inversement, toute forme bilinéaire associée à une matrice antisymétrique Ω est alternée ;

en effet soit $\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = \text{dét}\left(\tilde{X}\Omega Y\right)$

alors $\varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right) = \text{dét}\left(\tilde{Y}\Omega X\right).$

La matrice $\tilde{X}\Omega Y$ n'ayant qu'un seul élément est égale à sa transposée, $\tilde{Y}\tilde{\Omega}X$, ou $-\tilde{Y}\Omega X$, pulsque $\tilde{\Omega} = -\Omega$; par suite

$$\varphi\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = -\varphi\left(\vec{Y}, \vec{X}\right).$$

4° **Expression générale d'une forme bilinéaire sur** E. — Toute forme bilinéaire sur E est, d'une seule façon, la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire alternée.

Cela résulte du fait que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (n° 182, 6°).

*190. — ***Le bidual.*** — 1° Soit E un espace vectoriel sur le corps K, et E* le dual de E (les notations sont celles des n°s 184, 185, 186). Considérons l'application de E × E* dans K définie par

(1) $$\left(\vec{X}, f\right) \in E \times E^* \longrightarrow f\left(\vec{X}\right) \in K$$

a) pour f fixé, l'application de E dans K, $\vec{X} \longrightarrow f\left(\vec{X}\right)$, est linéaire par définition

b) pour $\vec{X}$ fixé, l'application de E* dans K, $f \longrightarrow f\left(\vec{X}\right)$ est linéaire puisque (n° 184, 2°).

$$\forall f_1, f_2 \in E^*, \quad h = f_1 + f_2 \Longrightarrow h\left(\vec{X}\right) = f_1\left(\vec{X}\right) + f_2\left(\vec{X}\right)$$

$$\forall f \in E^*, \quad \forall \lambda \in K, \quad h = \lambda f \Longrightarrow h\left(\vec{X}\right) = \lambda f\left(\vec{X}\right).$$

Par suite, l'application (1) est une forme bilinéaire[1] sur E × E*. En particulier, pour $\vec{X}$ fixé, (1) est une forme linéaire sur E*, que nous noterons $\mathfrak{X}$:

$$\forall f \in E^*, \quad f \xrightarrow{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}(f) = f\left(\vec{X}\right) \in K.$$

(1) Certains auteurs donnent à cette application bilinéaire le nom de produit scalaire et la notent $< \vec{X}, f >$.

La forme $\mathfrak{X}$ est un élément du dual E** de E*; E** est un espace vectoriel sur K, appelé *bidual* de E.

Soit $\mathfrak{L}$ l'application de E dans E** définie par

$$\vec{X} \in E \xrightarrow{\mathfrak{L}} \mathfrak{X} \in E^{**};$$

on l'appelle l'*application canonique* de E dans E**; montrons que $\mathfrak{L}$ est linéaire :

$$\vec{Y} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \Longrightarrow f(\vec{Y}) = f(\vec{X}_1) + f(\vec{X}_2), \quad \forall f \in E^* \Longrightarrow \mathfrak{L}(\vec{Y}) = \mathfrak{L}(\vec{X}_1) + \mathfrak{L}(\vec{X}_2)$$
$$\vec{Y} = \lambda \vec{X} \Longrightarrow f(\vec{Y}) = \lambda f(\vec{X}), \quad \forall f \in E^*, \quad \forall \lambda \in K \Longrightarrow \mathfrak{L}(\vec{Y}) = \lambda \mathfrak{L}(\vec{X}).$$

2° Limitons-nous maintenant au cas où E (et par suite E*, et E**) admet une dimension finie n. Soit (n° **186**, 3°),

$\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$ une base quelconque de E,
$\mathfrak{U}^* = \{ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \}$ la base de E*, duale de $\mathfrak{U}$, et
$\mathfrak{U}^{**} = \{ \psi_1, \ldots, \psi_n \}$ la base de E**, duale de $\mathfrak{U}^*$.

$$\vec{X} = \sum_k \vec{u}_k x_k \qquad \text{et} \qquad f = \sum_k \alpha_k \varphi_k \Longrightarrow f(\vec{X}) = \sum_k \alpha_k x_k.$$

Pour $\vec{X}$ fixé, on a $\mathfrak{X}(f) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

Comme, d'après la définition de la base duale, (n° **186**, 3°) $\psi_k(f) = \alpha_k$, on a $\mathfrak{X} = \sum_k \psi_k x_k$.

L'application canonique $\mathfrak{L}$ est ainsi une bijection; elle définit un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel E**, ce qui permet d'identifier $\vec{X}$ et $\mathfrak{X}$, E et E**.

EXERCICES

1. — Soit E l'espace vectoriel réel, de dimension n, constitué par les polynômes à coefficients réels dont le degré n'excède pas $n - 1$, auxquels on adjoint le polynôme nul.

a) A tout réel x on associe l'application f_x de E dans R telle que

$$P \in E \xrightarrow{f_x} f_x(P) = P(x).$$

Montrer qu'il s'agit d'une forme linéaire.

b) Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels donnés, deux à deux distincts, le système de formes linéaires $\mathfrak{U}^* = \{ f_{x_1}, \ldots, f_{x_n} \}$ est une base du dual E* de E.

Trouver la base $\mathfrak{U}$ de E dont $\mathfrak{U}^*$ est base duale.

2. — On donne un espace vectoriel E, sur un corps K, et deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E. On désigne par E_1^* et E_2^* les sous-espaces du dual E* de E respectivement orthogonaux à E_1 et E_2 (cf. n° 185, *in fine*); montrer qu'ils sont supplémentaires.

CHAPITRE XIV

DÉTERMINANTS

Tous les corps considérés dans ce chapitre seront supposés commutatifs et n'ayant pas la caractéristique 2.

I. FORME n-LINÉAIRE ALTERNÉE

191. *Application alternée.* — 1° DÉFINITION. — **Etant donné un ensemble quelconque** E **et un ensemble** F **muni d'une structure de groupe, une application** f **de** E^n **dans** F **est dite alternée si, pour tout** n**-uple** $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ **de** E^n **et pour toute transposition** τ **du groupe symétrique** $\mathfrak{S}_n$ **on a**

$$(1) \qquad f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = -f(\xi_{\tau(1)}, \ldots, \xi_{\tau(n)}).$$

Par exemple, si $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour $k \notin \{ i, j \}$

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n) = -f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n).$$

Rappelons que toute substitution $s \in \mathfrak{S}_n$ peut être (de plusieurs manières), considérée comme un produit de transpositions dont le nombre N vérifie (50, 4°)

$$(-1)^N = \varepsilon(s) = (-1)^{I(s)},$$

$\varepsilon(s)$ désignant la signature de la substitution s et $I(s)$ le nombre des inversions de la permutation

$$\{ s(1), \ldots, s(n) \}.$$

Par application répétée de la formule (1) on en déduit que f vérifie :

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \forall (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^n \\ \forall s \in \mathfrak{S}_n \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} f(\xi_{s(1)}, \ldots, \xi_{s(n)}) = \varepsilon(s) f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \varepsilon(s) : \text{signature de } s. \end{cases}$$

Accessoirement, nous poserons :

DÉFINITION. — **Toute application d'un ensemble** E^n **dans un groupe** F **qui vérifie la condition** (2) **est dite antisymétrique** (1).

---

(1) Une application f d'un ensemble E^n dans un ensemble quelconque F est dite symétrique si elle vérifie la condition déduite de (2) en remplaçant $\varepsilon(s)$ par $+1$ (cf. polynômes et fractions rationnelles symétriques).

Une application alternée est donc une application antisymétrique.

2° Considérons un n-uple de E^n dont deux éléments sont égaux, soit $\xi_i = \xi_j = \eta$. La relation (1) donne, quand τ est la transposition qui échange i et j :

$$(3) \quad f(\xi_1, \ldots, \eta, \ldots, \eta, \ldots, \xi_n) = -f(\xi_1, \ldots, \eta, \ldots, \eta, \ldots, \xi_n).$$

Dans la pratique F sera un espace vectoriel sur un corps K, cet espace vectoriel pouvant être K lui-même. Puisque nous avons éliminé les corps de caractéristique 2, l'égalité (3) s'écrira, en désignant par 0 l'élément neutre de l'addition sur F :

$$f(\xi_1, \ldots, \eta, \ldots, \eta, \ldots, \xi_n) = 0.$$

192. *Forme n-linéaire sur E.* — 1° DÉFINITION. — **Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif K. On appelle forme n-linéaire sur E toute forme n-linéaire sur $E_1 \times \ldots \times E_n$, les espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ étant confondus avec E.**

Il résulte du n° 187 que l'ensemble des formes n-linéaires sur E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K.

REMARQUE. — Dans le cas d'une forme n-linéaire nous pouvons démontrer la réciproque suivante de la propriété étudiée au n° 191, 2° :

THÉORÈME. — **Si une forme n-linéaire sur E, f, associe le scalaire 0 du corps de base K à tout n-uple de E^n dont deux des vecteurs sont égaux, f est alternée.**

En effet $(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n)$ étant un n-uple quelconque de E^n nous avons

$$(1) \quad f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_{j-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n) = 0.$$

En utilisant la n-linéarité, le premier membre de (1) apparaît comme la somme de quatre scalaires de K, dont deux sont nuls. Les deux autres sont donc opposés, soit

$$f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n) = -f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_n).$$

2° **Calcul de $f(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n)$ quand les vecteurs $\vec{X}_i$ sont des combinaisons linéaires de n autres vecteurs, indépendants ou liés.** — Soit $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ n vecteurs de E et supposons

$$\vec{X}_j = \vec{u}_1 x_{1j} + \vec{u}_2 x_{2j} + \ldots + \vec{u}_n x_{nj}.$$

Soit $\mathfrak{M}$ la matrice carrée formée par les coefficients scalaires x_{ij}

$$\begin{array}{c|c} & \vec{X}_j \\ \vec{u}_i & [x_{ij}] \end{array} = \mathfrak{M} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (1)$$

D'après les propriétés (a) et (b) du n° 187, 1°, on peut écrire

$$f\left(\vec{u}_1 x_{11} + \vec{u}_2 x_{21} + \ldots + \vec{u}_n x_{n1}, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right) = \sum_{\alpha} f\left(\vec{u}_\alpha, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right) x_{\alpha 1}$$

Remplaçons de même $\vec{X}_2$ par son expression en fonction de $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, et appliquons encore les mêmes propriétés :

$$f\left(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_1 x_{12} + \vec{u}_2 x_{22} + \ldots + \vec{u}_n x_{n2}, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n\right) = \sum_{\beta} f\left(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n\right) x_{\beta 2}$$

et finalement

$$f\left(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} f\left(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n\right) x_{\alpha 1} x_{\beta 2},$$

α et β étant choisis indépendamment l'un de l'autre, parmi les n premiers entiers naturels.

En opérant de même avec les vecteurs suivants $\vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n$, on écrit enfin

$$f\left(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right) = \sum f\left(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \ldots, \vec{u}_\lambda\right) x_{\alpha 1} x_{\beta 2} \ldots x_{\lambda n}, \qquad (2)$$

la sommation étant étendue à tous les groupements d'entiers ordonnés α, β, $\ldots$, λ pris, indépendamment les uns des autres, parmi 1, 2, $\ldots$, n.

193. *Forme n-linéaire alternée sur E.* — 1° Etant donné l'espace vectoriel E, de dimension n, sur le corps K, reprenons l'espace vectoriel des formes n-linéaires sur E et proposons-nous d'étudier celles de ces formes n-linéaires qui sont alternées. La somme de deux telles formes et le produit de l'une d'elles par un scalaire étant des formes n-linéaires alternées nous avons :

THÉORÈME. — **Les formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel E constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des formes n-linéaires sur E.**

Nous allons démontrer que ce sous-espace (dont nous ne connaissons *a priori* qu'un élément, la forme n-linéaire nulle) est de dimension un. Pour cela, nous serons amenés à utiliser le lemme suivant :

LEMME. — **Une forme n-linéaire alternée sur l'espace vectoriel E, f, associe le scalaire 0 de K à tout n-uple de E^n dont les vecteurs forment un système lié dans E.**

Dire que les vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$ sont dépendants, c'est dire que l'un d'eux est une combinaison linéaire des autres vecteurs; supposons, par exemple, que l'on ait

$$\vec{X}_1 = \rho_2 \vec{X}_2 + \ldots + \rho_n \vec{X}_n$$

On en déduit :

$$f\left(\rho_2 \vec{X}_2 + \ldots + \rho_n \vec{X}_n, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right)$$
$$= \rho_2 f\left(\vec{X}_2, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right) + \rho_3 f\left(\vec{X}_3, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n\right) + \ldots$$
$$\ldots + \rho_n f\left(\vec{X}_n, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n\right).$$

Au second membre figurent les valeurs associées par f à des n-uples formés de vecteurs dont deux sont égaux; ces valeurs sont nulles puisque f est alternée, et le lemme est démontré.

2° **Seule expression possible d'une forme n-linéaire alternée.** — Soit f une forme n-linéaire alternée sur E, espace vectoriel de dimension n sur le corps K.

Reprenons le calcul fait au n° 192, 2°, en partant, cette fois, d'une base arbitrairement choisie, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, de E, ce qui a pour avantage de fournir l'image par f de tout n-uple de E^n. $\mathfrak{M}$ est ici la matrice des coordonnées des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$ dans la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Si dans l'expression $f(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \ldots, \vec{u}_\lambda)$ obtenue à la fin du paragraphe précédent (formule (2)), deux des entiers $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont égaux, deux des vecteurs $\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \ldots, \vec{u}_\lambda$ sont égaux, et dans ces conditions la valeur de f est nulle. Nous n'aurons donc à retenir, dans la sommation (2), que les termes pour lesquels $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont tous différents, c'est-à-dire constituent une permutation des n premiers entiers naturels.

Or nous avons vu au n° 191 que si f est alternée,

$$f(\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \ldots, \vec{u}_\lambda) = (-1)^I f(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n),$$

I étant le nombre d'inversions de la permutation $\{\alpha, \beta, \ldots, \lambda\}$.

Finalement, si f est une forme n-linéaire alternée sur E, f est nécessairement telle que :

$$(1) \quad f(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = f(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) \times \left[\sum (-1)^I x_{\alpha 1} x_{\beta 2} \ldots x_{\lambda n}\right]$$

la sommation $\sum$ étant étendue à toutes les permutations $\{\alpha, \beta, \ldots, \lambda\}$ des n premiers entiers; I est le nombre d'inversions de la permutation $\{\alpha, \beta, \ldots, \lambda\}$ $f(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est l'élément de K associé par f au n-uple $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Sous une forme légèrement différente, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **L'espace vectoriel E étant rapporté à une base arbitrairement choisie, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, une forme n-linéaire alternée sur E doit nécessairement avoir une expression telle que**

$$(2) \qquad f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = C \times D(\mathfrak{M})$$

avec
$$\begin{cases} C = f(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n); \qquad \vec{X}_j = x_{1j}\vec{u}_1 + \ldots + x_{nj}\vec{u}_n \\ D(\mathfrak{M}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \ldots x_{s(n),n}. \end{cases}$$

$\varepsilon(s)$ désigne la signature de la substitution s, qui parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, ce qui implique que $D(\mathfrak{M})$ est une somme de $n!$ termes.

REMARQUE. — Le calcul qui a conduit à l'égalité

$$f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = f(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \times D(\mathcal{M})$$

reste valable si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est un système lié de E, mais l'égalité est alors triviale car le système $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n\}$ formé de combinaisons linéaires des vecteurs du système lié, est lui-même lié, et, d'après le lemme,

$$f(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = 0.$$

3° Réciproque : expression d'une forme n-linéaire alternée. —

THÉORÈME. — **L'espace vectoriel E étant rapporté à une base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, arbitrairement choisie, et C désignant un scalaire quelconque du corps de base K, l'application g de E^n dans K déterminée par :**

$$\begin{cases} g(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = C \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \ldots x_{s(n),n} \\ \vec{X}_j = x_{1j}\vec{u}_1 + \ldots + x_{nj}\vec{u}_n \end{cases}$$

est n-linéaire et alternée. Elle associe le scalaire C au n-uple $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

a) *Vérification du caractère n-linéaire.* — Pour j donné, remplaçons le vecteur $\vec{X}_j$ du n-uple $(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n)$ par $\vec{X}'_j + \vec{X}''_j$ (resp. $\lambda\vec{X}_j$) ; dans chacun des produits qui interviennent dans la somme $\sum$, le facteur $x_{s(j),j}$ est remplacé par

$$x'_{s(j),j} + x''_{s(j),j} \qquad [\text{resp. } \lambda x_{s(j),j}]$$

Le caractère linéaire de g par rapport à $\vec{X}_j$ en résulte.

b) *Vérification du caractère alterné.* — D'après le n° 192, 2°, il suffit de prouver que g associe le scalaire 0 à tout n-uple de E^n dont deux des vecteurs sont égaux.

Soit $(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_k, \ldots, \vec{X}_n)$, avec $\vec{X}_j = \vec{X}_k$, un tel n-uple et G son image par g :

$$(3) \qquad G = C \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \ldots x_{s(j),j} \ldots x_{s(k),k} \ldots x_{s(n),n}$$

τ désignant la transposition de $\mathfrak{S}_n$ qui échange j et k, posons $s = \sigma \circ \tau$ ou $\sigma = s \circ \tau$. Nous avons :

$$\begin{cases} s(j) = \sigma[\tau(j)] = \sigma(k); & s(k) = \sigma[\tau(k)] = \sigma(j); \\ \text{pour } l \neq j \text{ et } l \neq k : & s(l) = \sigma[\tau(l)] = \sigma(l). \end{cases}$$

De plus : $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau)$ et $\varepsilon(\tau) = -1$.

D'autre part s parcourt $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, σ parcourt $\mathfrak{S}_n$. D'où

$$(4) \qquad G = -C \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(k),j} \ldots x_{\sigma(j),k} \ldots x_{\sigma(n),n}.$$

Mais, puisque $\overrightarrow{X_j} = \overrightarrow{X_k}$: $x_{\sigma(k),j} = x_{\sigma(k),k}$ et $x_{\sigma(j),k} = x_{\sigma(j),j}$.

L'expression (4) s'écrit :

$$(5) \qquad G = -C \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(k),k} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

On constate que, s et σ jouant des rôles « muets », les seconds membres de (3) et (5) sont opposés, ce qui exige $G = 0$, puisque le corps K n'est pas de caractéristique 2.

c) *Vérification de* : $g\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right) = C$. Quand $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{X_n} = \overrightarrow{u_n}$, les seuls éléments non nuls de la matrice $\mathfrak{M}$ sont ceux de la diagonale principale; on a, en désignant par e la substitution identique de $\mathfrak{S}_n$:

$$\varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \dots x_{s(n),n} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq e \\ 1 & \text{si } s = e. \end{cases}$$

4° En conclusion, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, sur un corps commutatif K n'ayant pas la caractéristique 2, et un n-uple rangé $\left\{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right\} = \mathfrak{U}$ de vecteurs linéairement indépendants de E, il existe une, et une seule, forme n-linéaire alternée sur E, φ, telle que**

$$\varphi\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\right) = 1.$$

L'image du n-uple générique $\left\{\overrightarrow{X_1}, \dots, \overrightarrow{X_n}\right\}$ de E^n par cette forme est appelé déterminant du n-uple dans la base $\mathfrak{U}$ et désignée par la notation $\text{dét}_{\mathfrak{U}}\left[\overrightarrow{X_1}, \dots, \overrightarrow{X_n}\right]$.

En posant :

$$\overrightarrow{X_j} = x_{1j}\overrightarrow{u_1} + \dots + x_{nj}\overrightarrow{u_n}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

on a :

$$\text{dét}_{\mathfrak{U}}\left[\overrightarrow{X_1}, \dots, \overrightarrow{X_n}\right] = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \dots x_{s(n),n}.$$

Suivant un abus de langage qui nous est familier, l'application φ sera désignée par le symbole $\text{dét}_{\mathfrak{U}}$, et nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Les formes n-linéaires alternées sur E sont les applications C $\text{dét}_{\mathfrak{U}}$; elles constituent un espace vectoriel de dimension un sur le corps K.**

II. PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS

194. *Déterminant d'une matrice carrée.* — 1° L'étude qui précède nous conduit à poser la définition suivante, indépendante de la notion d'espace vectoriel (à laquelle elle est d'ailleurs, historiquement, antérieure).

DÉFINITION. — **Etant donné une matrice carrée $\mathfrak{M}$ d'ordre n, dont les n^2 éléments x_{ij} (i : indice de ligne, j : indice de colonne) appartiennent au corps K, on appelle déterminant de cette matrice, et on note $D(\mathfrak{M})$ ou dét $\mathfrak{M}$ ou $|\mathfrak{M}|$, la somme suivante de $n!$ scalaires de K :**

$$D(\mathfrak{M}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \dots x_{s(n),n}, \qquad (1)$$

$\varepsilon(s)$ désignant la signature de la substitution s qui parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

On écrit :

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D(\mathfrak{M}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ou, abréviativement,

$$\mathfrak{M} = [x_{ij}] \quad \text{et} \quad D(\mathfrak{M}) = |x_{ij}|$$

et on dit que (1) constitue un *développement* du déterminant donné sous la forme (2).

$D(\mathfrak{M})$ **est une somme de $n!$ termes ou monômes; chaque terme se compose d'un produit de n facteurs, et du signe conventionnel $\varepsilon(s)$ dont on le fait précéder; chaque facteur du produit est un élément emprunté à chacune des colonnes de la matrice $\mathfrak{M}$, les numéros des lignes de ces éléments étant tous différents.**

REMARQUES. — I. On évitera de confondre la matrice carrée $\mathfrak{M}$ — qui est une famille indexée d'éléments du corps K — et son déterminant — qui est un élément du corps K, fonction des éléments de la matrice.

II. On voit immédiatement que D est un polynôme du premier degré par rapport à chacune des variables x_{ij}; par rapport à l'ensemble de ces n^2 variables, D est un polynôme homogène de degré n.

2° **Quelques définitions.** — I. Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est dit *déterminant d'ordre n.*

II. — Parmi les $n!$ termes de la somme (1), celui qui est associé à la substitution identique e est dit *terme principal* du déterminant. Étant donné que $\varepsilon(u) = +1$, ce terme est : $x_{11} \dots x_{nn}$. C'est le produit des éléments de la diagonale principale de la matrice $\mathfrak{M}$.

THÉORÈME. — **Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal à son terme principal.**

Supposons, par exemple, que $\mathfrak{M}$ est une matrice triangulaire inférieure, ce qui signifie que les termes situés au dessus de la diagonale sont des 0, ou encore que $x_{ij} = 0$ dès que $i < j$.

Une condition nécessaire pour que le monôme associé à la substitution s dans le dévc-

loppement (1) de $D(\mathfrak{A})$ ne soit pas nul est :

$$\begin{cases} s(1) \leqslant 1 & & & \text{ou} & s(1) = 1 \\ s(2) \leqslant 2 & \text{et} & s(2) \neq 1 & \text{ou} & s(2) = 2 \\ \cdots & & & & \\ s(j) \leqslant j & \text{et} & s(j) \neq 1,\ s(j) \neq 2,\ \ldots,\ s(j) \neq j-1 & \text{ou} & s(j) = j. \end{cases}$$

La proposition en résulte.

3° **Forme plus générale du développement d'un déterminant.** — Le corps K étant commutatif, le monôme de la somme (1) du 1° qui est associé à la substitution s s'écrit, en désignant par σ l'une quelconque des substitutions de $\mathfrak{S}_n$,

$$\varepsilon(s) \times x_{s[\sigma(1)],\,\sigma(1)} \cdots x_{s[\sigma(n)],\,\sigma(n)}$$

ou encore, en posant $s \circ \sigma = \sigma^*$, ce qui entraîne $\varepsilon(s) \times \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^*)$ et $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma^*) \times \varepsilon(\sigma)$:

$$\varepsilon(\sigma^*) \times \varepsilon(\sigma) \times x_{\sigma^*(1),\,\sigma(1)} \cdots x_{\sigma^*(n),\,\sigma(n)}.$$

Fixons σ (resp. σ^*); dans ces conditions s décrit $\mathfrak{S}_n$ si, et seulement si, σ^* (resp. σ) décrit $\mathfrak{S}_n$. Nous disposons donc des nouveaux développements du déterminant de la matrice $\mathfrak{A}$:

$$D(\mathfrak{A}) = \varepsilon(\sigma) \sum_{\substack{\sigma^* \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \text{ fixe}}} \varepsilon(\sigma^*) \times x_{\sigma^*(1),\,\sigma(1)} \cdots x_{\sigma^*(n),\,\sigma(n)} \tag{3}$$

et

$$D(\mathfrak{A}) = \varepsilon(\sigma^*) \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma^* \text{ fixe}}} \varepsilon(\sigma) \times x_{\sigma^*(1),\,\sigma(1)} \cdots x_{\sigma^*(n),\,\sigma(n)} \tag{4}$$

En particulier si, dans l'expression (4) nous choisissons pour substitution fixe σ^* la substitution identique e, ce qui entraîne

$$\varepsilon(\sigma^*) = +1; \qquad \sigma^*(j) = j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

nous avons, en remarquant que la substitution qui parcourt $\mathfrak{S}_n$ joue un « rôle muet » et que nous pouvons l'appeler aussi bien s que σ :

$$D(\mathfrak{A}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{1,\,s(1)} \cdots x_{n,\,s(n)} \tag{5}$$

4° **Théorème de dualité.** — THÉORÈME. — **Une matrice carrée et la matrice transposée ont des déterminants égaux.**

Soit $\mathfrak{A}$ une matrice carrée d'ordre n, à éléments dans le corps K et $\tilde{\mathfrak{A}}$ la matrice transposée de $\mathfrak{A}$. Nous avons ainsi

$$\mathfrak{A} = [x_{ij}] \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathfrak{A}} = [x'_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad x'_{ij} = x_{ji}.$$

Le développement de $D(\mathfrak{A})$, donné par la formule (5) du 3°, s'écrit :

$$D(\mathfrak{A}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s)\, x'_{s(1),\,1} \cdots x'_{s(n),\,n}.$$

On reconnaît le développement de $D(\tilde{\mathfrak{A}})$, sous la forme (1) du 1°.

195. *Développement d'un déterminant d'ordre un, deux et trois.* — Nous allons appliquer la formule

$$(1) \qquad D = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \dots x_{s(n),n}$$

successivement pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

(Pour $n > 3$, la formule (1) conduit à des calculs compliqués et il est préférable de se ramener au cas de $n = 3$, par la méthode que nous exposerons au n° 197).

I. Dans le cas $n = 1$, la seule substitution est l'identité, dont la signature est $+1$. On a

$$D = x_{11} \qquad \text{ou} \qquad \text{dét}[a] = a.$$

II. Dans le cas $n = 2$, on a deux substitutions : l'identité, qui est paire, et la transposition qui est impaire. D'où

$$D = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

III. Dans le cas $n = 3$, on a six substitutions (n° 48). Trois sont paires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Trois sont impaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$D = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{31}x_{12}x_{23} + x_{21}x_{32}x_{13} - x_{11}x_{32}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'').$$

On retrouve ainsi les expressions étudiées aux n°s 139 et 142.

196. *Propriétés des déterminants.* — **1° Notations.** — Soit K un corps commutatif. Nous nous proposons d'étudier les déterminants des matrices de l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans K. Pour cela nous choisirons, une fois pour toutes, un espace vectoriel E, de dimension n, sur le corps K et une base $\mathfrak{A} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de E (par exemple, E sera K^n et $\mathfrak{A}$ la base canonique de K^n). A la matrice $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{M}$ sont associés les vecteurs-colonnes (n° 172, 3°)

$$\begin{array}{c|c} & \vec{X}_1 \ \ldots \ \vec{X}_j \ \ldots \ \vec{X}_n \\ \hline \vec{u}_1 & \\ \vec{u}_2 & \\ \vdots & \\ \vec{u}_n & \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} x_{11} & . & x_{1j} & . & x_{1n} \\ x_{21} & . & x_{2j} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & . & x_{nj} & . & x_{nn} \end{array}\right] = \mathfrak{D}.$$

Nous disposons de la bijection de $\mathfrak{M}$ sur E^n

$$\mathfrak{D} = [x_{ij}] \longrightarrow \begin{cases} (\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) \\ \text{avec : } \vec{X}_j = x_{1j}\vec{u}_1 + \ldots + x_{nj}\vec{u}_n, \ (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Du caractère n - linéaire et alterné de l'application de E^n dans K :

$$(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) \longrightarrow \text{dét}_{ql}\,[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n] = D(\mathfrak{D})$$

nous allons déduire des propriétés de l'application de $\mathfrak{M}$ dans K :

$$\mathfrak{D} \longrightarrow D(\mathfrak{D}).$$

Le théorème de dualité permettra de parler de vecteurs-lignes et d'étendre aux lignes les propriétés que nous allons démontrer pour les colonnes.

2° **Conséquences du caractère n- linéaire de dét$_{ql}$.** — I. Étant donné $j \in [1, n]$, limitons-nous ici à celles des matrices $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{M}$ dont les vecteurs-colonnes $\vec{X}_k$, $k \neq j$, sont des vecteurs donnés, $\vec{X}_j$ étant le vecteur générique de E. L'application

$$\vec{X}_j \longrightarrow D(\mathfrak{D})$$

est alors une forme linéaire (application linéaire de E dans K). Nous écrirons

$$D(\mathfrak{D}) = A_{1j}x_{1j} + \ldots + A_{nj}x_{nj}$$

et nous constaterons que, pour j et i donnés, A_{ij} est l'image du vecteur $\vec{u}_i$ de la base par la forme, soit

$$A_{ij} = \text{dét}_{ql}\,[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{j-1}, \vec{u}_i, \vec{X}_{j+1}, \ldots \vec{X}_n].$$

En résumé, nous retiendrons :

THÉORÈME. — $D(\mathfrak{D})$ **est une forme linéaire des éléments d'une rangée de** $\mathfrak{D}$.

II. Dans ce qui suit, $\mathfrak{D}$ est une matrice quelconque de $\mathfrak{M}$. D'après I) :
Si $\mathfrak{D}$ a une rangée dont les éléments sont des 0, $D(\mathfrak{D}) = 0$.
D'autre part, toujours d'après I), si $\lambda \in K$:

$$\text{dét}_{ql}\,[\vec{X}_1, \ldots, \lambda\vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n] = \lambda\,\text{dét}_{ql}\,[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots \vec{X}_n].$$

Si on multiplie par un même facteur λ tous les éléments d'une rangée de $\mathfrak{A}$, $D(\mathfrak{A})$ est multiplié par λ.

Si on multiplie par un même facteur λ tous les éléments de $\mathfrak{A}$, $D(\mathfrak{A})$ est multiplié par λ^n :

$$D(\lambda\mathfrak{A}) = \lambda^n D(\mathfrak{A}).$$

APPLICATION. — *Le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair est nul.*

La matrice $\mathfrak{A}$ étant antisymétrique, $\tilde{\mathfrak{A}} = (-1)\mathfrak{A}$.

Par suite $D(\tilde{\mathfrak{A}}) = (-1)^n D(\mathfrak{A})$ et $D(\tilde{\mathfrak{A}}) = D(\mathfrak{A})$.

Si n est impair, $D(\mathfrak{A}) = -D(\mathfrak{A})$ et par suite $D(\mathfrak{A}) = 0$.

III) $$\text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}'_j + \vec{X}''_j, \ldots, \vec{X}_n\right]$$
$$= \text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}'_j, \ldots, \vec{X}_n\right] + \text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}''_j, \ldots, \vec{X}_n\right].$$

Si les éléments d'une rangée de $\mathfrak{A}$ sont des sommes de p termes, $D(\mathfrak{A})$ est la somme des p déterminants obtenus en remplaçant successivement cette rangée par les termes de rangs 1, 2, ..., p de ces sommes.

3° Conséquences du caractère alterné de dét_{ql}.

$$\text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_n\right] = -\text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_n\right].$$

I) Échanger deux colonnes de $\mathfrak{A}$, la i-ième et la j-ième, c'est échanger des vecteurs $\vec{X}_i$ et $\vec{X}_j$ de l'espace vectoriel E; par suite

Si on échange deux rangées parallèles de $\mathfrak{A}$, $D(\mathfrak{A})$ est remplacé par le scalaire opposé de K.

II) Si deux colonnes de $\mathfrak{A}$ sont identiques, deux des vecteurs $\vec{X}_i (i = 1, 2, \ldots n)$ sont identiques, et par suite (n° 191, 2°) leur déterminant est nul.

Si $\mathfrak{A}$ a deux rangées parallèles identiques, $D(\mathfrak{A}) = 0$.

4° Conséquences du caractère n-linéaire et du caractère alterné de dét_{ql}.

— Les résultats suivants résultent de ce que dét_{ql} associe le scalaire 0 à tout n-uple de E^n dont les vecteurs sont dépendants dans E (n° 193, 1°).

I. — Si les éléments de deux rangées parallèles de $\mathfrak{A}$ sont proportionnels, $D(\mathfrak{A}) = 0$.

II. — Si les éléments d'une rangée de $\mathfrak{A}$ sont obtenus par une même combinaison linéaire des éléments correspondants des rangées parallèles, $D(\mathfrak{A}) = 0$.

III. On ne change pas $D(\mathfrak{A})$ en ajoutant aux éléments d'une rangée de $\mathfrak{A}$ les éléments correspondants des rangées parallèles multipliés par des facteurs arbitraires.

Par exemple ajouter aux éléments de la première colonne ceux de la seconde multipliés par λ_2, ..., ceux de la n-ième multipliés par λ_n, c'est remplacer le vecteur $\vec{X}_1$ par le vecteur $\vec{X}_1 + \lambda_2\vec{X}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{X}_n$. Alors

$$D' = \text{dét}_{ql}\left[\vec{X}_1 + \lambda_2\vec{X}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{X}_n, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right]$$

$$D' = D(\%) + \text{dét}_{ql}\left[\lambda_2\vec{X}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{X}_n, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right]$$

et, au second membre, le second déterminant est nul d'après II.

Par suite $$D' = D(\%).$$

EXERCICE. — *Déterminant cyclique d'ordre trois.* — Une matrice cyclique est une matrice carrée dont les diverses colonnes se déduisent de la première par substitution circulaire; le déterminant d'une matrice cyclique est appelé déterminant cyclique.

Soit (sur le corps des complexes) $D = \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}$

La règle de Sarrus donne immédiatement

$$D = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments correspondants des deux autres colonnes, nous obtenons

$$D = \begin{vmatrix} x+y+z & z & y \\ x+y+z & x & z \\ x+z+y & y & x \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & z & y \\ 1 & x & z \\ 1 & y & x \end{vmatrix}$$

doù $$D = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

On peut aussi ajouter aux éléments de la première colonne ceux de la seconde multipliés par j^2, et ceux de la troisième multipliés par j, j étant une racine cubique imaginaire de l'unité.

$$D = \begin{vmatrix} x+jy+j^2z & z & y \\ j^2x+y+jz & x & z \\ jx+j^2y+z & y & x \end{vmatrix} = (x+jy+j^2z)\begin{vmatrix} 1 & z & y \\ j^2 & x & z \\ j & y & x \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy = (x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz).$$

En définitive, on peut écrire les égalités

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz) \quad (1)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy) \quad (2)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]. \quad (3)$$

La dernière égalité montre que, si x, y, z sont des nombres réels distincts

$$x+y+z=0 \iff x^3+y^3+z^3-3xyz=0.$$

Il en résulte que, dans le corps des réels, les solutions d'une équation de la forme

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$$

sont celles de l'équation

$$(A+B+C)^3-27ABC=0$$

qui ne donnent pas la même valeur à A, B, C.

197. *Développement d'un déterminant suivant les éléments d'une rangée.* — 1° Soit $\mathfrak{M} = [x_{ij}]$ une matrice, à éléments dans le corps commutatif K. Son déterminant

$$(1) \qquad D(\mathfrak{M}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \times x_{s(1),1} \ \dots \ x_{s(n),n}$$

est une somme de $n!$ monômes dans chacun desquels figure un, et un seul, élément d'une ligne donnée ainsi que un, un seul élément d'une colonne donnée.

Pour i et j donnés, appartenant au segment $[1, n]$, groupons ceux des monômes de $D(\mathfrak{M})$ qui contiennent l'élément x_{ij} de $\mathfrak{M}$. Nous obtenons ainsi une somme partielle qui s'écrit, après factorisation de x_{ij},

$$A_{ij}x_{ij}.$$

A_{ij} est indépendant des éléments de la ligne i et de la colonne j de $\mathfrak{M}$. Il en résulte que si, j(resp. i) restant fixe, nous considérons successivement les valeurs 1, 2, ..., n de i(resp j) nous avons l'égalité

$$D(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_{ij} \qquad \left[\text{resp. } D(\mathfrak{M}) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_{ij}\right]$$

qui est appelée *développement du déterminant* $D(\mathfrak{M})$ *suivant la j-ième colonne* [resp. *la i-ième ligne*] *de la matrice* $\mathfrak{M}$. On retrouve ainsi la propriété de $D(\mathfrak{M})$ d'être une forme linéaire des éléments d'une quelconque des rangées de $\mathfrak{M}$.

2° Quelques définitions.

DÉFINITION I. **A_{ij} est appelé cofacteur de x_{ij} dans $D(\mathfrak{M})$.**

DÉFINITION II. — **La matrice carrée d'ordre n dont le terme de la ligne i et de la colonne j est A_{ij} est dite comatrice de $\mathfrak{M}$; on la note com$\mathfrak{M}$; son déterminant est dit adjoint de $D(\mathfrak{M})$.**

DÉFINITION III. — **Le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice $\mathfrak{M}$ est dit mineur relatif à l'élément x_{ij}; on le note D_{ij}.**

3° THÉORÈME : $$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

a) *Cofacteur de* x_{nn}. — D'après sa définition même

$$A_{nn} = \sum_{s' \in \mathfrak{S}'_n} \varepsilon(s') \times x_{s'(1),1} \ \dots \ x_{s'(n-1),n-1}$$

$\mathfrak{S}'_n$ désignant la partie de $\mathfrak{S}_n$ formée par les substitutions d'ordre n qui transforment n en n.

La correspondance

$$s' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 & n \\ s'(1) & \dots & s'(n-1) & n \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ s'(1) & \dots & s'(n-1) \end{pmatrix}$$

est une bijection de $\mathfrak{S}'_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$ telle que $\varepsilon(s') = \varepsilon(\sigma)$.

En effet, $\{\alpha, \ldots, \chi\}$ étant une permutation quelconque des $n-1$ premiers entiers positifs, les permutations $\{\alpha, \ldots, \chi, n\}$ et $\{\alpha, \ldots, \chi\}$ présentent le même nombre d'inversions. On en déduit

$$A_{n,n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \times x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n-1),n-1}$$

On reconnaît, au second membre, le déterminant

$$D_{n,n} = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1,n-1} \\ x_{21} & \ldots & x_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1,1} & \ldots & x_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

b) *Cofacteur* A_{ij} *de* x_{ij}. — D'après le n° 196, 2°, I, A_{ij} est le déterminant de la matrice $\mathfrak{X}'$ déduite de $\mathfrak{X}$ en remplaçant tous les éléments de la j-ième colonne par des 0, sauf x_{ij} qui est remplacé par 1.

En utilisant le théorème de dualité, on constate que A_{ij} est aussi le déterminant de la matrice $\mathfrak{X}''$ déduite de $\mathfrak{X}'$ en remplaçant tous les éléments de la i-ième ligne par des 0, sauf celui qui correspond à la colonne j, lequel reste égal à 1. $\mathfrak{X}''$ est de la forme

$$\mathfrak{X}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \boxed{M_1} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \boxed{M_2} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \boxed{M_3} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \boxed{M_4} \end{array}\right]$$

chacune des matrices M_1, M_2, M_3, M_4 est de la forme $[x_{pq}]$ avec

pour M_1 $\begin{cases} p = 1, \ldots, i-1 \\ q = 1, \ldots, j-1 \end{cases}$

pour M_2 $\begin{cases} p = 1, \ldots, i-1 \\ q = j+1, \ldots, n \end{cases}$

pour M_3 $\begin{cases} p = i+1, \ldots, n \\ q = 1, \ldots, j-1 \end{cases}$

pour M_4 $\begin{cases} p = i+1, \ldots, n \\ q = j+1, \ldots, n. \end{cases}$

En transposant la j-ième colonne de $\mathfrak{X}''$ successivement avec les $n-j$ colonnes qui la suivent on obtient la matrice $\mathfrak{X}_1$ (ci-dessous) dont le déterminant se déduit de celui de $\mathfrak{X}''$ par $n-j$ changements de signe

$$D(\mathfrak{X}_1) = (-1)^{n-j} D(\mathfrak{X}'')$$

$$\mathfrak{X}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \boxed{M_1} & \boxed{M_2} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ \hline \boxed{M_3} & \boxed{M_4} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \end{array}\right] \qquad \mathfrak{X}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \boxed{M_1} & \boxed{M_2} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline \boxed{M_3} & \boxed{M_4} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right]$$

En transposant la i-ième ligne de $\mathfrak{B}_1$ successivement avec les $n - i$ lignes qui la suivent, on obtient la matrice $\mathfrak{B}_2$ (ci-dessus) dont le déterminant se déduit de celui de $\mathfrak{B}_1$ par $n - i$ changements de signe.

$$D(\mathfrak{B}_2) = (-1)^{n-i} D(\mathfrak{B}_1) = (-1)^{2n-(i+j)} D(\mathfrak{B}'')$$

ou
$$D(\mathfrak{B}'') = (-1)^{i+j} D(\mathfrak{B}_2).$$

Or, d'après a), $D(\mathfrak{B}_2)$ n'est autre que le déterminant mineur D_{ij}.

En conclusion
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

4° **Formules diverses de développement.** — *a*) Nous pouvons à l'aide de la notation des mineurs, écrire le développement de $D(\mathfrak{B})$ suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, de la i-ième ligne par exemple :

$$D(\mathfrak{B}) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}.$$

Le développement d'un déterminant d'ordre n est ainsi ramené à celui de déterminants d'ordre $n - 1$, développement qui se ramène à celui de déterminants d'ordre $n - 2$, etc.

Il est utile d'observer que le signe dont il convient de faire précéder un mineur pour obtenir le cofacteur d'un élément change quand on passe d'un élément à un élément consécutif.

Cas particulier. — Si tous les éléments d'une rangée d'une matrice carrée sont nuls à l'exception d'un seul, son déterminant se réduit au produit de cet élément par son cofacteur.

b) I. Soit : $D(\mathfrak{B}) = A_{1j}x_{1j} + A_{2j}x_{2j} + \ldots + A_{nj}x_{nj}$

le développement de D par rapport aux éléments de la j-ième colonne, et considérons l'expression $\Delta = A_{1j}\lambda_1 + A_{2j}\lambda_2 + \ldots + A_{nj}\lambda_n$.

Comme les coefficients $A_{1j}, \ldots, A_{nj}$ sont indépendants des éléments de la j-ième colonne de la matrice, Δ est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \lambda_1 & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & \cdot & \lambda_2 & \cdot & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdot & \lambda_n & \cdot & x_{nn} \end{bmatrix}$$

colonnes $1 \quad \ldots \quad j \quad \ldots \quad n$

obtenue en remplaçant dans la matrice primitive les éléments de la j-ième colonne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

II. Sans modifier les colonnes autres que la j-ième, remplaçons les éléments de cette colonne par ceux d'une autre colonne, la i-ième par exemple ($j \neq i$).

La matrice obtenue a pour déterminant

$$A_{1j}x_{1i} + A_{2j}x_{2i} + \ldots + A_{nj}x_{ni}$$

et comme d'autre part les colonnes de rangs i et j sont maintenant identiques, le déterminant précédent est nul. Donc

$$A_{1j}x_{1i} + A_{2j}x_{2i} + \ldots + A_{nj}x_{ni} = 0$$

pour $\quad i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n.$

Et rappelons que

$$A_{1j}x_{1j} + A_{2j}x_{2j} + \ldots + A_{nj}x_{nj} = D(\mathfrak{X}).$$

On résume les résultats précédents dans une formule unique

$$A_{1j}x_{1i} + A_{2j}x_{2i} + \ldots + A_{nj}x_{ni} = \delta_{ij}D(\mathfrak{X}),$$

en utilisant les symboles de Kronecker (173, 5°).

5° **Autre application.** *Tout déterminant d'ordre n peut-être regardé comme un déterminant d'ordre m et cela quelque soit le naturel* $m \geqslant n$.

Soit $\mathfrak{X}$ une matrice carrée d'ordre n; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignant des scalaires quelconques de K, associons à $\mathfrak{X}$ la matrice carrée $\mathfrak{Y}$, d'ordre $n+1$, telle que

$$\mathfrak{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{X} & \\ \lambda_n & & & \end{bmatrix}$$

En développant $D(\mathfrak{Y})$ suivant les éléments de la première ligne, on constate

$$D(\mathfrak{Y}) = D(\mathfrak{X}).$$

On étend ce résultat en raisonnant par récurrence.

6° Exemple I. — Soit $\quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Le développement par rapport aux éléments de la 1re ligne donne

$$D = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

et $\quad D = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a''),$

c'est le résultat sur lequel on a bâti la théorie du n° 142.

II. Déterminant de Vandermonde. — Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$; le développement par rapport à la 3e colonne donne

$$D = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a).$$

D est un polynôme de degré 2 en a, dont les zéros sont b et c comme on le voit immé-

diatement sur la forme initiale de D : en remplaçant a par b, on obtient une matrice dont les deux premières lignes sont identiques, son déterminant est nul; par suite

$$D = k(a - b)(a - c)$$

k est le cofacteur de a^2, c'est-à-dire $c - b$. Finalement on peut écrire

$$D = (a - b)(b - c)(c - a)$$

et obtenir l'identité

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Le déterminant D ne peut être nul que si deux des trois nombres a, b, c sont égaux.

Plus généralement, on appelle déterminant de Vandermonde tout déterminant de la forme

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

D est un polynôme en a, de degré $n - 1$, dont les zéros sont $b, c, \dots l$, comme on le voit en remplaçant dans (1) a par $b, c, \dots l$.

Par suite $$D = k\,(b - a)\,(c - a)\,\dots\,(l - a). \qquad (2)$$

Sous la forme (1), le cofacteur de a^{n-1} est $(-1)^{n+1}\,D_1$, D_1 étant le mineur obtenu en barrant la 1re ligne et la n^e colonne. D_1 est le déterminant de Vandermonde construit avec $b, c, \dots l$.

Sous la forme (2), le cofacteur de a^{n-1} est $k.(-1)^{n-1}$.

Finalement $k = D_1$ et

$$D = D_1(b - a)\,(c - a)\,\dots\,(l - a). \qquad (3)$$

En développant D_1 par rapport à b comme on a développé D par rapport à a, et en poursuivant de même, on obtient

$$D = (b - a)\,(c - a)\,(d - a)\,\dots\,(l - a)\,(c - b)\,(d - b)\,\dots\,(l - b)\,(d - c)\,\dots\,(l - c)\,\dots\,\dots\,(l - k) \qquad (3)$$

D est le produit des différences 2 à 2 des n nombres $a, b, \dots l$, ces différences étant écrites dans un ordre convenable.

D n'est nul que si deux des nombres $a, b, \dots, l$ sont égaux.

III. INDÉPENDANCE DE n VECTEURS
(espace vectoriel de dimension n)
A L'AIDE DES DÉTERMINANTS

198. ***Changement de base dans un déterminant de n vecteurs.*** — **1° Rappel de résultats antérieurs.** — Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps K.

Soit n vecteurs $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$, combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ de E. et soit A la matrice des coefficients scalaires de ces combinaisons linéaires :

$$\begin{array}{c|c} & \vec{A}_1 \ \ldots \ \vec{A}_n \\ \hline \vec{u}_1 & \\ \vec{u}_2 & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \\ \vec{u}_n & a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = A \end{array}$$

Nous avons vu, au n° **183**, qu'on peut écrire

$$[\vec{A}_1 \ \ldots \ \vec{A}_n] = [\vec{u}_1 \ \ldots \ \vec{u}_n] \times A, \qquad (1)$$

les matrices

$$[\vec{A}_1 \ \ldots \ \vec{A}_n] \quad \text{et} \quad [\vec{u}_1 \ \ldots \ \vec{u}_n]$$

étant celles des coefficients scalaires des combinaisons linéaires des vecteurs d'un système $\mathcal{S}$ quelconque permettant d'obtenir les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

Nous avons vu, au n° **193**, que si f est une forme multilinéaire alternée d'ordre n sur E,

$$f(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n) = f(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n) \times (\text{dét}A) \qquad (2)$$

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2)

sera utilisée fréquemment par la suite.

2° **Changement de base.** — Supposons que $\mathcal{U}$ soit une base de E,

$$\text{dét}(A) = \text{dét}_{\mathcal{U}}[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n]. \qquad (3)$$

Choisissons une autre base $\mathcal{E}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E; le déterminant de n vecteurs de E, rapportés à la base $\mathcal{E}$, est une forme multilinéaire alternée d'ordre n sur E, par suite

$$\text{dét}_{\mathcal{E}}[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n] = \text{dét}_{\mathcal{E}}[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n] \times \text{dét}(A). \qquad (4)$$

En remplaçant dans (4), dét (A) par son expression (3), nous obtenons la formule fondamentale

$$\text{dét}_{\mathcal{E}}[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n] = \text{dét}_{\mathcal{U}}[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n] \times \text{dét}_{\mathcal{E}}[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]. \qquad (5)$$

199. ***Condition de dépendance ou d'indépendance de*** n ***vecteurs dans un espace vectoriel de dimension*** n. — Nous supposons l'espace vectoriel E rapporté à une base $\mathcal{U}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, et n vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$,

définis par leurs coordonnées :

$$\begin{array}{c|c} & \vec{A}_i \\ \hline \vec{u}_j & [a_{ji}] = A \end{array}$$

Soit $D = \text{dét}(A) = \text{dét}_{\mathfrak{U}}\left[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right]$.

1° THÉORÈME. — **Si les vecteurs $\vec{A}_i$ sont dépendants, leur déterminant D est nul.**

Il s'agit de la propriété générale démontrée au n° 193, 2° et suivant laquelle toute forme multilinéaire alternée d'ordre n sur E prend la valeur 0 pour tout système de vecteurs dépendants.

2° THÉORÈME. — **Si les vecteurs $\vec{A}_i$ sont indépendants, leur déterminant D n'est pas nul.**

Puisque les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ sont indépendants, ils forment une base $\mathfrak{B}$ de E. La formule (5) du paragraphe précédent donne

$$\text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right] = \text{dét}_{\mathfrak{U}}\left[\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\right] \times \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right]$$

c'est-à-dire, en posant $\Delta = \text{dét}_{\mathfrak{B}}\left[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right]$.

$$1 = D \times \Delta,$$

il en résulte que D n'est pas nul.

3° On peut donc, par l'absurde, conclure aux réciproques et énoncer les deux théorèmes suivants qui s'appliquent quelle que soit la base à laquelle les vecteurs sont rapportés :

THÉORÈME I. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que n vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ à n coordonnées soient indépendants est que le déterminant de la matrice de leurs coordonnées ne soit pas nul.**

THÉORÈME II. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que n vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ à n coordonnées soient dépendants est que le déterminant de la matrice de leurs coordonnées soit nul.**

On peut encore énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Pour que le déterminant d'une matrice carrée soit nul, il faut et il suffit qu'il existe une même relation linéaire et homogène à coefficients non tous nuls entre les éléments des lignes (ou entre les éléments des colonnes).

4° **Matrice carrée régulière.** — DÉFINITION. — **On dit qu'une matrice carrée est régulière si son déterminant n'est pas nul.**

Cette dénomination permet de noter les équivalences logiques suivantes :

$$\left.\begin{array}{c}\text{la matrice carrée A}\\ \text{est régulière}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{les vecteurs-colonnes}\\ \text{de A sont indépendants}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{la matrice carrée A}\\ \text{est régulière}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{les vecteurs-lignes}\\ \text{de A sont indépendants.}\end{array}\right.$$

Il en résulte que si les vecteurs-lignes d'une matrice carrée sont indépendants, les vecteurs-colonnes sont aussi indépendants, et inversement.

5° On dit parfois qu'une matrice carrée est *singulière* si son déterminant est nul.

*6° EXEMPLE. — Nous avons vu (n° 93) que l'ensemble $\mathfrak{P}_n$ des polynômes de degré au plus égal à n, à coefficients pris dans un corps K, constitue un espace vectoriel de dimension $n+1$ dont une base est

$$\mathfrak{U}\ \{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}.$$

Montrons que tout système de polynômes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, de degrés respectifs $0, 1, \ldots, n$, à coefficients pris dans K, constitue une base de $\mathfrak{P}_n$. Posons en effet

$$Q_k = \alpha_{k0} + \alpha_{k1}x + \ldots + \alpha_{kk}x^k \qquad \begin{array}{l}\alpha_{ki} \in K.\\ \alpha_{kk} \neq 0.\end{array}$$

Le déterminant des coordonnées des polynômes, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, dans la base $\mathfrak{U}$, est le déterminant triangulaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

il se réduit à son terme diagonal $\alpha_{00}\,\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$, qui n'est pas nul.

Par suite, tout polynôme $f(x)$ de $\mathfrak{P}_n$ peut se mettre, et d'une seule façon, sous la forme

$$\gamma_0 Q_0 + \gamma_1 Q_1 + \ldots + \gamma_n Q_n,$$

les coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, pris dans K, se déterminant par identification.

200. ***Produit de deux déterminants de même ordre.*** — 1° Soit A et B deux matrices carrées (n, n); on peut les considérer comme matrices de combinaisons linéaires de vecteurs.

Soit $\mathfrak{U}$ un système de n vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ de l'espace vectoriel E de dimension n, et $\mathfrak{A}$ le système de n vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$, combinaisons linéaires des précédents à l'aide de A :

$$\vec{u}_j \left| \overbrace{[a_{ji}]}^{\vec{A}_i} \right. = A \qquad \left[\vec{A}_1 \ldots \vec{A}_n\right] = \left[\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\right] \times A. \qquad (1)$$

Nous supposons que $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ sont les combinaisons linéaires de n vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ d'un système $\mathfrak{V}$ à l'aide de B :

$$\vec{v}_k \left| \overbrace{[b_{kj}]}^{\vec{u}_j} \right. = B \qquad \left[\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\right] = \left[\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\right] \times B. \qquad (2)$$

(1) et (2) entraînent (183, 4°)

$$\left[\vec{A}_1 \dots \vec{A}_n\right] = \left[\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\right] \times (BA). \qquad (3)$$

Supposons que $\mathcal{V}$ soit une base de E,

(1) $\Longrightarrow$ (1′) $\det_{\mathcal{V}}\left[\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\right] = \det_{\mathcal{V}}\left[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\right] \times \det(A)$

(2) $\Longrightarrow$ (2′) $\det_{\mathcal{V}}\left[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\right] = \det(B)$

(3) $\Longrightarrow$ (3′) $\det_{\mathcal{V}}\left[\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\right] = \det(BA).$

La comparaison de (3′) et de (1′), compte tenu de (2′), donne

$$\det(B) \times \det(A) = \det(BA)$$

ou, avec d'autres notations,

$$|BA| = |B| \times |A|. \qquad (4)$$

THÉORÈME. — **Le déterminant du produit de la matrice carrée A par la matrice carrée B (à gauche) est le produit des déterminants des deux matrices.**

2° CONSÉQUENCES. — *a*) Les produits BA et AB donnent en général des matrices distinctes, mais ces matrices ont même déterminant, le produit $|B|\,|A|$ étant commutatif.

b) Si les matrices A et B sont régulières, la matrice BA l'est aussi, les déterminants correspondants n'étant pas nuls.

Si la matrice BA est régulière, chacune des deux matrices A et B est régulière.

3° REMARQUES SUR LE CALCUL DU PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS. — L'étude précédente nous a conduits, pour former $|B| \times |A|$ à multiplier les éléments de la k^e ligne de B par ceux de la i^e colonne de A. Mais, comme les matrices $\tilde{B}$ et B ont même déterminant, ainsi que les matrices $\tilde{A}$ et A, on voit finalement que le produit de deux déterminants peut se faire de 4 façons différentes :

ligne par colonne,	ligne par ligne
colonne par ligne,	colonne par colonne.

4° **Produit de deux déterminants d'ordres différents.** — Soit à effectuer le produit des déterminants des matrices carrées A et B d'ordres n et p avec, par exemple, $n < p$. Nous avons appris au n° 197, 6°, à construire à partir de A une matrice carrée d'ordre p, C, dont le déterminant est égal à celui de A. Nous sommes ramenés à effectuer le produit des déterminants de C et B, ce que nous savons faire.

201. ***Inverse d'une matrice carrée régulière.*** — 1° Soit A une matrice carrée d'ordre n. Désignons par B la transposée de la comatrice de A, soit

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad b_{ij} = A_{ji},$$

A_{ij} désignant le cofacteur (197) de a_{ij} dans dét A.

Dans P = AB [resp. Q = BA], le terme correspondant à la ligne i et à la colonne j est

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad \text{ou} \qquad p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

$$\left[\text{resp. } q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} \qquad \text{ou} \qquad q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right]$$

Selon que $i = j$ ou $i \neq j$ on reconnaît en p_{ij} [resp. q_{ij}] le déterminant de la matrice A ou le déterminant de la matrice déduite de A en remplaçant la j-ième ligne par la i-ième [resp. en remplaçant la i-ième colonne par la j-ième]. Ainsi

$$p_{ij}[\text{resp. } q_{ij}] \begin{cases} = \text{dét A} & \text{si} \quad i = j \\ = 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

La matrice P (resp. Q) est la matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à dét A. Autrement dit :

THÉORÈME. — **Si A est une matrice carrée d'ordre n, B la transposée de la comatrice de A, et I_n la matrice-unité d'ordre n,** alors

$$\text{(1)} \qquad BA = (\text{dét A})I_n \qquad \text{et} \qquad AB = (\text{dét A})\, I_n.$$

2° **Application au déterminant adjoint.** — Rappelons (197, 2°) que le déterminant adjoint du déterminant de A est celui de la comatrice de A et, par suite, celui de la transposée, B, de cette comatrice. La relation (1) donne, compte-tenu de dét $I_n = 1$

$$\text{dét A} \times \text{dét (com A)} = (\text{dét A})^n.$$

Si la matrice A est régulière, dét A $\neq 0$ et dét (com A) $= (\text{dét A})^{n-1}$.

3° DÉFINITION. — **On dit qu'une matrice carrée d'ordre n, A, admet une inverse à gauche (resp. à droite) s'il existe une matrice carrée d'ordre n, G (resp. D) telle que**

$$\text{(2)} \qquad GA = I_n \qquad (\text{resp. } AD = I_n).$$

Notons que la relation

$$\text{dét G} \times \text{dét A} = 1 \qquad (\text{resp. dét A} \times \text{dét D} = 1)$$

implique que A est régulière et que G (resp. D) est, elle aussi, régulière.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Toute matrice carrée régulière admet une, et une seule, matrice inverse à gauche, une et une seule matrice inverse à droite. Ces**

matrices sont égales; on les désigne par A^{-1} et on dit que A^{-1} est la matrice inverse de la matrice régulière A; A^{-1} est elle-même régulière et admet pour inverse A.

a) *Existence d'une matrice inverse.* — La régularité de A se traduisant par : dét $A \neq 0$, la relation (1) du 1° s'écrit

$$\left(\frac{1}{\text{dét A}}B\right)A = I_n \qquad \text{et} \qquad A\left(\frac{1}{\text{dét A}}B\right) = I_n$$

La matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét A}}\, tr\,(\text{com A})$$

est donc inverse de A, aussi bien à gauche, qu'à droite.

L'élément générique b_{ij} de A^{-1} est donné par

$$A^{-1} = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \frac{1}{\text{dét A}} A_{ji}.$$

b) *Unicité.* — Soit G (resp. D) une matrice inverse de A à gauche (resp. à droite). En multipliant à droite (resp. à gauche) les deux membres de (2) par A^{-1}, nous obtenons

$$GAA^{-1} = I_nA^{-1} \qquad (\text{resp. } A^{-1}AD = A^{-1}I_n)$$

et

$$G = A^{-1} \qquad (\text{resp. } D = A^{-1}).$$

c) Nous retiendrons l'équivalence logique :

A est une matrice carrée

A est régulière $\Longleftrightarrow$ A est inversible.

4° **L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.** — Les matrices A et $\tilde{A}$ ont même déterminant Δ; si Δ n'est pas nul, elles sont simultanément régulières.

Comparons leurs inverses.

$$\tilde{A} = [a'_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad a'_{ij} = a_{ji}$$

$(\tilde{A})^{-1}$ a pour élément générique $b'_{ij} = \frac{A'_{ji}}{\Delta}$ ou $\frac{A_{ij}}{\Delta}$.

$\text{tr}(A^{-1})$ a pour élément générique $b''_{ij} = b_{ji} = \frac{A_{ij}}{\Delta}$

finalement $$\text{tr}(A^{-1}) = (\text{tr A})^{-1}.$$

La recherche de l'inverse et celle de la transposée sont donc deux démarches permutables.

202. ***Décomposition d'un vecteur suivant n vecteurs indépendants dans un espace vectoriel de dimension n.*** — 1° **Déterminant-vecteur.** — Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps K. Considérons le

déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dont les éléments appartiennent au corps K.

$$D = A_{n1}a_{n1} + A_{n2}a_{n2} + \ldots + A_{nn}a_{nn},$$

A_{ni} étant le cofacteur de l'élément a_{ni}.

En désignant par $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ des vecteurs de E, on convient de représenter le vecteur

$$\vec{\Delta} = A_{n1}\vec{X}_1 + A_{n2}\vec{X}_2 + \ldots + A_{nn}\vec{X}_n, \qquad (1)$$

combinaison linéaire des $\vec{X}_i$ dont les multiplicateurs sont les cofacteurs A_{ni}, par la notation

$$\vec{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & a_{n-1,n} \\ \vec{X}_1 & \vec{X}_2 & . & \vec{X}_n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

appelée *déterminant-vecteur.*

En d'autres termes, on convient de développer $\vec{\Delta}$ (écrit sous forme (2)) exclusivement par rapport aux éléments de la dernière ligne comme s'il s'agissait d'un déterminant usuel, les cofacteurs étant les mêmes, et ne dépendant que des $(n-1)$ premières lignes.

2° Calcul des composantes de Δ dans une base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ de E.

Posons

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \vec{u}_1 x_{1j} + \vec{u}_2 x_{2j} + \ldots + \vec{u}_n x_{nj} \\ j = 1, 2, \ldots n. \end{cases}$$

$$\vec{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} A_{nj}\vec{X}_j = \sum_{j=1}^{n} A_{nj}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i x_{ij}\right).$$

$$\vec{\Delta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{nj}x_{ij}\right)\vec{u}_i.$$

La composante scalaire de $\vec{\Delta}$ relative à $\vec{u}_i$ est

$$A_{n1}x_{i1} + A_{n2}x_{i2} + \ldots + A_{nn}x_{in},$$

c'est le développement du déterminant déduit de D en remplaçant la dernière ligne par les coordonnées de rang i des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$

$$\vec{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & a_{n-1,n} \\ x_{i1} & x_{i2} & . & x_{in} \end{vmatrix}.$$

3° **Application à la décomposition d'un vecteur dans une base de E.** — Soit $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ n vecteurs indépendants de l'espace vectoriel E, de dimension n; E étant rapporté à une base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, soit $A = [a_{ij}]$ la matrice des coordonnées des vecteurs $\vec{A}_i$ par rapport à $\mathfrak{U}$; par hypothèse (199), le déterminant Δ de A n'est pas nul.

Soit $\vec{B}$ un vecteur de E, déterminé par ses coordonnées $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans $\mathfrak{U}$. On sait (157) que $\vec{B}$ est une combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$; la théorie des déterminants va permettre d'obtenir une expression simple des coefficients scalaires de cette combinaison linéaire, c'est-à-dire les coordonnées de $\vec{B}$ dans la base $\{\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\}$.

Considérons à cet effet le déterminant-vecteur :

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} & b_n \\ \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & . & \vec{A}_n & \vec{B} \end{vmatrix}.$$

En appelant $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, \Delta$ les cofacteurs des éléments de la dernière ligne de $\vec{G}$ (Δ n'est autre que le déterminant de la matrice A; $\Delta \neq 0$),

$$\vec{G} = \Delta_1\vec{A}_1 + \Delta_2\vec{A}_2 + \ldots + \Delta_n\vec{A}_n + \Delta\vec{B}.$$

$\vec{G}$ est un vecteur de E dont la i-ième coordonnée est d'après le 2°,

$$g_i = \Delta_1 a_{i1} + \Delta_2 a_{i2} + \ldots + \Delta_n a_{in} + \Delta b_i;$$

$g_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ d'après les résultats du n° 197, 2°.

Le vecteur $\vec{G}$ est donc le vecteur nul de E, et comme $\Delta \neq 0$, on peut écrire

$$\vec{B} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}\vec{A}_1 - \ldots - \frac{\Delta_n}{\Delta}\vec{A}_n.$$

On connaît ainsi, sous forme de quotients de déterminants d'ordre n, les coordonnées de B relatives à la base $\{\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\}$.

IV. DÉTERMINATION PRATIQUE DU RANG (systèmes de vecteurs ou de formes, applications linéaires) A L'AIDE DES DÉTERMINANTS

203. *Rappel de la notion de rang.* — 1° A divers éléments associés à un espace vectoriel E sur le corps K on a associé un entier naturel, appelé rang.

a) *Système de vecteurs* $\mathcal{S}$. — Le rang $\rho(\mathcal{S})$ (n° 153) est le nombre maximum de vecteurs formant un système libre extrait de $\mathcal{S}$.

b) *Application linéaire f.* — Le rang $\rho(f)$ est la dimension de l'image $f(E)$ (n° 166).

c) *Système de formes linéaires* $\mathcal{S}^*$. — Le rang $\rho(\mathcal{S}^*)$ (n° 185) se définit comme en *a*) par la considération de l'espace dual.

Dans chaque cas, la définition est intrinsèque, en ce sens qu'elle ne fait intervenir aucune base de E.

2° Il se trouve que, *une base* $\mathcal{U}$ *ayant été choisie dans* E, à chacun des éléments précédemment définis on peut associer une matrice. C'est à partir de cette matrice que, pratiquement, on va déterminer le rang.

204. *Rang d'une matrice.* — 1° Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice (n, p) sur le corps K. Nous allons étudier particulièrement les sous-matrices carrées de A (cf. n° 171, 3°). Nous appellerons ordre d'une sous-matrice carrée de A le nombre de ses lignes et de ses colonnes; ce nombre est au plus égal à inf (n, p).

2° Parmi les sous-matrices carrées, nous envisagerons celles qui sont régulières, c'est-à-dire dont le déterminant n'est pas nul.

Il en existe dès qu'existe dans A un élément non nul. Leurs ordres sont des entiers naturels au plus égaux à inf (n, p); l'un de ces nombres, r, est plus grand que tous les autres. On peut donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Étant donnée une matrice** $A(n, p)$, **il existe un entier naturel** $r(r \leqslant n;\ r \leqslant p)$ **possédant les deux propriétés suivantes :**

a) **on peut extraire de** A **au moins une sous-matrice carrée régulière d'ordre** r;

b) **toute sous-matrice carrée d'ordre supérieur à** r (s'il en existe) **n'est pas régulière.**

Ce nombre r **est appelé le rang de la matrice** A, **et est désigné par** $\rho(A)$.

3° Nous appellerons *sous-matrice carrée principale* une sous-matrice carrée choisie parmi les sous-matrices carrées régulières d'ordre r; (s'il n'y en a qu'une, c'est elle qui est évidemment la sous-matrice carrée principale); son déterminant, qui n'est pas nul, est appelé *déterminant principal* de la matrice A.

4° Le rôle symétrique des lignes et des colonnes d'un déterminant montre immédiatement que deux matrices transposées ont même rang :

$$\rho(A) = \rho(\tilde{A}).$$

205. *Condition d'indépendance de r vecteurs $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r$ de l'espace vectoriel* E.

1° **Notations.** — Dans un espace vectoriel E sur le corps K, de dimension n, considérons une base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et un système S de r vecteurs $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r$ définis par leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{U}$. Nous plaçons ces coordonnées en colonnes dans une matrice A que nous explicitons sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} & \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \ldots & \vec{A}_r \\ \hline \vec{u}_1 & a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} \\ \vec{u}_2 & a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \vec{u}_n & a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nr} \end{array} = A$$

$$\vec{A}_i = \vec{u}_1 . a_{1i} + \vec{u}_2 . a_{2i} + \ldots + \vec{u}_n . a_{ni}.$$

Soit $\rho(A)$ le rang de A; $\rho(A) \leqslant \inf(n, r)$.

Rappelons que, si $r > n$, $\mathcal{S}$ est nécessairement lié.

2° **Si $\rho(A) = r$, le système $\mathcal{S}$ est libre.** — Raisonnons par l'absurde : si les vecteurs $\vec{A}_i$ étaient dépendants, l'un d'eux, $\vec{A}_1$ par exemple, serait une combinaison linéaire de $\vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r$:

$$\vec{A}_1 = \lambda_2 \vec{A}_2 + \ldots + \lambda_r \vec{A}_r.$$

Dans toute sous-matrice carrée d'ordre r de A les éléments de la première colonne seraient une combinaison linéaire des éléments correspondants des autres colonnes, et le déterminant associé serait nul. Ce serait contradictoire avec la régularité d'au moins une sous-matrice carrée d'ordre r.

3° **Si le système $\mathcal{S}$ est libre, $\rho(A) = r$.** — Si les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ sont indépendants, leur nombre est au plus égal à n.

Si $r = n$, $\rho(A) = r = n$, d'après l'étude du n° **199**, 2°.

Si $r < n$, on peut compléter les vecteurs donnés par $n - r$ vecteurs pris dans la base $\mathcal{U}$, de façon à obtenir une autre base $\mathcal{U}'$ de E. Supposons les notations choisies de telle sorte que ce soient les vecteurs $\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n$ qui servent à obtenir la base $\mathcal{U}'$.

Les vecteurs du système

$$\mathcal{U}' = \left\{ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n \right\}$$

sont indépendants, par suite le déterminant de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ n'est pas nul. Ce déterminant est

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \ldots & \vec{A}_r & \vec{u}_{r+1} & \vec{u}_{r+2} & \ldots & \vec{u}_n \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{rr} & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & & & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nr} & 0 & 0 & . & 1 \end{array} \right| \end{array} = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & . & a_{1r} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} \end{array} \right| \neq 0.$$

Une sous-matrice d'ordre r de la matrice A étant régulière, $\rho(A) = r$.

4° **Condition pour que r vecteurs soient indépendants.** — Nous résumons les 2° et 3° par l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que r vecteurs de l'espace vectoriel E soient indépendants est que le rang de la matrice de leurs coordonnées soit égal à r.**

5° **Condition pour que r vecteurs soient liés.** — Du théorème précédent on déduit, par l'absurde, en tenant compte de l'inégalité $\rho(A) \leqslant r$, le résultat suivant :

THÉORÈME. — **Une condition nécessaire et suffisante pour que r vecteurs de l'espace vectoriel E soient dépendants est que la matrice de leurs coordonnées soit de rang inférieur à r.**

206. ***Le rang d'un système de vecteurs est égal au rang de la matrice des coordonnées.*** — 1° **Notations.** — Dans un espace vectoriel E sur le corps K, de dimension n, considérons une base $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \}$ et p vecteurs d'un système $\mathcal{S} = \{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \}$, définis par leurs coordonnées avec lesquelles nous formons une matrice $\mathfrak{A}$:

$$\begin{array}{c|c} & \vec{A}_i \\ \hline \vec{u}_j & [a_{ji}] = \mathfrak{A} \end{array} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Supposons $\rho(\mathfrak{A}) = r < p.$

Supposons que la sous-matrice carrée principale, δ, d'ordre r, soit formée des éléments communs aux r premières colonnes et aux r premières lignes de $\mathfrak{A}$.

Posons

$$\delta = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1r} \\ a_{21} & . & a_{2r} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad |\delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1r} \\ a_{21} & . & a_{2r} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Soit A la matrice formée par les r premières colonnes de $\mathfrak{A}$; $\rho(A) = r$, et les vecteurs $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r$ sont indépendants (n° 205).

2° Soit M_s la matrice obtenue en bordant A de la colonne des coordonnées du vecteur $\vec{A}_s$ ($s = r + 1, \ldots, p$). M_s est une sous-matrice de $\mathfrak{A}$; toute sous-matrice carrée d'ordre $r + 1$ de M_s est une sous-matrice carrée de $\mathfrak{A}$, d'ordre $r + 1$, et par suite est singulière; finalement $\rho(M_s) = r$, puisque δ est régulière.

Les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r, \vec{A}_s$ sont liés, et comme les r premiers sont indépendants, $\vec{A}_s$ est une combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$.

3° Le système $\mathcal{S}$ est tel que, $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ étant indépendants, chacun des autres vecteurs $\vec{A}_{r+1}, \ldots, \vec{A}_p$ est une combinaison linéaire des précédents; donc

$$\rho(\mathcal{S}) = r.$$

4° En définitive $\rho(\mathcal{S}) = \rho(A)$ quand on place en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{S}$. Mais le rang d'une matrice est celui de sa transposée : nous serions arrivés au même résultat en plaçant en lignes les coordonnées des vecteurs. Nous énoncerons finalement :

THÉORÈME. — **Le rang d'un système de vecteurs d'un espace vectoriel E est égal au rang de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans une base quelconque de E.**

REMARQUE. — Dans une matrice quelconque le rang du système des vecteurs-colonnes est égal au rang du système des vecteurs-lignes.

207. ***Comment reconnaître qu'un vecteur $\vec{B}$ est une combinaison linéaire des vecteurs indépendants $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r$?*** — **1° Notations.** — Considérons la matrice M obtenue en rangeant en colonnes les coordonnées des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r, \vec{B}$ dans une base arbitraire $\mathfrak{U}$ de l'espace vectoriel E auquel appartiennent tous les vecteurs.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \ldots & \vec{A}_r \quad \vec{B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . \;\delta\; . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{rr} & b_r \\ \hdashline a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & . & a_{r+1,r} & b_{r+1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nr} & b_n \end{array}\right] \end{array}$$

La sous-matrice δ formée avec les r premières coordonnées des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ est supposée régulière, pour exprimer que ces vecteurs sont indépendants; son déterminant $|\delta|$ n'est pas nul.

2° Supposons que $\vec{B}$ soit une combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$; nécessairement alors $\rho(M) < r + 1$, et puisque $|\delta| \neq 0$, $\rho(M) = r$. Tous les déterminants d'ordre $r + 1$ extraits de M sont nuls. En particulier les déterminants obtenus en bordant δ d'une ligne prise par les $n - r$ dernières lignes de M et de la colonne des éléments b correspondants sont nuls. En d'autres termes

posant $$g_s = \left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ . & . & . & . \\ . & \delta & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ \hdashline a_{s1} & \ldots & a_{sr} & b_s \end{array}\right|$$ on a $g_s = 0$ $(s = r + 1, \ldots, n)$.

En résumé

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{B} \text{ est une combinaison linéaire} \\ \text{des vecteurs indépendants} \\ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |\delta| \neq 0 \\ g_s = 0 \\ s = r + 1, \ldots, n. \end{array}\right.$$

3° Supposons, inversement, que l'on ait, par hypothèse

(1) $\qquad |\delta| \neq 0; \qquad g_s = 0, \qquad s = r+1, \ldots, n.$

Introduisons le déterminant-vecteur

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1r} & b_1 \\ . & . & . & . \\ . & \delta & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} & b_r \\ \vec{A}_1 & . & \vec{A}_r & \vec{B} \end{vmatrix} = \lambda_1 \vec{A}_1 + \ldots + \lambda_r \vec{A}_r + |\delta| \vec{B}.$$

La coordonnée de numéro i du vecteur $\vec{G}$ est

$$\gamma_i = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1r} & b_1 \\ . & . & . & . \\ . & \delta & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & . & a_{ir} & b_i \end{vmatrix}$$

si $i \leqslant r$, $\qquad \gamma_i = 0$

comme développement d'un déterminant ayant deux lignes identiques;

si $i = r+1, \ldots, n \qquad \gamma_i = g_s = 0.$

Par suite $\vec{G}$ est le vecteur nul de E, et

$$\vec{B} = -\frac{\lambda_1}{|\delta|}\vec{A}_1 - \ldots - \frac{\lambda_r}{|\delta|}\vec{A}_r,$$

$\vec{B}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$.

En résumé

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\delta| \neq 0 \\ g_s = 0 \\ s = r+1, \ldots, n \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{B} \text{ est une combinaison linéaire} \\ \text{des vecteurs indépendants} \\ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r \end{array} \right\}$$

4° Résumant les 2° et 3°, on peut écrire l'équivalence logique

$$\left\{ \begin{array}{l} |\delta| \neq 0 \\ g_s = 0 \\ s = r+1, \ldots, n \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{B} \text{ est une combinaison linéaire} \\ \text{des vecteurs indépendants} \\ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_r \end{array} \right\}$$

En langage ordinaire, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Pour que le vecteur $\vec{B}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$, indépendants parce que $|\delta| \neq 0$, il faut et il suffit que les $n - r$ déterminants g_s soient nuls.**

REMARQUE. — Si, étant donnée une matrice M, les conditions (1) sont réalisées, la matrice M est de rang r, car les conditions (1) entraînent que $\vec{B}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ et la partie 2° entraîne alors que les déterminants de toutes les sous-matrices carrées de M, d'ordre $r + 1$, sont nulles.

Les conditions (1) sont des conditions suffisantes pour que M soit de rang r : si $|\delta| \neq 0$, il suffit que les sous-matrices carrées obtenues en bordant la sous-matrice principale δ d'une ligne quelconque et d'une colonne quelconque alent leur déterminant nul.

208. ***Le rang d'un système de formes linéaires est le rang de la matrice des coordonnées.*** — 1° Considérons n formes linéaires sur un espace vectoriel E, de dimension p, E étant relatif au corps K. Ces formes linéaires appartiennent à l'espace vectoriel E* dual de E (n° 184).

Soit $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ une base de E*, toute forme f_i du système $\mathcal{S}^*$ étudié est

$$\begin{cases} f_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{ip}\varphi_p. \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Les coordonnées des formes f_i sont placées en lignes dans une matrice A

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_p \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2p} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{np} \end{array}\right] \end{array} = \mathrm{A}$$

et l'étude du n° 206 permet d'écrire $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathcal{S}^*)$.

THÉORÈME. — **Le rang d'un système de formes linéaires sur l'espace vectoriel E est le rang de la matrice des coordonnées de ces formes dans une base quelconque de l'espace vectoriel dual E*.**

2° **Étude d'un système de n formes linéaires.** — Soit

$$\rho(\mathrm{A}) = r, \qquad r \leqslant n;$$

a) si $r = n$, les formes $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendantes;

b) si $r < n$, et si la sous-matrice principale δ de la matrice A est formée avec les r premières lignes et les r premières colonnes,

les formes $f_1, \ldots, f_r$ sont indépendantes; chacune des formes $f_{r+1}, \ldots f_n$ est une combinaison linéaire des formes $f_1, \ldots, f_r$.

Les relations de dépendance s'obtiennent, comme au n° 207, en formant la

relation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & f_1 \\ \dots & \delta & \dots & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & f_r \\ \hline a_{s1} & \dots & a_{sr} & f_s \end{vmatrix} = (0) \qquad s = r+1, \dots, n, \qquad (1)$$

le déterminant-vecteur du premier membre se développant par rapport aux éléments de la dernière colonne sous la forme

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_r f_r + |\delta| f_s = (0) \qquad (|\delta| \neq 0).$$

3° Les résultats précédents restent valables si les formes linéaires sont remplacées par des polynômes homogènes du premier degré à p indéterminées, la forme (0) étant remplacée par le polynôme nul.

209. ***Le rang d'une application linéaire est le rang de la matrice associée.*** — 1° Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E, de dimension n, dans l'espace vectoriel F, de dimension p, E et F étant pris tous deux sur le corps K. Supposons E rapporté à une base $\mathfrak{U}\left\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\right\}$ et F à une base $\mathfrak{V}\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\right\}$ (n° 173). Nous avons associé à f la matrice

$$\begin{array}{c|c} & f(\vec{u}_1) \quad \dots \quad f(\vec{u}_n) \\ \hline \vec{v}_1 & \\ \vec{v}_2 & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix} = \mathrm{A} \\ \cdot & \\ \vec{v}_p & \end{array}$$

Le rang de f est, par définition, la dimension de l'espace vectoriel $f(\mathrm{E})$ engendré dans F par les vecteurs $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$, vecteurs-colonnes de la matrice A; c'est donc le rang de ce système de vecteurs, et donc aussi le rang de la matrice A; en définitive

$$\rho(f) = \rho(\mathrm{A}).$$

THÉORÈME. — **Le rang d'une application linéaire est le rang de la matrice associée.**

2° **Application associée à une matrice carrée régulière.** — Soit f une application linéaire de E dans E; la matrice associée A est alors carrée, d'ordre n.

Dire que la matrice A est régulière, c'est dire que son déterminant n'est pas nul, c'est dire que

$$\rho(\mathrm{A}) = \rho(f) = n.$$

Nous reprendrons cette question au n° 222, f est alors une application injective de E sur lui-même, ce qui entraîne (n° 170) que f est une application bijective de E sur lui-même.

3° Conservation du rang d'une matrice dans une multiplication, à gauche, par une matrice carrée régulière.

Multiplions la matrice A du 1°, à gauche, par une matrice carrée régulière P, d'ordre p:

$$\underset{(p,n)}{B} = \underset{(p,p)}{P} \times \underset{(p,n)}{A}$$

On peut considérer P comme matrice d'une application linéaire bijective, g, de F sur lui-même.

B est la matrice de l'application $g \circ f$ de E dans F; les vecteurs-colonnes de B sont les coordonnées dans la base $\mathfrak{V}$ des vecteurs

$$g\left[f\left(\vec{u}_1\right)\right], \ldots, g\left[f\left(\vec{u}_n\right)\right]. \qquad \text{(système } \mathfrak{C}\text{)}$$

transformés par g des vecteurs

$$f\left(\vec{u}_1\right), \ldots, f\left(\vec{u}_n\right) \qquad \text{(système } \mathfrak{I}\text{)}.$$

Or une application linéaire bijective conserve le rang d'un système de vecteur (n° 167) et $\rho(\mathfrak{C}) = \rho(\mathfrak{I})$; finalement

$$\rho(B) = \rho(\mathfrak{C}) = \rho(\mathfrak{I}) = \rho(A).$$

En résumé :

Si l'on multiplie la matrice A, *à gauche, par une matrice carrée régulière, la matrice obtenue a même rang que* A.

4° Conservation du rang d'une matrice dans une multiplication, à droite, par une matrice carrée régulière. — Multiplions la matrice A du 1°, à droite, par une matrice carrée régulière Q, d'ordre n :

$$\underset{(p,n)}{C} = \underset{(p,n)}{A} \times \underset{(n,n)}{Q}$$

On peut écrire $\qquad \widetilde{C} = \widetilde{Q} \times \widetilde{A}.$

$\widetilde{Q}$ étant régulière comme l'est Q,

$$\rho(\widetilde{C}) = \rho(\widetilde{A}),$$

et comme une matrice et sa transposée ont même rang,

$$\rho(C) = \rho(A).$$

En résumé,

Si l'on multiplie la matrice A, *à droite, par une matrice carrée régulière, la matrice obtenue a même rang que* A.

EXERCICES

1. — De combien de termes non nuls se compose le développement d'un déterminant qui a *un* ou *deux* éléments nuls.

2. — On suppose que dans un déterminant d'ordre n le premier élément de la troisième ligne est nul et, d'une façon générale, que les $p - 2$ premiers éléments de la ligne de rang p ($p > 2$), sont nuls. Trouver le nombre de termes non nuls dans le développement du déterminant. Même question en supposant de plus que chacune des deux premières lignes ait ses deux derniers éléments nuls.

3. — Le carré de l'aire du triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c est

$$-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. — Montrer que le déterminant

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

est divisible par $(x-1)^3$.

5. — La substitution

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

transforme $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ en $A'x_1^2 + B'x_1y_1 + C'y_1^2$ avec

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Calculer dét (P) en fonction de dét (M).

6. — Comparer les déterminants A et B dont les éléments a_{ij} et b_{ij} satisfont, quels que soient i et j, à la relation : $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$.

7. — Quels sont les zéros du polynôme $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$?

8. — Factoriser le déterminant

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} 2xyz & -z^3 & -y^3 & x \\ -z^3 & 2xyz & -x^3 & y \\ -y^3 & -x^3 & 2xyz & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

[On montrera que $\Delta(x, y, z)$ est un polynôme homogène, de degré 8, symétrique en x^2, y^2, z^2, et qu'il est divisible par $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$].

9. — On donne n nombres α_i et n nombres β_j. Calculer le déterminant d'ordre n dans lequel $a_{ij} = \alpha_i + \beta_j$.

10. — Factoriser le déterminant d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, sauf ceux de la diagonale principale, égaux à x.

On donne n nombres a_i. Factoriser le déterminant d'ordre n dont les éléments de la ligne de rang i sont égaux à a_i, sauf l'élément situé sur la diagonale principale, égal à 0.

11. — Soit $f(x)$ un polynôme de degré $n-1$. Démontrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme :

$$A_0 f(x) + A_1 f(x+1) + A_2 f(x+2) + \ldots + A_{n-1} f(x+n-1),$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ étant des constantes.

Déduire de là que le déterminant suivant est nul quel que soit x :

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & f(x+2) & \ldots & f(x+n) \\ f(x+1) & f(x+2) & f(x+3) & \ldots & f(x+n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x+n) & f(x+n+1) & f(x+n+2) & \ldots & f(x+2n) \end{vmatrix}$$

12. — Démontrer l'égalité :

$$\begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & -z & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & -z \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} z^{n-1}\left(z^2 - \sum_1^n a_i^2\right).$$

13. — Factoriser le déterminant d'ordre n dans lequel la ligne de rang i est :

$$a_1^{i-1} + a_2^{i-1},\quad a_2^{i-1} + a_3^{i-1},\quad \dots,\quad a_{n-1}^{i-1} + a_n^{i-1},\quad a_n^{i-1} + a_1^{i-1},$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant n nombres donnés. (Les indices supérieurs sont des exposants, et $a_i^0 = 1$.)

14. — Factoriser le déterminant d'ordre n dans lequel la ligne de rang p est :

$$\cos px \quad \cos(p+1)x \dots \cos(p+n-1)x.$$

15. — On donne n nombres a_i .... On pose :

$$A_p = px - (a_1 + a_2 + \dots + a_p) \qquad 1 \leqslant p \leqslant n.$$

Factoriser le déterminant d'ordre n dans lequel la ligne de rang i est :

$$A_1\, A_2 \quad \dots \quad A_{i-1}\, A_i\, A_i\, A_i \quad \dots \quad A_i.$$

16. — On considère le polynôme

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{(p+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (x+1) \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & (x+1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{p+1}^1 & C_{p+1}^2 & C_{p+1}^3 & \dots & C_{p+1}^{p-1} & (x+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

Calculer $\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1)$, puis $\varphi_p(n)$, n étant un entier naturel.

17. — On donne deux entiers naturels n et p $(n > p)$.

a) Soit Δ_n^p le déterminant d'ordre $p+1$ tel que

$$a_{ij} = C_{n+p+1-j}^{n+1-i}.$$

Établir une relation de récurrence entre Δ_n^p et Δ_n^{p-1}. Calculer Δ_n^p.

b) Calculer le déterminant d'ordre $p+1$ tel que $a_{ij} = \dfrac{1}{(n+i-j)!}$

18. — Calculer par récurrence le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ (-1)^n & 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

19. — Soit le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 7 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 & 9 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)^2 & 2n-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$$

a) Calculer directement Δ_1, Δ_2, Δ_3.

b) Établir la relation $\Delta_n = (2n+1)\Delta_{n-1} - n^2\Delta_{n-2}$.

c) Calculer Δ_n.

20. — On donne n nombres α_i et n nombres β_j tels qu'aucune des sommes $\alpha_i + \beta_j$ ne soit nulle. Soit Δ_n le déterminant d'ordre n dans lequel $a_{ij} = \dfrac{1}{\alpha_i + \beta_j}$.

On écrit $$\Delta_n \times [\prod_{i}\prod_{j}(\alpha_i + \beta_j)] = D_n;$$

montrer que D_n est le produit de deux déterminants de Vandermonde, par rapport aux α_i, et par rapport aux β_j. Évaluer Δ_n dans le cas où $\alpha = i$, $\beta = j$.

21. — Soit $$S = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}$$

un déterminant dans lequel les éléments de la première ligne sont égaux à leurs cofacteurs. Calculer S^2. En déduire que si $S \neq 0$,

$$S = \begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma aa' & \Sigma aa'' \\ \Sigma a'a & \Sigma a'^2 & \Sigma a'a'' \\ \Sigma a''a & \Sigma a''a' & \Sigma a''^2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

En supposant réels les éléments de S, la formule (1) est-elle encore valable si $S = 0$?

22. — On considère la matrice à éléments complexes

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

On suppose qu'elle n'a pas deux lignes identiques.

Démontrer que, pour que M soit de rang 2, il faut et il suffit que

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \pm i.$$

23. — On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{bmatrix}$$

On suppose qu'elle n'a pas deux lignes identiques.

a) Démontrer que si le rang de A est 2, et en supposant par exemple $a \neq b$, il existe un nombre λ tel que

$$\lambda(1-\lambda) \neq 0, \qquad c = \lambda a + (1-\lambda)b, \qquad c' = \lambda a' + (1-\lambda)b'.$$

Démontrer aussi que $a' = b' = c'$.

Réciproquement, si $a' = b' = c'$, la matrice A est-elle de rang 2?

b) On complète la matrice A par une première ligne quelconque p, q, r, s. Soient P, Q, R, S les cofacteurs de p, q, r, s dans le déterminant de la matrice ainsi obtenue. Factoriser

$$a'P + Q, \qquad aP + R, \qquad a'R + S, \qquad aQ + S$$

En déduire que si A est de rang 3, PS — QR est différent de zéro.

Étudier la réciproque.

24. — DÉTERMINANTS CIRCULANTS. — Soient $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, n nombres complexes donnés. On se propose de calculer le *déterminant circulant* formé avec ces nombres c'est-à-

dire le déterminant Δ de la matrice Z, carrée d'ordre n, dont les éléments de la ligne l sont, dans l'ordre,

$$z_{l-1}, z_l, \ldots, z_{n-1}, z_n, z_0, \ldots, z_{l-2}.$$

On sera amené à utiliser le polynôme à l'indéterminée ζ

$$P(\zeta) = z_0 + z_1\zeta + \ldots + z_{n-1}\zeta^{n-1}.$$

et la matrice A, carrée d'ordre n, dont le terme correspond à la ligne l et à la colonne k est

$$a_{lk} = \omega^{(l-1)(k-1)} \quad \text{avec} \quad \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}.$$

a) Calculer la matrice A^2 et en déduire

$$(\text{dét } A)^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n.$$

b) Vérifier que la matrice $ZA = [b_{lk}]$ est déterminée par

$$b_{lk} = \omega^{-(l-1)(k-1)} P(\omega^{k-1}).$$

En déduire que $AZA = [c_{lk}]$ est la matrice diagonale telle que

$$c_{kk} = nP(\omega^{k-1}).$$

c) En déduire

$$\Delta = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

CHAPITRE XV

ÉQUATIONS LINÉAIRES

I. GÉNÉRALITÉS

210. ***Système d'équations linéaires.*** — **1° Définitions diverses.** — Soit

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

n formes linéaires à p indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Les coefficients a_{ij} sont pris dans un corps commutatif K.

Plaçons-nous dans le cas où les indéterminées prennent leurs valeurs dans le corps K; la valeur prise alors par chaque forme linéaire appartient à K. On peut donc, étant donnés n éléments $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de K, chercher s'il existe dans K des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tels que

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

(S) est un système de n *équations scalaires à p inconnues*; les éléments b_i, dits *termes tout connus*, sont supposés écrits dans les seconds membres.

Le système (S) est dit homogène si les termes tout connus sont tous nuls :

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad b_n = 0.$$

Un système homogène admet au moins la solution, dite *triviale*,

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_p = 0.$$

Nous poserons alors

$$(S) \quad \begin{cases} f_1 = b_1 \\ f_2 = b_2 \\ \cdots \\ f_n = b_n \end{cases} \text{ et introduirons } (H) \quad \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots \\ f_n = 0. \end{cases}$$

Le système (H) est dit *système homogène associé au système* (S).

Nous appellerons *matrice du système* (S) la matrice

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ayant pour colonnes les coefficients d'une inconnue dans les diverses équations et pour lignes les coefficients des inconnues dans une même équation. La matrice $\mathfrak{A}$ a pour dimensions (n, p).

2° **Première résolution théorique d'un système linéaire.** — *a*) Considérons, dans un espace vectoriel E sur le corps K, de dimension n, rapporté à une base $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$, les vecteurs

ayant pour coordonnées

	$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	...	$\vec{A}_p$	$\vec{B}$
$\vec{u}_1$	a_{11}	a_{12}	.	a_{1p}	b_1
$\vec{u}_2$	a_{21}	a_{22}	.	a_{2p}	b_2
.	.	.	.	.	.
$\vec{u}_n$	a_{n1}	a_{n2}	.	a_{np}	b_n

Les vecteurs $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_p$ sont les vecteurs-colonnes de la matrice $\mathfrak{A}$. Les premiers membres $f_1, f_2, \dots, f_n$ des équations (S) sont les coordonnées du vecteur

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \dots + x_p\vec{A}_p. \qquad (1)$$

Chercher les scalaires $x_1, x_2, \dots, x_p$ du corps K tels que

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \dots + x_p\vec{A}_p = \vec{B} \qquad (2)$$

ou tels que les équations (S) soient vérifiées sont deux problèmes équivalents :

$$(S) \iff (2).$$

L'équation (2) condense l'ensemble des n équations (S).

Lorsque les scalaires $x_1, x_2, \dots, x_p$ prennent toutes les valeurs possibles dans le corps K, le vecteur

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \dots + x_p\vec{A}_p$$

engendre un sous-espace vectoriel de E, soit E'.

Résoudre l'équation (2), c'est chercher si $\vec{B}$ est une combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_p$, en d'autres termes, si $\vec{B}$ appartient à E', et si cette condition est remplie, c'est chercher toutes les décompositions possibles de $\vec{B}$ en combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_p$.

On peut alors écrire les équivalences logiques :

$\vec{B}$ appartient à E' $\Longleftrightarrow$ Le système (S) est possible

$\vec{B}$ n'appartient pas à E' $\Longleftrightarrow$ Le système (S) est impossible.

3° **Deuxième résolution théorique d'un système linéaire.** — A l'espace vectoriel E introduit au 2°, adjoignons un second espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le corps K, de dimension p, rapporté à une base $\Xi = \left\{ \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p \right\}$.

Soit φ l'application linéaire de $\mathcal{E}$ dans E qui est représentée dans les bases Ξ et $\mathfrak{U}$ par la matrice $\mathcal{A}$ du 1° : $\varphi\left(\vec{\xi}_j\right) = \vec{A}_j$ et

$$\vec{X} = x_1\vec{\xi}_1 + \ldots + x_p\vec{\xi}_p \quad \multimap \quad \varphi\left(\vec{X}\right) = x_1\vec{A}_1 + \ldots + x_p\vec{A}_p$$

Nous avons

$$\begin{cases} (S) & \Longleftrightarrow & \varphi\left(\vec{X}\right) = \vec{B} & (2') \\ (H) & \Longleftrightarrow & \varphi\left(\vec{X}\right) = \vec{0}_E & (3) \end{cases}$$

a) *Résolution du système homogène.* — Les solutions de (3) constituent le noyau, Ker φ, de l'application linéaire φ. Rappelons que Ker φ et Im φ sont respectivement des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ et E tels que

$$\dim (\text{Ker } \varphi) + \dim (\text{Im } \varphi) = \dim \mathcal{E}$$

ou

$$\dim (\text{Ker } \varphi) = p - r,$$

en désignant par r le rang de φ qui est aussi le rang de $\mathcal{A}$ ou encore celui du système $\left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \right\}$ des vecteurs-colonnes de A.

1er *cas* : $r = p \Longleftrightarrow \text{Ker } \varphi = \left\{ \vec{0}_{\mathcal{E}} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \right\}$ est libre (H) admet la seule solution triviale

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_p = 0$$

2e *cas* : $r < p \Longleftrightarrow \text{Ker } \varphi \neq \left\{ \vec{0}_{\mathcal{E}} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p \right\}$ est lié Ker φ ayant la dimension $p - r$, si l'on connaît $p - r$ solutions indépendantes, $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_{p-r}$, toute solution $\vec{X}$ de (H) pourra s'écrire

$$\vec{X} = \lambda_1\vec{w}_1 + \ldots + \lambda_{p-r}\vec{w}_{p-r}$$

les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-r}$ étant quelconques dans le corps K. Des exemples seront donnés au n° 216, 3°.

b) *Résolution du système non homogène.* — Supposons que (2') admette une solution $\vec{X}_0$. A tout vecteur $\vec{X}$ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer biunivoquement un vecteur $\vec{Y}$ de $\mathcal{E}$ tel que : $\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{Y}$; on a alors

$$\varphi\left(\vec{X}\right) = \varphi\left(\vec{X}_0\right) + \varphi\left(\vec{Y}\right)$$

si bien que, puisque $\varphi\left(\vec{X}_0\right) = \vec{B}$,

$$\varphi\left(\vec{X}\right) = \vec{B} \iff \varphi\left(\vec{Y}\right) = \vec{0}_{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \vec{Y} \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

Énonçons :

THÉORÈME. — **La solution générale du système non homogène (S) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (S), — pourvu qu'il en existe une —, à la solution générale du système homogène (H) associé à (S).**

II. SYSTÈME DE CRAMER

211. ***Système de Cramer.*** — **1° Définitions.** — Soit

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

un système de n équations linéaires à n inconnues, sur le corps commutatif K.

La matrice $\mathcal{A}$ du système est une matrice carrée :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Le déterminant Δ *de cette matrice est appelé déterminant du système* S.

DÉFINITION. — **Lorsque le déterminant d'un système de n équations linéaires à n inconnues n'est pas nul, on dit que ce système est un système de Cramer.**

La matrice $\mathcal{A}$ étant régulière, on dit encore que le système (S) est régulier.

2° **Première méthode de résolution.** — Les notations étant celles du n° 210, 2°, le système $\left\{ \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n \right\}$ est libre, d'après la régularité de $\mathcal{A}$.

Il s'agit donc d'une base de E et le système (S) admet une et une seule solution constituée par les coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ de $\vec{B}$ dans cette base. Pour les obtenir étudions d'abord

$$\text{dét}\left[\vec{B}, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right] = \text{dét}\left[\left(x'_1\vec{A}_1 + \ldots + x'_n\vec{A}_n\right), \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right]$$

qui se réduit à

$$x'_1 \text{ dét}\left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right] \quad \text{ou} \quad x'_1 \text{ dét } \mathcal{A}$$

Compte-tenu de : dét $\mathcal{A} \neq 0$ nous avons

$$x'_1 = \frac{\text{dét}\left[\vec{B},\ \vec{A}_2,\ \ldots,\ \vec{A}_n\right]}{\text{dét}\left[\vec{A}_1,\ \vec{A}_2,\ \ldots,\ \vec{A}_n\right]}$$

et plus généralement

$$x'_i = \frac{\text{dét}\left[\vec{A}_1,\ \ldots,\ \vec{B},\ \ldots,\ \vec{A}_n\right]}{\text{dét}\left[\vec{A}_1,\ \ldots,\ \vec{A}_i,\ \ldots,\ \vec{A}_n\right]}, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

L'énoncé suivant donne une description des formules précédentes en langage ordinaire :

La solution d'un système de Cramer s'obtient en attribuant à chaque inconnue la valeur d'un rapport dont le dénominateur est le déterminant du système; le numérateur est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans celle du système, la colonne des coefficients de l'inconnue considérée par la colonne des termes tout connus supposés écrits dans les seconds membres.

Nous retiendrons :

THÉORÈME. — **Un système de Cramer admet une et une seule solution.**

Naturellement, si le système est homogène, il s'agit de la solution triviale (n° 210, 3°, *a*)), ce qui se retrouve sur les formules (2) :

Un système régulier de n équations linéaires et homogènes à n inconnues n'admet que la solution triviale $x_1 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$.

3° **Deuxième méthode de résolution.** — Les notations étant celles du n° 210, 3°, nous avons en outre $p = n$, ce qui nous permet de supposer que $\mathcal{E}$ et E d'une part, Ξ et $\mathcal{U}$ d'autre part sont confondus; φ est ainsi un endomorphisme de E et, plus précisément un automorphisme : en effet le rang de φ est celui de la matrice représentative dans la base $\mathcal{U}$, c'est-à-dire la matrice régulière $\mathcal{A}$, c'est-à-dire enfin la dimension n de E (n° 209); φ est alors bijectif.

(S), ou $\varphi\left(\vec{X}\right) = \vec{B}$, admet une solution unique : $\vec{X} = \varphi^{-1}\left(\vec{B}\right)$.

Les coordonnées $(x'_1,\ \ldots,\ x'_n)$ de ce vecteur unique s'obtiennent en remarquant qu'on peut alors écrire

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Rappelons (201) que la matrice régulière $\mathcal{A}^{-1}$ est

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\,\mathcal{A}}[\alpha_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad \alpha_{ij} = A_{ji},$$

A_{ik} désignant le cofacteur de a_{ik} dans le déterminant de $\mathcal{A}$.

REMARQUE. — L'étude faite au n° 202 et qui a permis de trouver les coor-

données du vecteur $\vec{B}$ dans la base $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\}$ de E donne une autre expression de la solution d'un système de Cramer.

4° **Réciproque.** — Nous venons de constater que si dét $\mathcal{A} \neq 0$, le système (S) admet une solution, quels que soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Inversement, supposons que, par hypothèse, le système (S) admette une solution quels que soient $b_1, \ldots, b_n$. Cela veut dire que le vecteur $\vec{B}$ peut être considéré comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$, et cela quel que soit $\vec{B}$ pris dans E. C'est donc que les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ forment un système de générateurs de E, et comme leur nombre est n, dimension de E, ils sont indépendants, et la matrice $\mathcal{A}$ a son déterminant non nul, le système (S) est un système de Cramer.

On résume le théorème fondamental et sa réciproque dans la double implication suivante

$$\text{dét } \mathcal{A} \neq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{le système (S) est possible} \\ \text{quels que soient } b_1, b_2, \ldots, b_n \end{array} \right\}.$$

212. ***Applications du théorème de Cramer.*** — 1° Soit

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0 \tag{I}$$

un système d'équations quelconques relatives à un nombre quelconque d'inconnues recherchées dans un corps K. Toute solution du système (I) est solution de l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \tag{1}$$

dont le premier membre est une combinaison linéaire des équations (I) à coefficients non tous nuls pris dans K. Mais inversement toute solution de (1) n'est pas nécessairement solution de (I). Peut-on, en prenant un nombre suffisant de combinaisons analogues à (1), obtenir un système (II) d'équations tel que toute solution de (II) soit une solution du système (I)? L'étude précédente permet de répondre à la question.

Soit
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_1 + \ldots + \alpha_{n1} f_n = 0 \\ \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \ldots + \alpha_{n2} f_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_n + \ldots + a_{nn} f_n = 0. \end{array} \right. \qquad (\alpha_{ij} \in \mathrm{K}) \tag{II}$$

Toute solution de (I) est solution de (II).

En supposant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

la seule solution des équations (II) où l'on considère $f_1, f_2, \ldots, f_n$ comme des inconnues est la solution triviale

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0.$$

C'est donc que toute solution de (II) est solution de (I).

En résumé, sous réserve de la condition (2), les systèmes (I) et (II) sont tels que toute solution de l'un soit solution de l'autre.

Un raisonnement analogue montre que si l'un des systèmes n'a pas de solution, l'autre n'en a pas non plus.

On peut dire, en résumé, que **si la matrice des coefficients α_{ij} est régulière, les systèmes (I) et (II) sont équivalents.**

2° On peut appliquer la technique de résolution vue au 2° ou au 3° lorsque dans les équations (S) les termes tout connus $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ appartiennent à un espace vectoriel F sur K et lorsque les inconnues sont des éléments $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n$ de F.

Le système (S) peut alors s'écrire

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} \vec{\xi}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

et si $\mathcal{A}$ est régulière

$$\begin{bmatrix} \vec{\xi}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\xi}_n \end{bmatrix} = \mathcal{A}^{-1}\begin{bmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\beta}_n \end{bmatrix}$$

Pratiquement on peut aussi combiner linéairement les équations (S), les coefficients étant les cofacteurs A_{ij} de a_{ij} dans dét $\mathcal{A}$.

III. CAS GÉNÉRAL : n ÉQUATIONS LINÉAIRES A p INCONNUES

213. *Condition de possibilité d'un système linéaire.* — 1° Reprenons les notations du n° 210; soit (S) le système des équations

$$(S)\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

En supposant que les coefficients a_{ij}, les termes tous connus b_i, et les inconnues $x_1, \ldots, x_p$ appartiennent au corps K, résoudre (S), c'est chercher les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ tels que

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_p\vec{A}_p = \vec{B}.$$

Les vecteurs $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_p$ engendrent un sous-espace vectoriel E′ de l'espace E, et nous avons vu que (S) n'est possible que si $\vec{B}$ appartient à E′.

Il s'agit donc de trouver une base de E′ et par suite de déterminer le rang r du système $\mathcal{C}$ des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p$; ce rang r est celui de la matrice $\mathcal{A} = [a_{ij}]$; on dit que c'est le *rang du système* (S).

Soit δ une sous-matrice carrée principale de $\mathcal{A}$; son déterminant, $|\delta|$, qui n'est pas nul, est le déterminant principal de la matrice $\mathcal{A}$ (cf. n° 204); on dit aussi que c'est le *déterminant principal* du système (S); les colonnes de δ sont empruntées aux vecteurs principaux du système $\mathcal{C}$; les inconnues correspondantes sont dites *inconnues principales*; les lignes de δ sont empruntées à des équations de (S) qui sont dites *équations principales.*

Nous supposerons que les inconnues principales sont les r premières, et que les équations principales sont les r premières :

$$\delta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & a_{rr} \end{bmatrix} \qquad |\delta| \neq 0$$

2° *Cas où* $r = n$ (E′ = E). Si le sous-espace E′ a pour dimension n, c'est-à-dire si $r = n \leqslant p$, E′ coïncide avec E; $\vec{B}$, vecteur quelconque de E, appartient à E′, et le système (S) est possible quel que soit $\vec{B}$.

Quand le rang est égal au nombre des équations, un système linéaire est possible.

3° *Cas où* $r < n$ $\left(\text{E}' \subset \text{E (strictement)}\right)$. Si le sous-espace E′ a une dimension r inférieure à n, E′ est un sous-espace propre de E, et un vecteur $\vec{B}$, quelconque, de E n'appartient pas nécessairement à E′.

Nous avons étudié au n° 207 une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{B}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ qui peuvent être pris pour base de E′. En nous reportant à ce paragraphe, nous voyons que $\vec{B}$ est une combinaison linéaire de $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ si, et seulement si, dans la matrice M du n° 207, 1°, les déterminants d'ordre $r + 1$ bordant δ sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si les déterminants g_s $(s = r + 1, \ldots, n)$ du n° 207, 2° sont tous nuls :

$$g_s = \left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdot & a_{1r} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & a_{rr} & b_r \\ \hdashline a_{s1} & \cdot & a_{sr} & b_s \end{array}\right| = 0 \quad (s = r + 1, \ldots, n)$$

g_s est dit *déterminant caractéristique* associé à l'équation non principale $f_s = b_s$, conformément à la définition suivante :

Quand le rang r est inférieur au nombre des équations, on appelle **déterminant caractéristique** *relatif à une équation non principale le déterminant de la matrice obtenue en bordant la sous-matrice carrée principale de la colonne des termes tout connus des équations principales et de la ligne des coefficients des inconnues principales et du terme tout connu dans l'équation non principale considérée.*

En résumé, **quand le rang est inférieur au nombre des équations, le système (S) n'est possible que si tous les caractéristiques sont nuls.**

4° **Étude d'une réciproque.** — Supposons, par hypothèse, que le système (S) soit possible quels que soient $b_1, \ldots, b_n$. Cela veut dire que $\vec{B}$ peut être considéré comme combinaison linéaire des vecteurs du système $\mathcal{C}$, quel que soit $\vec{B}$ pris dans E; c'est que $\mathcal{C}$ forme un système de générateurs de E, et comme E est de dimension n, c'est que le rang de $\mathcal{C}$ est n.

En résumé, on peut écrire l'équivalence suivante, où $r = \rho(\mathcal{A})$ ou $\rho(\mathcal{C})$

$$\{ r = n \leqslant p \} \iff \begin{cases} \text{le système linéaire (S) est possible} \\ \text{quels que soient } b_1, \ldots, b_n. \end{cases}$$

214. ***Résolution d'un système linéaire, dans le cas de possibilité.*** — Reprenons les notations du n° 210, 2° et supposons que $\vec{B}$ soit un vecteur du sous-espace E′ engendré par les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p$.

1° Si $r = p$, les vecteurs $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p$ sont indépendants, et $\vec{B}$ s'exprime, et d'une seule façon, sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_p$ de E′ :

$$x_1\vec{A}_1 + \ldots + x_p\vec{A}_p = \vec{B}.$$

On obtient $x_1, \ldots, x_p$ en résolvant, par les formules de Cramer, les p équations principales par rapport aux inconnues $x_1, \ldots, x_p$, toutes principales.

2° Si $r < p$, isolons les inconnues principales dans l'équation vectorielle qui condense les équations du système (S) :

$$x_1\vec{A}_1 + \ldots + x_r\vec{A}_r = \vec{B} - x_{r+1}\vec{A}_{r+1} - \ldots - x_p\vec{A}_p \qquad (1)$$

Quelles que soient les valeurs données dans K aux inconnues non principales $x_{r+1}, \ldots, x_p$, le second membre de (1) est un vecteur du sous-espace vectoriel E′, il s'exprime donc, et d'une seule façon, sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ de E′. On obtient $x_1, \ldots, x_r$ en résolvant, par les formules de Cramer les r équations principales par rapport aux r inconnues principales.

3° Lorsque le système (S) est possible, toute solution est en particulier solution du système (S_1) formé par les équations principales.

L'étude précédente, 1° et 2°, montre qu'inversement, lorsque le système (S) est possible, toute solution de (S_1) est solution de (S).

Dans le cas où le système (S) est possible, il est équivalent au système (S_1) des équations principales.

4° **Théorème de Rouché et Fontené.** — L'énoncé suivant résume les n°s 211 et 214 :

THÉORÈME DE ROUCHÉ ET FONTENÉ. — **Soit un système (S) de n équations linéaires à p inconnues, de rang r.**

1° Si $r = n$, le système est possible. On donne des valeurs quelconques aux $p - n$ inconnues non principales et on résout un système de Cramer aux $r = n$ inconnues principales.

2° Si $r < n$, et si l'un des caractéristiques relatifs aux équations non principales n'est pas nul, le système est impossible.

3° Si $r < n$, et si tous les caractéristiques sont nuls, le système se réduit aux équations principales. On procède comme au 1°.

5° **Application à un problème d'élimination.** — *Condition pour que la solution d'un système de Cramer vérifie une équation supplémentaire.* — On considère le système de Cramer

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \Delta = |a_{ij}| \neq 0$$

et une $(n+1)$-ième équation linéaire

$$(L) \quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta.$$

Comment choisir, dans le corps K, les coefficients a_{ij}, b_i, α_i, β de façon que la solution de (S) vérifie (L)?

Appliquons le théorème de Rouché au système (S') constitué par (S) et (L); (S') est un système de $n+1$ équations à n inconnues, de rang n; les n premières équations sont principales; (S') n'est possible que si le caractéristique relatif à l'équation (L), non principale, est nul.

Finalement la condition nécessaire et suffisante pour que la solution du système régulier (S) vérifie l'équation supplémentaire (L) s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} & b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & \alpha_n & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est le déterminant de la matrice obtenue en bordant la matrice du système (S) par la colonne des termes tout connus, puis par la ligne des coefficients de l'équation supplémentaire. On dit parfois que ce déterminant est le *déterminant complet* du système (S') de $n+1$ équations linéaires à n inconnues.

215. *Exemples usuels d'équations linéaires.* — Dans tous ces exemples, les coefficients des inconnues seront choisis dans l'un des corps K du programme : corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

Les résultats que nous obtiendrons généraliseront ceux que nous avons obtenus, par voie géométrique, aux n°s 145 et 146.

EXEMPLE I. $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \begin{vmatrix} b' \\ -b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -a' \\ a \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad ab' - ba'.$

Si $\Delta \neq 0$, la seule solution est obtenue par combinaison linéaire des équations données :

$$x = \frac{cb' - bc'}{\Delta} \qquad y = \frac{ac' - a'c}{\Delta};$$

Si $\Delta = 0$, $a \neq 0$, le rang du système est 1 ; il y a une équation principale, la première, et une inconnue principale, x ; formons le déterminant caractéristique associé à l'équation non principale

$$g = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix};$$

si $g \neq 0$, le système est impossible

si $g = 0$, toute solution de la première équation est solution de la seconde.

REMARQUE. — Si $c = 0$, toute solution de la première équation est de la forme $x = b\lambda$, $y = -a\lambda$, λ étant arbitraire ; on détermine λ en écrivant que les nombres obtenus vérifient la seconde équation.

EXEMPLE II. (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases} \qquad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{bmatrix}.$

α) Supposons $\mathfrak{A}$ de rang 2, par exemple $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$. Pour que la solution des deux premières équations (équations principales, système (S_1)) vérifie la troisième équation, (équation non principale), il faut et il suffit que le déterminant complet du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit nul. Si donc $\begin{cases} \Delta \neq 0, \text{ (S) est impossible} \\ \Delta = 0, \text{ la solution de } (S_1) \text{ est solution de (S).} \end{cases}$

β) Supposons que $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$

$\mathfrak{A}$ ne peut être de rang 2.

Si $a \neq 0$, (S) est de rang 1 ; il y a une équation principale, la première, et une inconnue principale x ; formons les déterminants caractéristiques associés aux équations non principales :

$$g = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad g_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$$

Si l'un des nombres g, g_1 n'est pas nul, (S) est impossible.

Si $g = 0$, $g_1 = 0$, (S) admet les solutions

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a}(c - b\lambda) \\ y = \lambda \end{cases} \qquad \forall \lambda$$

EXEMPLE III. (S) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

α) $\Delta \neq 0$, (S) est un système de Cramer.

β) Si $\Delta = 0$, la matrice $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ ne peut être de rang 3; supposons

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0; \qquad \text{(S) est alors de rang 2.}$$

Il y a deux équations principales, les deux premières, et deux inconnues principales x et y; formons le déterminant caractéristique associé à l'équation non principale

$$g = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Si $g \neq 0$, (S) est impossible;
si $g = 0$, (S) admet les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = d - c\lambda \\ a'x + b'y = d' - c'\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ système de Cramer } \forall \lambda$$

γ) Supposons qu'aucune matrice carrée d'ordre 2 de $\mathfrak{A}$ ne soit régulière, mais que $a \neq 0$: (S) est de rang 1. Il y a une équation principale, la première et une inconnue principale, x; formons les déterminants caractéristiques associés aux deux équations non principales

$$g' = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}, \qquad g'' = \begin{vmatrix} a & d \\ a'' & d'' \end{vmatrix}$$

Si l'un des nombres g', g'' n'est pas nul, (S) est impossible;
Si $g' = 0$ et $g'' = 0$, (S) admet les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{a}(d - b\lambda - c\mu) \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right. \qquad (\forall \lambda, \mu).$$

216. ***Système linéaire homogène.*** — 1° Nous savons déjà qu'un système linéaire homogène n'est pas impossible, puisqu'il admet au moins la solution triviale $x_1 = 0, \ldots, x_p = 0$.

D'ailleurs tous les caractéristiques qu'on pourrait avoir à former sont nuls, comme ayant une colonne de zéros.

La résolution d'un système linéaire homogène se ramène à celle des r équations principales, r étant le rang du système.

1° Si $r = p$, le système n'admet que la solution triviale.

2° Si $r < p$, le système est indéterminé, puisqu'on peut donner aux inconnues non principales des valeurs quelconques dans le corps K des coefficients.

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — **Pour qu'un système d'équations linéaires et homogènes admette des solutions autres que la solution triviale, il faut et il suffit que le rang de la matrice du système soit inférieur au nombre des inconnues.**

2° **Système de n équations linéaires homogènes à n inconnues.**

a) Soit

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \right. \qquad \mathfrak{A} = [a_{ij}]$$

I. Si le système est régulier, il n'admet que la solution triviale; c'est le cas où dét $(\mathfrak{A}) \neq 0$.

II. Supposons que $\det(\mathfrak{A}) = 0$, mais que $\rho(\mathfrak{A}) = n - 1$; par exemple supposons que la sous-matrice carrée de $\mathfrak{A}$ formée avec les $n - 1$ premières lignes et les $n - 1$ premières colonnes soit régulière.

Les inconnues principales $x_1, \ldots, x_{n-1}$ s'expriment linéairement en fonction de l'inconnue non principale x_n :

$$x_1 = \rho_1 x_n, \ \ldots, \ x_{n-1} = \rho_{n-1} x_n.$$

Or les cofacteurs $A_{n1}, \ldots, A_{nn}$ des éléments de la dernière ligne du déterminant $|\mathfrak{A}|$ ne sont pas tous nuls (A_{nn} est le déterminant de la sous-matrice principale considérée, donc n'est pas nul), et constituent une solution du système (S), puisque

$$\begin{cases} a_{i1}A_{n1} + \ldots + a_{in}A_{nn} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Toute autre solution de (S) est formée d'éléments proportionnels à celle-là, et par suite nous écrirons toute solution de (S) sous la forme

$$x_1 = \lambda A_{n1}, \qquad x_2 = \lambda A_{n2}, \ \ldots, \ x_n = \lambda A_{nn},$$

λ étant quelconque dans le corps K.

REMARQUE. — Plus généralement, si les éléments d'une ligne du déterminant adjoint de $\mathfrak{A}$ ne sont pas tous nuls, ils constituent une solution du système (S), puisque,

$$\forall j, \begin{cases} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Comme les solutions de (S) sont proportionnelles à l'une d'entre elles, deux lignes quelconques de l'adjoint sont formés d'éléments proportionnels; autrement dit, tout mineur à deux lignes et deux colonnes de l'adjoint est nul, et le rang de l'adjoint est 1.

Si $\rho(\mathfrak{A}) \leqslant n - 2$, tous les éléments de l'adjoint sont nuls.

b) L'étude précédente est aussi celle d'un système de $n - 1$ équations linéaires homogènes à n inconnues, de rang $n - 1$.

Applications. — 1° Soit $\begin{matrix} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$: rang 2.

Toutes les solutions sont proportionnelles à l'une d'elles; en formant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

on obtient, $\quad x = \lambda A'', \quad y = \lambda B'', \quad z = \lambda C''$

A'', B'', C'' étant les cofacteurs de a'', b'', c'' dans Δ, et λ un scalaire du corps K auquel appartiennent les coefficients.

2° Soit $\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d''t = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{bmatrix}$: rang 3.

Toutes les solutions sont proportionnelles à l'une d'elles; en formant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

on obtient : $x = \lambda A'''$, $y = \lambda B'''$, $z = \lambda C'''$, $= \lambda D'''$

A''', B''', C''', D''' étant les cofacteurs de a''', b''', c''', d''' dans Δ, et λ étant arbitraire dans K.

3° Expression de la solution générale d'un système linéaire homogène en fonction de solutions particulières linéairement indépendantes. — En reprenant les considérations du n° 210, 2° et 3°, les solutions d'un système linéaire homogène (H) à p inconnues constituent un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{E}$ dont l'élément générique est le vecteur $\vec{X}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sous-espace qui est le noyau de l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ dans E définie par

$$\varphi(\vec{X}) = x_1\vec{A}_1 + \ldots + x_p\vec{A}_p.$$

Nous allons préciser en cherchant la dimension du noyau.

Si $r = p$, le noyau se réduit au vecteur $\vec{0}_{\mathcal{E}}$.

Si $r < p$, toute solution de (H) dépend des $p - r$ valeurs arbitraires données dans K aux inconnues non principales, il en résulte que la dimension du noyau est $p - r$.

*Cela résulte aussi du n° 168 où nous avons montré

$$\dim(\text{noyau de } \varphi) + \dim[\varphi(\mathcal{E})] = \dim \mathcal{E}.$$

Ici, $\dim \mathcal{E} = p$; $\dim[\varphi(\mathcal{E})]$ est le rang de φ, c'est-à-dire le rang r de la matrice $\mathcal{A}$. Finalement : $\dim(\text{noyau de } \varphi) = p - r$

Si donc l'on connaît $p - r$ solutions linéairement indépendants, $\vec{W}_1$, $\vec{W}_2$, $\ldots$, $\vec{W}_{p-r}$, toute solution $\vec{X}$ de (H) pourra s'écrire

$$\vec{X} = \lambda_1\vec{W}_1 + \ldots + \lambda_{p-r}\vec{W}_{p-r},$$

les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-r}$ étant quelconques dans le corps K.

APPLICATIONS. — I. Soit (1) $\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}$: rang 2.

Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont 2 solutions indépendantes du système (1), c'est-à-dire telles que la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ soit de rang 2,

toutes les solutions de (1) sont données par

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres arbitraires (pris dans le corps K des coefficients).

II. Soit (2) $ax + by + cz + dl = 0$, $(a \quad b \quad c \quad d)$: **rang 1.**

Si l'on connaît 3 solutions indépendantes, c'est-à-dire telles que la matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}$$ soit de rang 3,

toutes les solutions de l'équation (2) sont données par

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \\ t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 \end{cases}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant trois paramètres arbitraires du corps K.

III. Nous avons vu au n° 65 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ ne puissent former un repère vectoriel pour une direction de plan P est qu'il existe deux nombres réels λ et λ' non nuls tous deux tels que $\lambda \vec{V} + \lambda' \vec{V}' = \vec{0}$. Si (a, b, c) et (a', b', c') sont les coordonnées de V et $\vec{V}'$ dans un repère vectoriel $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cette condition se traduit par

$$\begin{cases} \lambda a + \lambda' a' = 0 \\ \lambda b + \lambda' b' = 0 \\ \lambda c + \lambda' c' = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Les égalités (3) constituent un système de 3 équations linéaires et homogènes à 2 inconnues λ et λ' dont la matrice est

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}.$$

Si $\mathcal{A}$ est de rang 2, la seule solution des équations (3) est la solution nulle.

Si $\mathcal{A}$ est de rang 1 (par exemple, $a \neq 0$), les équations (3) admettant une infinité de solutions proportionnelles à $-a'$ et a.

Pour que la condition étudiée soit satisfaite, il faut et il suffit que la matrice $\mathcal{A}$ soit de rang 1.

217. *Liaison entre l'étude d'un système de formes linéaires et celle d'un système d'équations linéaires.* — 1° **Notations.** — Soit $(\mathcal{F})$ un système de n formes linéaires à p indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_p$:

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{A}$ la matrice $[a_{ij}]$ des coefficients; ceux-ci appartiennent au corps K; soit $\rho(\mathcal{A}) = r$.

Associons au système $\mathcal{F}$ le système (S) d'équations linéaires :

$$(S) \begin{cases} f_i = b_i \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

les valeurs des inconnues et les termes tout connus b_i sont pris dans K.

2° **Cas où les formes sont indépendantes.** — Supposons les formes f_i indépendantes, ou, ce qui est équivalent, $r = n$; le système (S) est de rang n, donc est possible quels que soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Il admet une solution unique si $r = n = p$; il admet une infinité de solutions si $r = n < p$. En d'autres termes, on peut attribuer aux indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des valeurs de K telles que les n formes prennent des valeurs arbitrairement imposées dans K.

3° **Cas où les formes sont dépendantes.** — Supposons les formes f_i dépendantes, ou, ce qui est équivalent, $r < n$.

Supposons qu'une sous-matrice carrée principale δ de $\mathfrak{A}$ soit formée avec les r premières lignes et les r premières colonnes de $\mathfrak{A}$.

Toute forme non principale $f_s (s = r + 1, \ldots, n)$ est une combinaison linéaire des formes principales $f_1, \ldots, f_r$, qui, elles, sont indépendantes :

$$f_s = \lambda_{s1} f_1 + \lambda_{s2} f_2 + \ldots + \lambda_{sr} f_r. \qquad (1)$$

On ne peut pas faire acquérir aux formes des valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ données à l'avance, ces valeurs devant nécessairement satisfaire à

$$b_s = \lambda_{s1} b_1 + \lambda_{s2} b_2 + \ldots + \lambda_{sr} b_r. \qquad (2)$$

La relation (1) a été obtenue sous forme de déterminant [formule (1) du n° 208]. En y remplaçant f_i par la valeur imposée b_i, on obtient la relation (2) sous la forme

$$g_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \ldots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0 \quad (s = r + 1, \ldots, n) \qquad (2')$$

qui n'est autre que la condition d'annulation du caractéristique relatif à l'équation non principale de numéro s. Le système (S) n'est possible que si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ satisfont aux $n - r$ conditions (2) ou (2').

REMARQUE. — L'étude précédente montre que la condition $g_s = 0$ exprime que toute solution des équations principales

$$(S_1) \qquad f_1 = b_1, \quad f_2 = b_2, \quad \ldots, \quad f_r = b_r$$

est solution de l'équation non principale $f_s = b_s$.

Autrement dit, si tous les caractéristiques sont nuls, le système (S) est équivalent au système (S_1) formé par les r équations principales.

On retrouve le résultat obtenu au n° 216.

4° **Propriété caractéristique de l'indépendance d'un système de formes linéaires.**

Les hypothèses précédentes et les conclusions s'excluant, on peut conclure aux réciproques et énoncer en particulier :

THÉORÈME. — **Pour que les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ soient indépendantes,**

il faut et il suffit que les équations linéaires

$$f_1 = b_1, \quad f_2 = b_2, \quad \ldots, \quad f_n = b_n$$

soient possibles quelles que soient les valeurs données à $b_1, \ldots, b_n$.

Dans la pratique, c'est souvent l'étude directe du système (S) qui permet d'établir soit l'indépendance des formes linéaires si l'on peut résoudre (S) quels que soient les b_i; soit leur dépendance dans le cas contraire.

218. ***Étude pratique d'un système d'équations linéaires ou d'un système de formes linéaires.*** — 1° L'étude théorique que nous venons de faire nous a permis d'énoncer les résultats généraux concernant les équations, linéaires et, notamment, de mettre en évidence le fait essentiel de l'existence ou d'une solution unique, ou d'une impossibilité, ou d'une indétermination.

Mais bien souvent, dans la pratique, quand on doit résoudre un système particulier d'équations linéaires, il convient de continuer à utiliser les procédés élémentaires signalés dans les classes antérieures à propos des équations quelconques :

a) **Système à inconnues échelonnées.** — $f(x)=0$, $g(x, y)=0$, $h(x, y, z)=0$. A chaque solution x_0 de la première équation, on associe toute solution, y_1, s'il en existe, de l'équation $g(x_0, y) = 0$; puis au couple (x_0, y_1) on associe toute solution z_2, s'il en existe, de l'équation $g(x_0, y_1, z) = 0$.

b) **Méthode de substitution.** — *Étant donné un système d'équations, on obtient un système équivalent en résolvant l'une des équations par rapport à l'une des inconnues comme si les autres étaient connues et en joignant à l'équation ainsi formée celles que l'on obtient en remplaçant dans les autres équations du système l'inconnue considérée par la valeur trouvée.*

Par exemple, on a l'équivalence

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(y, z) \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(y, z) \\ f[\varphi(y, z), y, z] = 0 \\ g[\varphi(y, z), y, z] = 0. \end{array}\right.$$

c) **Méthode d'addition.** — Elle se traduit par une équivalence telle que la suivante, où X, Y, Z désignent des fonctions des mêmes variables :

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} aX + bY + cZ = 0, \quad a \neq 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0. \end{array}\right.$$

2° Dans la pratique, les relations qui existent entre des formes linéaires liées peuvent s'obtenir directement; sinon, on essaie de résoudre le système linéaire associé, comme il a été expliqué au n° **217**.

3° **Exemple I.** — **Pour étudier les formes**

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = y + z \\ f_2 = z + x \\ f_3 = x + y \end{array}\right. \quad \text{considérons le système} \quad \left\{\begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c. \end{array}\right.$$

La résolution est immédiate en observant que

$$2(x + y + z) = a + b + c;$$

on obtient $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$

les formes sont indépendantes.

EXEMPLE II. — Si l'on donne les formes

$$\begin{cases} f_1 = y - z \\ f_2 = z - x \\ f_3 = x - y. \end{cases}$$ on trouve immédiatement $f_1 + f_2 + f_3 = (0)$.

Les formes sont dépendantes.

Les deux équations $f_1 = a$, $f_2 = b$ étant possibles, les deux premières formes sont indépendantes, il n'y a pas lieu de chercher une autre relation que celle qul a été obtenue.

EXEMPLE III. — Plus généralement, soit $\begin{cases} f_1 = cy - bz \\ f_2 = az - cx \\ f_3 = bx - ay. \end{cases}$

La matrice du système est $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$

elle est antisymétrique d'ordre impair, son déterminant est nul; si $c \neq 0$, on peut prendre $\begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix}$ comme déterminant principal. La relation entre les formes est

$$\begin{vmatrix} 0 & c & f_1 \\ -c & 0 & f_2 \\ b & -a & f_3 \end{vmatrix} = (0)$$

c'est-à-dire $af_1 + bf_2 + cf_3 = (0)$ puisque $c \neq 0$.

EXEMPLE IV. — Soit à étudier les formes

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 = \lambda x + y + z \\ f_2 = x + \lambda y + z \\ f_3 = x + y + \lambda z \end{cases}$$ ou, ce qui revient au même, le système $$(2) \quad \begin{cases} f_1 = a \\ f_2 = b \\ f_3 = c \end{cases}$$

1re *méthode.* — En ajoutant membre à membre les équations (2) on obtient

$$(\lambda + 2)(x + y + z) = a + b + c, \tag{3}$$

Si $\lambda \neq -2$, l'équation

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{\lambda + 2} \tag{4}$$

peut remplacer l'une des équations (2). On en déduit, si en outre $\lambda \neq 1$

$$x = \frac{a(\lambda + 1) - b - c}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)}, \quad y = \frac{b(\lambda + 1) - a - c}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)}, \quad z = \frac{c(\lambda + 1) - a - b}{(\lambda - 1)(\lambda + 2)}.$$

Si $\lambda = 1$, le système (2) n'est possible que si $a = b = c$; il se réduit alors à la première des équations (2)

Si $\lambda = -2$, l'égalité (3) montre que le système est impossible si $a + b + c \neq 0$.

Si $\lambda = -2$, et $a + b + c = 0$, le système se réduit à deux des équations (2); en résolvant par exemple les deux dernières par rapport à y et z, on obtient

$$y = x - \frac{2b + c}{3}, \quad z = x - \frac{b + 2c}{3}.$$

En résumé, si $\lambda \neq -2$, et $\lambda \neq 1$, les formes sont indépendantes;
si $\lambda = 1$, les formes sont liées; f_1 étant choisie comme forme principale

$$f_2 = f_1 \quad \text{et} \quad f_3 = f_1;$$

si $\lambda = -2$, les formes sont liées; f_1 et f_2 étant choisies comme formes principales,

$$f_3 = -(f_1 + f_2)$$

2e *méthode.* — La matrice du système (1) est

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \text{son déterminant} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Pour chercher les valeurs de λ qui annulent Δ, on a intérêt à factoriser l'expression de Δ.

Ajoutons à la première ligne les éléments des autres lignes;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Retranchons maintenant la première ligne des deux autres, dans le nouveau déterminant :

$$\Delta = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Si $\lambda \neq -2$ et $\lambda \neq 1$, $\Delta \neq 0$, les formes sont indépendantes.
Si $\lambda = -2$, $\mathcal{A}$ est de rang 2, et l'on a la seule relation $f_1 + f_2 + f_3 = (0)$.
Si $\lambda = 1$, $\mathcal{A}$ est de rang 1, et l'on a les deux relations $f_1 = f_2 = f_3$.

EXEMPLE V.

Étudier les formes :

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \\ f_2 = x_2 + x_3 \\ \cdots\cdots \\ f_n = x_n + x_1 \end{cases}$$

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$$

sont deux problèmes associés.

Nous formerons un système équivalent au système proposé en remplaçant la dernière équation par celle que l'on forme en multipliant par 1 les deux membres de la première, par -1 ceux de la seconde, par $(-1)^2$ ceux de la troisième, par $(-1)^3$ ceux de la quatrième, etc., enfin par $(-1)^{n-1}$ ceux de la n^e et ajoutant membre à membre les équations ainsi obtenues. Soit

$$[1 + (-1)^{n-1}]x_1 = a_1 - a_2 + a_3 \ldots + (-1)^{n-2}a_{n-1} + (-1)^{n-1}a_n$$

l'équation formée.

1° Si *n est impair*, cette dernière équation donne

$$x_1 = \frac{1}{2}[a_1 - a_2 + a_3 \ldots - a_{n-1} + a_n].$$

En portant cette valeur dans la première équation du système on trouve

$$x_2 = \frac{1}{2}[a_2 - a_3 + a_4 \ldots + a_{n-1} - a_n + a_1].$$

Portant cette valeur dans la deuxième équation, on trouvera x_3, etc. En continuant ainsi on trouvera, quel que soit $p \leqslant n$.

$$x_p = \frac{1}{2}[a_p - a_{p+1} + \ldots + (-1)^{n-p}a_n + (-1)^{n-p+1}a_1 + \ldots - a_{p-2} + a_{p-1}].$$

2° *Si n est pair*, la combinaison formée plus haut devient

$$0.x_1 = a_1 - a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} - a_n;$$

si le second membre n'est pas nul, le système est impossible; s'il est nul, le système est indéterminé; dans ce dernier cas on peut donner à x_1 une valeur arbitraire, les $n-1$ premières équations du système proposé permettent d'en déduire successivement les valeurs de $x_2, x_3, \ldots x_n$, qu'il faut associer à la valeur choisie pour x_1 en vue d'obtenir une solution.

En résumé, si n est impair, les formes sont indépendantes

si n est pair, les formes sont liées par l'unique relation

$$f_1 - f_2 + f_3 - \ldots + f_{n-1} - f_n = (0).$$

EXERCICES

1. — Pour résoudre un système de la forme

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'},$$

P, Q, R, P', Q', R' étant des polynômes linéaires en x, y (inconnues), il est souvent commode de prendre comme inconnue auxiliaire la valeur commune ρ des trois rapports et de déterminer ρ de manière que le système linéaire en x, y :

$$P - \rho P' = 0 \qquad Q - \rho Q' = 0 \qquad R - \rho R' = 0$$

soit compatible. Généraliser.

Application. — Résoudre le système :

$$\frac{x+2y+4}{2x-y+1} = \frac{x-y+15}{3x+y+1} = \frac{2x+3y+1}{4x-5y+1}.$$

2. — Étudier les systèmes suivants :

$$\begin{cases} ax + by + t = a + b \\ bx + ay + z = a - b \\ y + az + bt = a + 1 \\ x + bz + at = a - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay + bz + ct = a + b + c \\ ax + cz + bt = a \\ bx + cy + at = b \\ cx + by + az = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = \alpha \\ 4x + y + 2z + 3t = \beta \\ 3x + 4y + z + 2t = \gamma \\ 2x + 3y + 4z + t = \delta \end{cases}$$

$$(a_i - b_1)x + (a_i - b_2)y + (a_i - b_3)z + (a_i - b_4)t = c_i \; (i = 1, 2, 3, 4).$$

3. — Étudier les systèmes suivants :

$$x_i = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases}$$

4. — Étudier les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1 \\ -a_1x_3 + a_3x_1 = b_2 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t + a^4 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3t + b^4 = 0 \\ y + 2az + 3a^2t + 4a^3 = 0 \\ y + 2bz + 3b^2t + 4b^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_2b_3 - a_3b_2)\,x_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\,x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,x_3 = c_4 \\ (a_2b_4 - a_3b_2)\,x_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\,x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,x_4 = -c_3 \\ (a_3b_4 - a_4b_3)\,x_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\,x_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\,x_4 = c_2 \\ (a_3b_4 - a_4b_3)\,x_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\,x_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\,x_4 = -c \end{cases}$$

5. — Dans R^p, déterminer un polygone de n côtés connaissant les milieux de ces côtés.

6. — On considère le système

$$\begin{cases} x + ay + a^m z = a^p \\ x + by + b^m z = b^p \\ x + cy + c^m z = c^p \end{cases}$$

Le résoudre pour

$$m = 2, \quad p = 3;$$
$$m = 2, \quad p = 4;$$
$$m = 3, \quad p = 4.$$

7. — Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda - a} + \dfrac{y}{\lambda - b} + \dfrac{z}{\lambda - c} - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{\mu - a} + \dfrac{y}{\mu - b} + \dfrac{z}{\mu - c} - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{\nu - a} + \dfrac{y}{\nu - b} + \dfrac{z}{\nu - c} - 1 = 0. \end{cases}$$

(On envisagera la fraction rationnelle en t

$$\frac{x}{t - a} + \frac{y}{t - b} + \frac{z}{t - c} - 1$$

où (x, y, z) est une solution du système précédent).

8. — Étudier les systèmes de formes linéaires :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda^2 z \\ x + \mu^2 y + \mu z \\ x + y + z \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + by + cz + dt \\ ax - y + cz + dt \\ ax + by - z + dt \\ ax + by + cz - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \lambda(y - z) \\ y + \lambda(z - x) \\ z + \lambda(x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z + mt \\ z + t + mx \\ t + x + my \\ x + y + mz \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by + cz + dt \\ bx + cy + dz + at \\ cx + dy + az + bt \\ dx + ay + bz + ct \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - \lambda(z + t) \\ \lambda(x - y) - z + t \\ x + y - \mu(z - t) \\ \mu(x - y) - z - t \end{cases}$$

9. — Étudier l'indépendance des formes linéaires P, Q, R, S,
$P = (-a + b + c + d)\,x + (a - b + c + d)\,y + (a + b - c + d)\,z + (a + b + c - d)\,t$
Q, R, S se déduisant de P par des substitutions circulaires sur a, b, c, d (a, b, c, d sont complexes).

10. — Étudier le système des n formes linéaires
$a_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n;\ x_1 + a_2x_2 + x_3 + \ldots + x_n;\ \ldots;\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + a_nx_n.$

11. — A tout point de coordonnées x, y, z de l'espace à trois dimensions, R^3, on fait correspondre dans l'espace à quatre dimensions, R^4, le point dont les coordonnées u, v, w, t, sont données par

$$\begin{cases} u = x + ay + 2az \\ v = ax + y + az \\ w = 2ax + 2ay + z \\ t = (2a + 1)\,x + 3ay + (2a + 1)\,z, \end{cases}$$

où a est un paramètre donné.

On se propose de chercher quels sont les points de R^4 qui sont images des points de R^3 par cette correspondance.

a) Montrer que les coordonnées u, v, w, t de ces points satisfont à une relation indépendante de a.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles les points satisfaisant à la relation précédente ne sont pas tous images de points de R^3.

c) Pour chacune des valeurs de a trouvées au 2° donner des relations nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire u, v, w, t pour être les coordonnées d'un point de R^4, image d'un point de R^3.

12*. — *a*) Déterminer la fraction rationnelle $\frac{Ax^2 + Bx + C}{1 + px + qx^2}$ connaissant les coefficients de son développement en série entière. Discuter.

b) Résoudre le système aux six inconnues u, v, w, λ, μ, ν, dans lequel les nombres α_k sont donnés :

$$u\lambda^k + v\mu^k + w\nu^k = \alpha_k; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

13*. — Résoudre le système de six équations aux six inconnues x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = -5 \\ x_1y_1^2 + x_2y_2^2 + x_3y_3^2 = 20 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_1y_1^3 + x_2y_2^3 + x_3y_3^3 = -59 \\ x_1y_1^4 + x_2y_2^4 + x_3y_3^4 = 182 \\ x_1y_1^5 + x_2y_2^5 + x_3y_3^5 = -545 \end{array}\right.$$

Il y aura intérêt à considérer la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{x_1}{1 - y_1X} + \frac{x_2}{1 - y_2X} + \frac{x_3}{1 - y_3X}.$$

CHAPITRE XVI

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL MATRICES CARRÉES

I. ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL

219. ***L'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel.*** — 1° Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur un corps commutatif K. D'après la définition générale du n° **23** (cf. n° 161, 1°), **on appelle endomorphisme de l'espace vectoriel E tout homomorphisme** (ou **application linéaire**) **de E dans lui-même, pour la structure d'espace vectoriel.**

L'ensemble des endomorphismes de E sera noté $\mathfrak{L}(E)$ ou $\mathfrak{L}$ (quand aucune confusion ne sera possible).

2° **L'algèbre des endomorphismes de** E. — Soit f et g deux endomorphismes quelconques de E. D'après les résultats du n° **164**,

a) on sait définir la somme $f + g$; cette addition munit $\mathfrak{L}$ d'une structure de groupe additif; l'élément neutre est l'endomorphisme nul o associant à tout vecteur de E le vecteur nul de E;

b) on sait définir le produit λf de f par tout scalaire $\lambda \in K$; cette loi externe, associée à l'addition, munit $\mathfrak{L}$ d'une structure d'espace vectoriel sur K;

c) on sait définir le composé $g \circ f$ de f par g, qui est encore un endomorphisme de E; cette opération interne dans l'ensemble $\mathfrak{L}$ n'est pas commutative, elle est distributive par rapport à l'addition, à gauche, et à droite.

En associant *a*) et *c*), on munit $\mathfrak{L}$ d'une structure d'anneau non commutatif, mais unitaire, car si e est l'endomorphisme identique de E (associant $\vec{X}$ à $\vec{X}$),

$$f \circ e = f \qquad e \circ f = f.$$

Enfin, en associant les structures d'anneau et d'espace vectoriel déjà mises en évidence et en remarquant que d'autre part

$$\begin{pmatrix} \forall f,\ g \in \mathfrak{L} \\ \forall \alpha \in K \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) \\ f \circ (\alpha g) = \alpha(f \circ g) \end{cases}$$

on constate que $\mathfrak{L}$ a été muni d'une structure d'algèbre (150), non commutative mais unitaire, sur le corps K.

REMARQUE. — L'anneau $\mathfrak{L}$ admet des diviseurs de zéro; par exemple si E est l'espace vectoriel R^2 rapporté à sa base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ et si f (resp. g) est la projection sur le sous-espace engendré par $\vec{i}$ (resp $\vec{j}$), parallèlement au sous-espace engendré par $\vec{j}$ (resp. $\vec{i}$), $g \circ f$ est l'endomorphisme nul.

220. ***Le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel.***

1° Nous avons déjà rencontré (n° 163) la définition suivante :

On appelle automorphisme d'un espace vectoriel E **tout endomorphisme bijectif de l'espace vectoriel** E, **ou isomorphisme de** E **sur** E, **pour la structure d'espace vectoriel.**

On peut dire endomorphisme régulier de E, *ou opérateur linéaire régulier de* E, au lieu d'automorphisme de E.

Il résulte du n° 163 qu'un automorphisme de E admet une application réciproque, qui est un automorphisme de E.

2° **Groupe linéaire d'un espace vectoriel.** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La composition des applications munit l'ensemble $\mathfrak{L}^*$ des automorphismes d'un espace vectoriel** E **d'une structure de groupe; on dit qu'il s'agit du groupe linéaire de l'espace vectoriel** E; **on le note** GL(E).

I. La loi $\circ$ est interne dans $\mathfrak{L}^*$.

En effet si f et g sont deux automorphismes de E, l'application $g \circ f$, qui est un endomorphisme (n° 165 et n° 219) est aussi bijective comme composée de deux applications bijectives (n° 18).

La loi de composition $\circ$ est associative.

II. L'automorphisme identique e est un élément de l'ensemble $\mathfrak{L}^*$; c'est un élément neutre pour la loi $\circ$.

III. Tout automorphisme f admet, d'après le 1°, un automorphisme réciproque, f^{-1} :

$$f^{-1} \circ f = e \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = e$$

3° THÉORÈME. — **Si f est un automorphisme de** E **et si g étant un endomorphisme de** E, $f \circ g$ **est l'endomorphisme nul de** E, g **est nécessairement l'endomorphisme nul de** E.

Désignons par o l'endomorphisme nul de E; par hypothèse

$$f \circ g = o \tag{1}$$

f^{-1} désignant l'automorphisme réciproque de f, (1) entraîne successivement

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = o, \quad (f^{-1} \circ f) \circ g = o, \quad e \circ g = o, \quad g = o.$$

COROLLAIRE. — Si f est un automorphisme

$$f \circ g = f \circ g' \Longrightarrow g = g'$$

car la distributivité de l'opération $\circ$ permet d'écrire successivment

$$f \circ g - f \circ g' = o, \quad f \circ (g - g') = o, \quad g - g' = o, \quad g = g'.$$

REMARQUE. — On obtient des résultats analogues si, par hypothèse, $g \circ f = o$, f étant un automorphisme de E.

4° Automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. — *a*) Supposons maintenant que l'espace vectoriel E soit de dimension finie n. Les résultats du n° 170 permettent d'énoncer :

THÉORÈME. — **f étant un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, f est un automorphisme si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :**

a) **f est injectif,**

b) **f est surjectif,**

c) **l'image par f d'une base de E est une base de E,**

d) **le rang de f est égal à la dimension de E.**

REMARQUE. — Le groupe linéaire d'un espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à celui de l'espace vectoriel K^n, que l'on appelle simplement *groupe linéaire d'ordre n*.

b) THÉORÈME. — **Deux endomorphismes, f et g, d'un espace vectoriel E de dimension finie n dont le produit est un automorphisme sont eux-mêmes des automorphismes.**

Par hypothèse : $\dim(g[f(E)]) = n$.

Or, l'application linéaire g ne pouvant augmenter la dimension,

$$\dim(g[f(E)]) \leqslant \dim f(E) \quad \text{et} \quad \dim f(E) = n$$

Ainsi f est un automorphisme. Alors $f(E) = E$ et $\dim g(E) = n$, ce qui montre que g est un automorphisme.

COROLLAIRE. — Si un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un inverse à gauche (resp. à droite) c'est-à-dire s'il existe un endomorphisme g (resp. d) de E tel que, e désignant l'endomorphisme identique de E,

$$g \circ f = e \quad [\text{resp. } f \circ d = e],$$

f est un automorphisme; g (resp. d) n'est autre que f^{-1} et joue également le rôle d'inverse à droite (resp. à gauche).

c) REMARQUE. — La situation est plus complexe dans un espace vectoriel de dimension infinie. C'est ainsi que, E désignant l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur le corps K, considérons les applications f et g déterminées par :

$$B = f(A) \text{ signifie } b_{2n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = 0$$
$$C = g(A) \text{ signifie } c_n = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Le lecteur vérifiera que f et g sont linéaires, que f est injective mais non surjective, que g est surjective mais non injective enfin que

$$g \circ f = e \qquad \text{mais} \qquad f \circ g \neq e.$$

5° Endomorphismes singuliers. — Un endomorphisme f de E qui n'est pas bijectif est dit singulier. Quand E a une dimension finie, on reconnaît que f est singulier à l'une des circonstances suivantes :

a) le rang de f est inférieur à n;

b) f applique E sur une partie de E autre que E;

c) l'image $f(\mathfrak{U})$ d'une base $\mathfrak{U}$ de E est un système lié;

d) Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\vec{0}_E$.

II. MATRICES CARRÉES

221. ***L'algèbre des matrices carrées d'ordre n.*** — 1° Nous avons, aux nos **173** et **175**, structuré l'ensemble $\mathfrak{M}(p, n)$ des matrices de dimensions p et n sur le corps commutatif K, à partir de la bijection (désignée par φ) sur $\mathfrak{M}(p, n)$ de l'ensemble $\mathfrak{L}(E, F)$ des applications linéaires de E (dim E = n) dans F (dim F = p), les espaces vectoriels E et F étant rapportés à des bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$.

Nous allons appliquer cette méthode en la restreignant aux endomorphismes de E d'une part, et aux matrices carrées d'ordre n d'autre part.

Nous choisissons une fois pour toutes un espace vectoriel E, de dimension n sur le corps commutatif K, et une base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de E. En posant F = E, $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, nous disposons d'une bijection φ de l'ensemble $\mathfrak{L}$ des endomorphismes de E sur l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices carrées d'ordre n, sur le corps K. La bijection φ associe à l'endomorphisme générique f de $\mathfrak{L}$ la matrice A de $\mathfrak{M}$ dont la j-ième colonne est formée par les coordonnées, dans la base $\mathfrak{U}$, de l'image par f du vecteur $\vec{u}_j$, soit

$$\begin{array}{c|c} & f(\vec{u}_j) \\ \hline \vec{u}_i & [a_{ij}] \end{array} = \mathrm{A}.$$

La définition des opérations sur les matrices a précisément été choisie de façon que φ soit un isomorphisme pour les lois : addition, multiplication par un scalaire; il en est résulté, dans le cas général, la possibilité de transférer la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E, F)$ à $\mathfrak{M}(p, n)$.

Ici (ce qui n'avait pas lieu dans le cas général), la « composition des applications » et le « produit des matrices » sont des lois internes respectivement pour $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$, et la bijection φ est un isomorphisme pour ces lois (la matrice de $g \circ f$ est le produit de la matrice de g, à gauche, par celle de f, à droite). D'où la possibilité de transférer à $\mathfrak{M}$ les structures d'anneau et d'algèbres, unitaires et non commutatifs, sur le corps K mises en évidence au n° **219** en ce qui concerne $\mathfrak{L}$.

REMARQUES — I. — L'élément neutre de la multiplication sur $\mathfrak{M}$ est l'image par φ de l'endomorphisme identique de $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire (n° **173**, 5°) la matrice

$$\mathrm{I}_n = [\delta_{ij}] \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \delta_{ii} = 1 \end{cases}$$

que nous avons appelée matrice-unité d'ordre n.

Nous avons d'ailleurs eu l'occasion de montrer directement (au n° **180**) que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathfrak{M} \qquad \mathrm{I}_n \mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{I}_n = \mathrm{A}.$$

II) L'anneau $\mathfrak{M}$ n'est pas commutatif; par exemple, soit

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & \beta' \\ \alpha' & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta' \\ \beta\alpha' & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & \beta\beta' \\ \alpha\alpha' & 0 \end{bmatrix}$$

III) L'anneau $\mathfrak{M}$ admet des diviseurs de zéro, par exemple

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2° **Matrices commutables avec une matrice donnée.** — Nous venons de constater qu'il existe une matrice I telle que IA = AI. Plus généralement, *existe-t-il des matrices* B *commutables avec* A quelle que soit A, c'est-à-dire telles que BA = AB quelle que soit A?

On doit avoir

$$\sum_{j=1}^{j=n} b_{ij}a_{jk} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}b_{jk} \qquad \text{quels que soient les éléments } a_{ij}.$$

Les termes en a qui ne figurent qu'une fois ont nécessairement leurs coefficients nuls; seul a_{ik} figure aux deux membres, et par suite

$$b_{ii} = b_{kk}.$$

En résumé

$$\begin{cases} b_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn}. \end{cases}$$

Toute matrice commutable avec A, quelle que soit A, est nécessairement de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} \qquad (\lambda \in K).$$

Une telle matrice est appelée *matrice scalaire*. On peut la représenter par le symbole $[\lambda]$.

D'ailleurs $[\lambda] = \lambda I$, I étant la matrice unité :

multiplier la matrice A par la matrice scalaire $[\lambda]$ (à gauche, ou à droite) c'est multiplier par λ tous les éléments de A.

REMARQUE. — On en déduit, en utilisant la bijection φ, que les seuls endomorphismes d'un espace vectoriel E, de dimension finie, qui commutent avec tout endomorphisme de E sont les endomorphismes de la forme

$$\lambda e \qquad (\lambda \in K; \ e : \text{endomorphisme identique de E}).$$

Ces endomorphismes sont appelés *homothéties*.

222. ***Le groupe des matrices carrées régulières d'ordre*** n. — 1° Les notations étant celles du n° **221**, 1°, nous allons démontrer que, dans la bijection φ, l'image de la partie $\mathfrak{L}^*$ de $\mathfrak{L}$ formée par les automorphismes est la partie de $\mathfrak{M}$ formée par les matrices régulières, partie que nous désignerons par $\mathfrak{M}^*$.

Rappelons que nous avons défini (n° **199**) une matrice carrée régulière, A, comme étant une matrice carrée dont le déterminant n'est pas nul.

Étant entendu que A désigne $\varphi(f)$, ou, ce qui revient au même que f désigne $\varphi^{-1}(A)$, démontrons l'équivalence logique :

(1) $\qquad f \in \mathfrak{L}^* \iff A \in \mathfrak{M}^* \qquad$ (2)

En effet :
d'après le n° **220**, 4° : (1) $\iff \rho(f) = n$
d'après les n^{os} **199** et **204** (2) $\iff \rho(A) = n$.
Or $A = \varphi(f)$ entraîne : $\rho(f) = \rho(A)$, (**209**, 1°).

Autre démonstration. — D'après les n^{os} **220** et **201**,

(1) $\iff \exists g \in \mathfrak{L}$ tel que $f \circ g = e$ (3)
(2) $\iff \exists B \in \mathfrak{M}$ telle que $AB = I_n$ (4)

En posant $B = \varphi(g)$ ou $g = \varphi^{-1}(B)$ on constate : (3) $\iff$ (4).

En résumé : **un automorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est caractérisé par le fait que la matrice carrée qui le représente dans une base quelconque de** E **est régulière.**

2° **Rappels.** — Rappelons les propriétés déjà rencontrées pour les matrices carrées régulières (n^{os} **199**, **201**, **209**, **211**) :

A est régulière $\left\{\begin{array}{l} \iff \text{les vecteurs-colonnes de A sont indépendants} \\ \iff \text{les vecteurs-lignes de A sont indépendants} \\ \iff \text{tout système linéaire ayant pour matrice A a une solution unique} \\ \iff \text{le rang de A est égal à son ordre} \\ \iff \text{A est inversible.} \end{array}\right.$

Nous pouvons dès maintenant signaler comme exemples de matrices régulières :

1° la matrice-unité;

2° une matrice scalaire $[\lambda]$ (naturellement, $\lambda \neq 0$);

3° une matrice triangulaire (n° **182**) lorsque la diagonale principale d'une telle matrice n'a aucun élément nul.

2° **Groupe multiplicatif des matrices carrées régulières d'ordre** n. — Il résulte du 1° que la restriction à $\mathfrak{L}^*$ de la bijection φ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}^*$ muni de la loi « composition des applications » sur $\mathfrak{M}^*$ muni de la loi « multiplication des matrices ». On déduit du n° **220**, 2° que $\mathfrak{M}^*$ est un groupe isomorphe au groupe linéaire GL(E) et, par suite, au groupe linéaire d'ordre n : le produit de deux matrices régulières d'ordre n est une matrice régulière d'ordre n; la matrice-unité I_n est élément neutre pour l'opération; l'élément inverse, A^{-1}, de la matrice A de $\mathfrak{M}^*$ a été étudié au n° **201**; comme dans tout groupe, l'inverse du produit BA est le produit $A^{-1}B^{-1}$.

REMARQUE. — L'addition des endomorphismes (resp. des matrices) est une loi interne dans $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{M}$) mais pas dans $\mathfrak{L}^*$ (resp $\mathfrak{M}^*$); il n'est donc pas question de l'associer à la loi de groupe pour munir $\mathfrak{L}^*$ (resp. $\mathfrak{M}^*$) d'une structure de corps.

3° THÉORÈME. — **Soit** A **et** B **deux matrices d'ordre** n

$$\left.\begin{array}{l} BA = [0] \quad \text{ou} \quad AB = [0] \\ \text{et A régulière} \end{array}\right\} \Longrightarrow B = [0]$$

COROLLAIRE : $\left.\begin{array}{l} BA = B'A \text{ ou } AB = AB' \\ \text{et A régulière} \end{array}\right\} \Longrightarrow B = B'$

Ces propositions peuvent se déduire, grâce à l'isomorphisme φ, du n° 220, 3° ou se démontrer directement, en utilisant le même procédé.

4° **Calcul pratique de la matrice inverse d'une matrice carrée régulière.** — Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n, régulière : $\det A \neq 0$.

a) Pour calculer A^{-1} on peut utiliser son expression théorique. Nous avons vu au n° 201

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{tr}(\operatorname{com} A);$$

en posant $\quad A^{-1} = [b_{ij}], \qquad b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}.$

b) On peut aussi utiliser l'endomorphisme réciproque. Étant donnée la matrice régulière A, l'endomorphisme associé f se traduit par la relation matricielle

$$Y = AX \qquad \text{où} \qquad X = [x_i], \qquad Y = [y_i].$$

En multipliant les deux membres, à gauche, par A^{-1}, on obtient

$$X = A^{-1} Y$$

égalité condensant la résolution par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right.$$

Si l'on peut résoudre directement les équations précédentes, les formules obtenues permettent d'obtenir la matrice A^{-1}.

Cette méthode est de beaucoup la meilleure dans les exemples simples.

Par exemple, cherchons la matrice inverse de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \text{posons} \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{array}\right.$$

La résolution du système précédent donne

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ y = \frac{1}{2}(x' - y' + z') \\ z = \frac{1}{2}(x' + y' - z') \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5° **Anneau des matrices diagonales.** — Nous reprenons les notations du n° 182, 5°.

a) La somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale :

$$[\alpha_{ii}] + [\beta_{ii}] = [\alpha_{ii} + \beta_{ii}].$$

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale :

$$[\alpha_{ii}] \times [\beta_{ii}] = [\alpha_{ii}\beta_{ii}]$$

et ce produit est commutatif.

Les matrices diagonales définissent donc un sous-anneau commutatif de l'anneau $\mathfrak{M}$ des matrices carrées d'ordre n.

b) En outre la matrice diagonale $[\alpha_{ii}]$ est régulière si, et seulement si, tous les éléments α_{ii} sont différents de zéro; dans ce cas la matrice inverse est la matrice diagonale $\left[\frac{1}{\alpha_{ii}}\right]$.

Les matrices diagonales régulières d'ordre n forment donc un corps.

c) En particulier la matrice scalaire $[a]$ est régulière si $a \neq 0$, et la matrice inverse est la matrice scalaire $\left[\frac{1}{a}\right]$.

6° REMARQUE. — Les exemples précédemment donnés d'endomorphismes associés à des transformations géométriques (n° 162) donnent des matrices inverses.

a) La transformation inverse d'une rotation étant la rotation de même centre, d'angle opposé on vérifiera,

$$\mathcal{R}_{-\theta}\mathcal{R}_{\theta} = \mathrm{I}.$$

b) La matrice $\mathcal{S}_{\alpha}$ d'une symétrie par rapport à la droite OΔ est à elle-même son inverse

$$(\mathcal{S}_{\alpha})^2 = \mathrm{I}.$$

c) Les rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et de $\frac{4\pi}{3}$ autour de l'axe $\Delta(x = y = z)$, symbolisées par f et g au n° 162 sont deux transformations réciproques, et leurs matrices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont inverses :

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathrm{I}.$$

223. ***Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée.*** — 1° Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif K. Reprenons les algèbres $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ des endomorphismes de E et des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans K; soient e et I les éléments neutres de l'addition sur $\mathfrak{L}$ et sur $\mathfrak{M}$. Nous posons

$$f^m = f \circ f^{m-1}; \qquad \mathrm{A}^m = \mathrm{A} \circ \mathrm{A}^{m-1} \qquad (m \geqslant 2)$$

$$f^0 = e; \qquad \mathrm{A}^0 = \mathrm{I}.$$

Nous avons ainsi, pour tout couple de naturels p et q,

$$(1) \qquad f^q \circ f^p = f^{p+q} = f^p \circ f^q; \qquad \mathrm{A}^q\mathrm{A}^p = \mathrm{A}^{p+q} = \mathrm{A}^p\mathrm{A}^q.$$

D'autre part

$$(2) \qquad \lambda e \circ f = \lambda f = f \circ \lambda e; \qquad (\lambda \mathrm{I})\mathrm{A} = \lambda\mathrm{A} = \mathrm{A}(\lambda \mathrm{I}).$$

2° Fixons un endomorphisme f de $\mathfrak{L}$ et une matrice A de $\mathfrak{M}$. A tout polynôme Q, à coefficients dans K, dont l'indéterminée est désignée par λ, soit

$$\mathrm{Q}(\lambda) = c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \ldots + c_m \qquad (c_i \in \mathrm{K})$$

nous pouvons alors associer l'endomorphisme $Q(f)$ et la matrice $Q(A)$ déterminés par

$$\begin{cases} Q(f) = c_0 f^m + c_1 f^{m-1} + \ldots + c_m e \\ Q(A) = c_0 A^m + c_1 A^{m-1} + \ldots + c^m I. \end{cases}$$

Il résulte de (1) et (2) que si, dans l'ensemble $K[\lambda]$ des polynômes à coefficients dans K et à l'indéterminée λ, Q est le produit (nécessairement commutatif) de R par S, on a :

$$\begin{cases} R(f) \circ S(f) = S(f) \circ R(f) = Q(f) \\ R(A)\, S(A) = S(A)\, R(A) = Q(A). \end{cases}$$

Le lecteur en déduira que f (resp. A) restant fixe la partie, $K[f]$, (resp. $K[A]$) de $\mathfrak{L}$, (resp. $\mathfrak{M}$) engendrée par $Q(f)$, [resp. Q (A)] quand Q décrit $K[\lambda]$ est un sous-espace vectoriel, un sous-anneau, et même une *sous-algèbre commutative de* $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{M}$).

3° En particulier si K est le corps des complexes, ou plus généralement un corps algébriquement clos (**113**, 5°), on sait que $Q(\lambda)$ peut être factorisé sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré, soit

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_m) \qquad (\lambda_i \in K).$$

On en déduit les deux factorisations

$$\begin{cases} Q(f) = (f - \lambda_m e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_2 e) \circ (f - \lambda_1 e) \\ Q(A) = (A - \lambda_m I) \ldots (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I), \end{cases}$$

dans lesquelles deux quelconques des facteurs du second membre sont commutables.

REMARQUE. — Si nous reprenons la bijection φ de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{M}$ obtenue en associant à un endomorphisme de E la matrice qui le représente dans une base donnée de E nous constatons que

$$A = \varphi(f) \Longrightarrow \forall Q \in K[\lambda], \qquad Q(A) = \varphi[Q(f)],$$

ce qui explique le parallélisme des résultats.

224. ***Matrice-substitution.*** — 1° **Définition.** — On appelle *matrice-substitution* d'ordre n une matrice (n, n) dans laquelle chaque ligne et chaque colonne contient un, et un seul élément non nul, égal à l'élément neutre 1 de la multiplication dans le corps considéré K.

Soit $A = [a_{ij}]$ une telle matrice et soit $s(j)$ l'indice de ligne de l'élément de la colonne j qui est égal à 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq s(j) \\ 1 \text{ si } i = s(j) \end{cases} \Longrightarrow a_{ij} = \delta_{i,s(j)}, \text{ (Kronecker).}$$

D'autre part l'ensemble rangé $\{ s(1), s(2), .., s(n) \}$, formé de naturels deux à deux distincts appartenant au segment $[1, n]$, est une permutation des n premiers naturels si bien qu'à la matrice-substitution A on peut associer la substitution

$$s = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & j & \ldots\ldots & n \\ s(1) & \ldots & s(j) & \ldots\ldots & s(n) \end{pmatrix}$$

et réciproquement, ce qui détermine une bijection, ψ, du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble, $\mathfrak{E}_n$, des matrices-substitutions d'ordre n.

2° **Le groupe des matrices-substitutions d'ordre *n*.** — Soit $A = \psi(s)$ et $B = \psi(t)$. Le terme du produit $C = BA$ qui correspond à la ligne i et à la colonne k est

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{jk} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,s(j)}\, \delta_{j,s(k)}.$$

Dans la dernière somme, on ne peut avoir un terme non nul que pour $j = s(k)$, ce qui entraîne

$$c_{ik} = \delta_{i,s[s(k)]} \quad \text{ou} \quad c_{ik} = \delta_{i,u(k)} \ (u = t \circ s).$$

Ainsi BA n'est autre que la matrice-substitution qui correspond par la bijection ψ à la substitution $u = t \circ s$. Il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{E}_n$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

3° **Déterminant d'une matrice-substitution.** — Le déterminant de la matrice $A = \psi(s)$ comporte un seul terme non nul; on a

$$\text{dét } A = \varepsilon(s)\, a_{s(1),1} \ldots a_{s(n),n} \quad \text{ou} \quad \varepsilon(s).$$

Ainsi dét A est $+1$ ou -1 suivant que la substitution s est paire ou impaire.

La matrice $A = \psi(s)$ est régulière et a pour inverse $B = \psi(s^{-1})$. On a

$$B = [b_{ij}] \quad \text{avec} \quad b_{ij} = \delta_{i,s^{-1}(j)}.$$

Les naturels t et $s^{-1}(j)$ étant égaux si, et seulement si leurs images par s sont égales, on peut écrire : $b_{ij} = \delta_{s(i),j}$, ou $\delta_{j,s(i)}$; finalement.

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \tilde{A}$$

(après avoir étudié le n° 22 du tome III, le lecteur vérifiera sans difficulté qu'une matrice-substitution est orthogonale, ce qui explique la dernière égalité).

4° **Applications aux manipulations de lignes et de colonnes sur une matrice.** — Nous constatons que $x_1, .., x_n$ étant des éléments quelconques du corps K, nous avons l'égalité matricielle suivante, dans laquelle A désigne la matrice-substitution d'ordre n associée à la substition s,

$$(1) \qquad [x_1 \ldots\ldots x_n]\, A = [x_{s(1)} \ldots\ldots x_{s(n)}]$$

Plus généralement, $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ désignant des matrices-colonnes d'ordre p, sur le corps K,

$$[\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n]\, A = [\mathfrak{X}_{s(1)} \ldots \mathfrak{X}_{s(n)}].$$

Autrement dit, la multiplication à droite par une matrice-substitution d'ordre n transforme une matrice (p, n) en une autre, formée des mêmes colonnes, placées dans un ordre différent.

Par transposition, la formule (1) donne

$$(2) \qquad \tilde{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{s(n)} \end{bmatrix}$$

La multiplication à gauche, par une matrice-substitution d'ordre n transforme une matrice (n, p) en une autre formée des mêmes lignes, placées dans un ordre différent.

5° **Endomorphisme associé à une matrice-substitution.** — On peut considérer la matrice-substitution A comme celle d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, de dimension n, rapporté à une base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

$$f(\vec{u}_j) = \vec{u}_{s(j)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

et par suite l'image par f du vecteur $\vec{X}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur $\vec{Y}$ de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, avec

$$y_{s(j)} = x_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

ce qu'on peut encore écrire

$$y_i = x_{s^{-1}(i)} \quad (i = 1, \ldots, n);$$

ce résultat est encore exprimé par la formule (2), puisque $\tilde{A} = A^{-1}$.

6° **Matrice-transposition.** — Supposons que la substitution τ se réduise à la transposition de i et j :

$$\tau(i) = j;\ \tau(j) = i;\ \tau(k) \text{ si } k \notin \{ i, j \}.$$

La matrice associée T a pour expression

$$\mathrm{T} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & i \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & j \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & n \end{array}\right] \end{array}$$

et $\widetilde{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$.

Multiplier une matrice (n, p) à gauche, par T, c'est permuter les lignes i et j; multiplier une matrice (p, n), à droite, par T, c'est permuter les colonnes i et j.

III. MATRICES ÉQUIVALENTES, SEMBLABLES, CONGRUENTES

225. ***Changement de base. Matrice de passage.*** — 1° **Changement de coordonnées.** — Soit $\mathfrak{U} = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \}$ une base de l'espace vectoriel E de dimension n.

Soit $\mathfrak{U}' = \{ \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \dots, \vec{u}'_n \}$ une autre base de E; nous supposons $\vec{u}'_j$ déterminé par ses coordonnées $p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj}$ dans la base $\mathfrak{U}$:

$$\vec{u}'_j = p_{1j}\vec{u}_1 + p_{2j}\vec{u}_2 + \dots + p_{nj}\vec{u}_n \qquad (1)$$

Posons

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \dots & \vec{u}'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{array} \left[\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{array}\right] \end{array} = \mathrm{P}$$

La j-ième colonne de P comprend les coordonnées de $\vec{u}'_j$. Les vecteurs $\vec{u}'_j$ étant indépendants, la matrice P est régulière.

Soit $\vec{X}$ un vecteur de E $\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ ses coordonnées dans } \mathfrak{U} \\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \text{ ses coordonnées dans } \mathfrak{U}'. \end{cases}$

$$\vec{X} = \vec{u}_1 x_1 + \ldots + \vec{u}_n x_n = \vec{u}'_1 x'_1 + \ldots + \vec{u}'_n x'_n. \qquad (2)$$

En tenant compte des égalités (1), l'égalité des deux expressions (2) de $\vec{X}$ donne

$$\sum_i \vec{u}_i x_i = \sum_j \left[\sum_i \vec{u}_i p_{ij} \right] x'_j \qquad (3)$$

d'où, en égalant les coefficients de $\vec{u}_i$ dans les deux membres,

$$x_i = \sum_j p_{ij} x'_j \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x_i = p_{i1} x'_1 + p_{i2} x'_2 + \ldots + p_{in} x'_n \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (4)$$

Posons

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{bmatrix}$$

les n égalités (4) se condensent dans l'égalité matricielle

$$X = PX'. \qquad (5)$$

Inversement, la formule

$$X' = P^{-1}X$$

fournit les nouvelles coordonnées du vecteur $\vec{X}$ en fonction des anciennes.

La matrice P qui intervient dans la formule (5) est dite *matrice de passage* de l'*ancienne base* $\mathfrak{U}$ à la *nouvelle base* $\mathfrak{U}'$.

Dans le cas où plusieurs bases interviennent simultanément, on peut, pour la clarté, noter $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}$ la matrice de passage de la base $\mathfrak{U}$ à la base $\mathfrak{U}'$. Si l'on définit une base $\mathfrak{U}''$ par rapport à $\mathfrak{U}'$, l'application de la formule (5) conduit à

$$X = P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} X', \quad X' = P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''} X'', \quad X = P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''} X''$$

d'où :

$$\forall \vec{X} \in E, \quad P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''} X'' = P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''} X'',$$

ce qu'on peut interpréter en disant que les deux automorphismes de E respectivement représentés dans la même base $\mathfrak{U}''$ par les matrices $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''}$ et $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}$ coïncident, ce qui se traduit par l'égalité des matrices, soit :

$$P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''} = P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} \times P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}$$

2° **Contrevariance.** — La matrice P peut-être considérée comme celle d'un automorphisme f agissant sur les vecteurs $\vec{X}$ de l'espace vectoriel E, rapporté à la base $\mathfrak{U}$.

f est tel que les vecteurs-colonnes de P soient précisément $f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)$.

Autrement dit, l'opérateur f est celui qui transforme $\vec{u}_i$ en

$$\vec{u}'_i = f(\vec{u}_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $\vec{Y}$ est l'image de $\vec{X}$ par f, et si $Y = [y_i]$ est la matrice unicolonne des coordonnées de $\vec{Y}$

$$Y = PX. \tag{6}$$

La formule (6) donne les coordonnées du vecteur transformé en fonction de celles du vecteur initial [la base est restée la même].

Au contraire, la formule (5), où c'est le vecteur qui est resté le même, donne les anciennes coordonnées de ce vecteur en fonction des nouvelles, on dit que les coordonnées d'un vecteur se transforment de façon *contrevariante* à celle de la base.

Si U_i et U'_i sont les matrices colonnes de $\vec{u}_i$ et de son transformé $\vec{u}'_i$ par f,

$$\underset{\text{(nouveau)}}{U'_i} = P \underset{\text{(ancien)}}{U_i},$$

mais

$$\underset{\text{(ancien)}}{X} = P \underset{\text{(nouveau)}}{X'}.$$

226. ***Orientation d'un espace vectoriel réel.*** — Soit E un espace vectoriel de dimension n *sur le corps des réels*. La matrice de passage de la base $\mathfrak{U}$ à la base $\mathfrak{U}'$, $P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}$, a ses éléments réels, et son déterminant est un nombre réel, positif ou négatif.

La base $\mathfrak{U}$ étant choisie une fois pour toutes, soit $\varepsilon' = +1$ ou -1 suivant que $\det\left(P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'}\right)$ est positif ou négatif. Soit de même $\varepsilon'' = +1$ ou -1 suivant que $\det\left(P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''}\right)$ est positif ou négatif.

$$P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}''} = P_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}'} \times P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}$$

par suite $\det\left(P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}\right)$ a même signe que $\varepsilon'\varepsilon''$.

Rangeons dans une classe I les bases $\mathfrak{U}'$ pour lesquelles $\varepsilon' = +1$, dans une classe II les bases $\mathfrak{U}'$ pour lesquelles $\varepsilon' = -1$.

Si alors $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}''$ sont dans la même classe, $\varepsilon'\varepsilon'' = +1$, et $\left(\det P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}\right) > 0$.

Si $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}''$ sont dans des classes différentes, $\varepsilon'\varepsilon'' = -1$ et $\left(\det P_{\mathfrak{U}'}^{\mathfrak{U}''}\right) < 0$.

Nous définissons ainsi une partition en deux classes de l'ensemble des bases de E. *Orienter* E, *c'est distinguer l'une de ces deux classes.*

227. ***Matrices équivalentes.*** — **1° Transformation par changement des bases de la matrice d'une application linéaire.** — Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K, de dimensions respectives n et p. E est rapporté à une base $\mathfrak{U}$, F à une base $\mathfrak{V}$. Soit f une application linéaire de E dans F, A sa matrice (p, n). Soit X et Y les matrices unicolonnes du vecteur $\vec{X}$ de E et de son image $\vec{Y}$ par f, dans F :

$$Y = AX. \qquad (1)$$

Soit $\mathfrak{U}'$ une nouvelle base de E, S la matrice de passage de $\mathfrak{U}$ à $\mathfrak{U}'$; la nouvelle matrice X′ associée à $\vec{X}$ est donnée par

$$X = SX'.$$

Soit $\mathfrak{V}'$ une nouvelle base de F, T la matrice de passage de $\mathfrak{V}$ à $\mathfrak{V}'$; la nouvelle matrice Y′ associée à $\vec{Y}$ est donnée par

$$Y = TY'.$$

En portant dans (1), on obtient

$$TY' = ASX'$$

d'où

$$Y' = T^{-1}ASX'.$$

La matrice A′ qui définit la même application linéaire dans les nouvelles bases est

$$A' = T^{-1}AS.$$

2° Matrices équivalentes. — DÉFINITION. — **Deux matrices A et A′, sur le corps K, de mêmes dimensions (p, n) sont dites équivalentes s'il existe deux matrices carrées régulières P et Q, d'ordres respectifs p et n, telles que**

$$A' = PAQ.$$

Dans cette définition, les matrices A et A′ jouent le même rôle; la relation précédente est en effet une relation d'équivalence :

R) $A = I_pAI_n$ I_p et I_n étant les matrices unités d'ordres p et n;

S) P et Q étant régulières admettent des inverses, et par suite

$$A = P^{-1}A'Q^{-1};$$

T) supposons $A'' = P'A'Q'$, P′ et Q′ étant régulières.

$$A'' = P'(PAQ)Q'$$
$$A'' = (P'P)A(QQ')$$

les produits P′P et QQ′ étant réguliers.

A″ est équivalente à A.

3° Interprétation géométrique. — Si l'on change les bases des espaces

vectoriels E et F, la nouvelle matrice de l'application linéaire f est équivalente à l'ancienne.

Inversement, une matrice A′ équivalente à une matrice donnée A peut être considérée comme la matrice de la même application linéaire, mais par rapport à d'autres bases choisies dans les espaces vectoriels associés.

*4° **Matrice canonique d'une application linéaire.** — Gardons les notations du 1°, et supposons f de rang r. Nous allons, par un choix convenable des bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ simplifier la matrice de f.

Soit S le noyau de f, et T un sous-espace supplémentaire (n° 160) : dim T $= r$; dim S $= n - r$; soit $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ une base de T, $\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n$ une base de S; l'ensemble des $\vec{u}$ est une base de E.

On sait que f établit un isomorphisme entre T et son image f(T) dans F; l'image de la base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ de T est une base $\vec{v}_1 = f(\vec{u}_1), \ldots, \vec{v}_r = f(\vec{u}_r)$ de f(T); on complète par $\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_p$ de façon à obtenir une base $\mathfrak{V}$ de F.

Le tableau suivant donne les coordonnées des vecteurs $f(\vec{u}_i)$ dans la base $\mathfrak{V}$ de F.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} f(\vec{u}_1) & \ldots & f(\vec{u}_r) & f(\vec{u}_{r+1}) & \ldots & f(\vec{u}_n) \end{array} \\
\begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_p \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & . & 0 & 0 & . & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & . & 1 & 0 & & 0 \\
0 & . & 0 & 0 & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & . & 0 & 0 & . & 0
\end{array}\right] = \mathrm{J}
\end{array}
$$

La matrice J(p, n) est formée par la matrice unité I_r, bordée par des zéros de façon à obtenir p lignes et n colonnes.

On dit que c'est la *matrice canonique* de l'application f de rang r de E(n) dans F(p).

*5° **Toute matrice** A(p, n) **de rang** r **est équivalente à la matrice canonique** J. — Soit en effet f l'application linéaire de E dans F définie par la matrice A, relativement à des bases $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{V}_1$. $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ étant les bases trouvées au 4°, soit S la matrice de passage de $\mathfrak{U}_1$ à $\mathfrak{U}$, T la matrice de passage de $\mathfrak{V}_1$ à $\mathfrak{V}$; les résultats du 1° donnent

$$\mathrm{J} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AS},$$

ce qui montre l'équivalence de A et de J.

*6° **Deux matrices équivalentes ont même rang.** — D'après le 3°, deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire f par rapport à des bases différentes, et l'on sait (n° 209) que le rang d'une matrice est celui d'une application linéaire associée.

Inversement, si deux matrices ont même rang r, elles sont équivalentes, car d'après le 5°, elles sont équivalentes l'une et l'autre à la matrice canonique J de rang r, à p lignes et n colonnes.

228. ***Matrices carrées semblables.*** — 1° **Transformation de la matrice d'un endomorphisme par changement de base.** — Soit f un endomorphisme de E, A sa matrice, relative à une base $\mathfrak{U}$ de E; un vecteur et son image sont rapportés à la base $\mathfrak{u}$.

Si P est la matrice de passage de la base $\mathfrak{u}$ à une nouvelle base $\mathfrak{U}'$, il suffit d'appliquer les résultats du n° 227, 1° pour obtenir l'expression de la matrice A′ de f dans la nouvelle base :

$$A' = P^{-1}AP.$$

2° **Matrices carrées semblables.** — DÉFINITION. — **Deux matrices carrées d'ordre n, A et A′, sont dites semblables s'il existe une matrice carrée régulière P, d'ordre n, telle que**

$$A' = P^{-1}AP.$$

Dans cette définition, les matrices A et A′ jouent le même rôle; la relation précédente est en effet une relation d'équivalence :

R) $A = I\,A\,I$, I étant la matrice unité;

S) la relation donnée entraîne $A = PA'P^{-1}$;

T) supposons $A'' = Q^{-1}A'Q$, Q étant régulière

$$A'' = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q$$

$$A'' = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ)$$

or si $PQ = S, \quad S^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

$$A'' = S^{-1}AS$$

et A″ est semblable à A.

Lorsque $A' = P^{-1}AP$, P étant régulière, on dit que A′ est transformée de A par P, ou est *semblable* à A *par* P (ou selon P).

3° **Interprétation géométrique.** — Par changement de la base, la nouvelle matrice d'un endomorphisme de E est semblable à l'ancienne.

Inversement, une matrice carrée A′ semblable à A peut être considérée comme la matrice du même endomorphisme de E, mais par rapport à une autre base de E.

4° **Propriétés des matrices semblables.** — *a*) **Deux matrices semblables ont même déterminant :** soit en effet

$$A' = P^{-1}AP$$

$$\det A' = (\det P^{-1})(\det A)(\det P)$$

or $$\det (P^{-1})(\det P) = 1,$$

donc $$\det A' = \det A.$$

b) **Deux matrices semblables ont même rang,** car la relation de similitude est un cas particulier de la relation d'équivalence;

c) en particulier deux matrices semblables sont simultanément régulières ou singulières.

5° **Déterminant d'un endomorphisme.** — Reprenons les notations du 1°; les matrices A et A′ de l'endomorphisme f dans les bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ ont, d'après le 4°, le même déterminant. Cela légitime la définition suivante :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E; le déterminant de la matrice A de f relative à une base $\mathfrak{U}$ de E est indépendant du choix de cette base; on l'appelle le déterminant de l'endomorphisme f.**

On le note dét (f).

En appliquant alors l'étude du n° **222,** on constate qu'un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si son déterminant n'est pas nul; un tel endomorphisme n'est pas bijectif si et seulement si son déterminant est nul.

On retiendra encore :

Un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est caractérisé par le fait que son déterminant n'est pas nul.

6° **Opérations sur des matrices semblables.** — Nous désignerons par A′ et B′ des matrices respectivement semblables à A et B selon la même matrice P :

$$A' = P^{-1}AP, \qquad B' = P^{-1}BP.$$

a) *la somme* A′ + B′ *est semblable à la somme* A + B. En effet :

$$\begin{aligned} A' + B' &= P^{-1}AP + P^{-1}BP \\ &= [P^{-1}A + P^{-1}B]P \\ &= P^{-1}(A + B)P. \end{aligned}$$

b) λ étant un scalaire du corps K, $\lambda A'$ *est semblable à* λA. En effet :

$$\lambda A' = \lambda(P^{-1}AP) = P^{-1}(\lambda A)P.$$

c) *Le produit* A′B′ *est semblable au produit* AB. En effet :

$$A'B' = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = P^{-1}A(PP^{-1})BP = P^{-1}(AB)P.$$

en particulier A'^2 est semblable à A^2.

d) *Les puissances* A'^n *et* A^n *sont semblables*; en effet, on généralise par récurrence le résultat précédent.

e) Si A′ et A sont deux matrices régulières semblables, *leurs inverses sont aussi semblables*; en effet $A'^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

f) Si deux matrices sont semblables, *leurs transposées sont semblables*; en effet,

$$tr(A') = tr(P^{-1}AP) = tr\,P.tr\,A.tr\,P^{-1}.$$

Posons

$$Q = tr(P^{-1}) = (tr\,P)^{-1};$$

$$Q^{-1} = tr\,P$$

finalement :

$$\tilde{A}' = Q^{-1}\tilde{A}\,Q.$$

g) Si F(A) est un polynôme matriciel en A, à coefficients dans K, F(A′) *est semblable à* F(A).

Par exemple, soit

$$F(A) = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in K$$

$$F(P^{-1}AP) = \alpha P^{-1}A^2P + \beta P^{-1}AP + \gamma P^{-1}IP$$

$$= P^{-1}(\alpha A^2 + \beta A + \gamma I)P$$

$$F(P^{-1}AP) = P^{-1}F(A)\,P.$$

229. ***Matrices carrées congruentes*** (1). — 1° **Transformation par changement de base de la matrice d'une forme bilinéaire sur** E. — Soit $\varphi(\vec{X}, \vec{Y})$ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel E, Ω sa matrice relative à une base $\mathfrak{U}$; si X et Y sont les matrices unicolonnes des coordonnées des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}\Omega Y).$$

Soit $\mathfrak{U}'$ une nouvelle base de E, P la matrice de passage de $\mathfrak{U}$ à $\mathfrak{U}'$, X′, Y′ les matrices unicolonnes des nouvelles coordonnées des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, on sait que $X = PX'$, $Y = PY'$. On en déduit $\tilde{X} = \tilde{X}'\tilde{P}$.

La nouvelle expression de φ est ainsi

$$\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{dét}(\tilde{X}'\tilde{P}\Omega PY').$$

Dans la base $\mathfrak{U}'$, la matrice Ω′ associée à φ est

$$\Omega' = \tilde{P}\Omega P.$$

2° **Matrices congruentes.** — DÉFINITION. — **Deux matrices carrées d'ordre** *n*, A **et** A′ **sont dites congruentes, s'il existe une matrice carrée régulière** P, **d'ordre** *n*, **telle que**

$$A' = \tilde{P}AP.$$

Dans cette définition, les matrices A et A′ jouent le même rôle; la relation

(1) Les matrices congruentes seront utilisées dans le tome III; leur étude a été placée ici parce qu'elle est analogue à celle des matrices équivalentes et des matrices semblables.

précédente est en effet une relation d'équivalence :

R) $A = \tilde{I}AI$, I étant la matrice unité;

S) la relation donnée entraîne

$$A = (\tilde{P})^{-1}A'P^{-1}$$

mais l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse; donc si $Q = P^{-1}$

$$A = \tilde{Q}A'Q;$$

T) soit $A'' = \tilde{Q}A'Q.$

$$A'' = \tilde{Q}(\tilde{P}AP)Q$$

$$A'' = (\tilde{Q}\tilde{P})A(PQ)$$

or si l'on pose $PQ = R, \quad \tilde{R} = \tilde{Q}\tilde{P}$

$$A'' = \tilde{R}AR.$$

3° **Interprétation géométrique.** — Par changement de la base la nouvelle matrice d'une forme bilinéaire sur E est congruente à l'ancienne.

Inversement une matrice carrée A′ congruente à A peut être considérée comme la matrice de la même forme bilinéaire sur E, mais par rapport à une autre base de E.

4° **Conservation du rang.** — La relation de congruence est un cas particulier de la relation d'équivalence, par suite deux matrices congruentes ont le même rang.

DÉFINITION. — **On appelle rang d'une forme bilinéaire sur E le rang commun de toutes les matrices (congruentes) qui déterminent cette forme bilinéaire dans les diverses bases de E.**

5° **Relation entre les déterminants de deux matrices congruentes.**

— La relation $A' = \tilde{P}AP$

entraîne $\det A' = (\det \tilde{P})(\det A)(\det P)$

or P et $\tilde{P}$ ont même déterminant : $\det A' = (\det A)(\det P)^2$.

Cette question sera reprise au tome III (n° 2, 2°).

IV. DIAGONALISATION. TRIANGULARISATION

230. ***Position du Problème.*** — 1° Soit E un espace vectoriel sur le corps K, f un endomorphisme de E. En supposant E de dimension finie, n, quand on a choisi une base $\mathfrak{A}$ de E, f est représenté par une matrice carrée (n, n). Peut-on choisir une base dans laquelle f sera représenté par une matrice aussi simple que possible, qu'on appellera alors *matrice réduite?*

Nous savons (n° 228) que, par un changement de base, la matrice d'un

endomorphisme se change en une matrice semblable et nous avons montré que la relation de similitude, soit s, est une relation d'équivalence.

Nous pouvons donc, étant donné un élément A de l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices (n, n) sur le corps K, lui associer sa classe d'équivalence par la relation de similitude; cette classe est un élément de l'ensemble-quotient $\mathfrak{M}/s$; nous chercherons, pour cette classe, un représentant aussi simple que possible.

2° **Endomorphisme associé à une matrice diagonale.** — Considérons l'endomorphisme f de E représenté dans une base donnée par la matrice diagonale $A = [\alpha_{ii}]$. Les vecteurs-colonnes de A sont les vecteurs $f(\vec{u}_1) \ldots, f(\vec{u}_n)$ rapportés à la base $\mathfrak{U}$. Il en résulte que $f(\vec{u}_j)$ a toutes ses coordonnées nulles, sauf celle de numéro j, égale à α_{jj}; en définitive

$$f(\vec{u}_j) = \alpha_{jj}\vec{u}_j.$$

Chaque sous-espace de E, de dimension 1, engendré par un vecteur $\vec{u}_j$ de la base, est invariant par f.

Cette remarque suggère les définitions qui vont suivre.

231. *Valeurs propres. Vecteurs propres.* — 1° **Définitions.** — Les définitions que nous donnerons dans ce paragraphe comme suite au n° **230**, 2°, sont cependant relatives à un espace vectoriel E, de dimension finie ou infinie, sur un corps commutatif, K.

PROBLÈME. — *Étant donné un endomorphisme f de* E, *existe-t-il des vecteurs* $\vec{X}$ *non nuls tels que :*

$$f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}, \qquad \lambda \in K? \tag{1}$$

Analyse. — Supposons l'égalité (1) vérifiée pour un vecteur $\vec{X}$. Si e désigne l'endomorphisme identique de E, cette égalité s'écrit sous la forme

$$f(\vec{X}) - \lambda e(\vec{X}) = \vec{0} \tag{2}$$

$\vec{0}$ étant le vecteur nul de E.

On voit alors intervenir l'endomorphisme

$$g = f - \lambda e,$$

et (2) exprime que le vecteur $\vec{X}$ appartient au noyau de g.

Ainsi l'égalité (1) ne peut être vérifiée par un vecteur $\vec{X} \neq \vec{0}$ que si le noyau de g n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, c'est-à-dire si g n'est pas injectif.

Synthèse. — Supposons qu'il existe un scalaire λ tel que l'endomorphisme $g = f - \lambda e$ ne soit pas injectif; le noyau de g contient des vecteurs $\vec{X}$ autres

que le vecteur $\vec{0}$ de E; si $\vec{X} \neq \vec{0}$ est un vecteur de ce noyau, on peut écrire (2), puis (1). $\vec{X}$ vérifie l'égalité (1).

Nous pouvons donc énoncer :

DÉFINITION. — **Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel sur le corps K. On appelle vecteur propre de f tout vecteur $\vec{X}$ non nul de E tel que**

$$(1) \qquad f(\vec{X}) = \lambda \vec{X}, \qquad \lambda \in K,$$

et valeur propre de f tout scalaire λ de K tel qu'il existe $\vec{X}$ non nul vérifiant (1).

THÉORÈME : **λ et $\vec{X}$ sont respectivement valeur propre et vecteur propre de l'endomorphisme f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda e$ n'est pas injectif, et si $\vec{X}$ est un vecteur non nul du noyau de $f - \lambda e$.**

2° **Sous-espace propre.** — Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f. L'ensemble des vecteurs propres associés est l'ensemble des vecteurs non nuls du noyau de $f - \lambda e$. En lui ajoutant le vecteur $\vec{0}$, on reconstitue le noyau de $f - \lambda e$, noyau qui est un sous-espace vectoriel de E.

λ étant une valeur propre, le noyau de $f - \lambda e$ est appelé sous-espace propre relatif à λ; on peut le noter

$$\text{Ker } (f - \lambda e) = E(\lambda).$$

Ce sous-espace n'étant pas réduit à $\{\vec{0}\}$, il est de dimension au moins égale à 1; il peut éventuellement être de dimension infinie. En résumé, $E(\lambda)$ est l'ensemble des vecteurs, nul et non nuls, qui vérifient

$$(1) \qquad f(\vec{X}) = \lambda \vec{X}.$$

REMARQUE. — Si le noyau de f ne se réduit pas au vecteur $\vec{0}$ de E, 0 est une valeur propre, et tout vecteur non nul du noyau est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

3° **Un sous-espace propre est invariant par f.** — L'image par f de $E(\lambda)$, $\text{Im}[E(\lambda)]$, qui, d'après la théorie générale des applications linéaires, est un sous-espace vectoriel de E, peut être engendrée par $\lambda \vec{X}$ quand, λ restant égal à la valeur propre considérée, $\vec{X}$ décrit $E(\lambda)$. Ainsi,

$$\text{si } \lambda = 0, \qquad \text{Im}[E(\lambda)] = \{\vec{0}\}$$
$$\text{si } \lambda \neq 0, \qquad \text{Im}[E(\lambda)] = E(\lambda).$$

Ce dernier résultat s'énonce en disant que si $\lambda \neq 0$, le sous-espace propre $E(\lambda)$ est invariant par f.

Le même raisonnement montre que, si $\lambda \neq 0$, tout sous-espace vectoriel de $E(\lambda)$ est invariant par f.

REMARQUE. — $\vec{X}$ étant un vecteur propre de $E(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$), le sous-espace vectoriel des vecteurs propres colinéaires à $\vec{X}$ prendra le nom, au n° 251 du tome III, de *direction propre* de f.

4° Sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes.

THÉORÈME. — **Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E; si p vecteurs propres de f sont associés respectivement à p valeurs propres distinctes deux à deux, ils forment un système libre.**

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes deux à deux; soit $\vec{v_i}$ un vecteur propre relatif à λ_i :

$$f(\vec{v_i}) = \lambda_i \vec{v_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots p). \tag{3}$$

Étudions le système

$$\mathcal{S} = \{ \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p} \}.$$

Le rang r du système $\mathcal{S}$ est au moins égal à 1 puisqu'il s'agit de vecteurs non nuls, et au plus égal à p : nous allons montrer, par exclusion, que $r = p$.

Supposons $r < p$ (strictement), et, par exemple, supposons que

$$\mathcal{S}' = \{ \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r} \} \text{ est un système libre.}$$

Chacun des vecteurs $\vec{v_k} (k = r + 1, \ldots, p)$ est une combinaison linéaire des vecteurs du système $\mathcal{S}'$:

$$\vec{v_k} = \mu_{k1} \vec{v_1} + \ldots + \mu_{kr} \vec{v_r} \quad (k = r + 1, \ldots, p). \tag{4}$$

En formant $f(\vec{v_k})$ et en tenant compte de (3) on obtient

$$\lambda_k \vec{v_k} = \mu_{k1} \lambda_1 \vec{v_1} + \ldots + \mu_{kr} \lambda_r \vec{v_r},$$

et en remplaçant au premier membre $\vec{v_k}$ par son expression (4), on obtient finalement :

$$\sum_{j=1}^{r} (\lambda_k - \lambda_j) \mu_{kj} \vec{v_j} = \vec{0}.$$

Les vecteurs $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r}$ étant indépendants, l'égalité précédente entraîne

$$(\lambda_k - \lambda_j) \mu_{kj} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots r.$$

Or par hypothèse $\lambda_k \neq \lambda_j$, par suite $\mu_{kj} = 0$, mais alors, d'après (4), $\vec{v_k}$ serait nul, ce qui est contradictoire avec le fait que $\vec{v_k}$ est un vecteur propre.

Finalement $r = p$, et le système $\mathcal{S}$ est libre.

THÉORÈME. — **Les sous-espaces propres $E(\lambda_1), \ldots E(\lambda_p)$ étant associés à p valeurs propres deux à deux distinctes, leur somme est directe.**

Pour montrer que la somme

$$E(\lambda_1) + \ldots + E(\lambda_p)$$

est directe, nous allons montrer (n° 154, 6°) qu'en choisissant $\vec{X}_i$ dans $E(\lambda_i)$ ($i = 1, 2, \ldots p$), la seule façon d'obtenir

$$\vec{X}_1 + \ldots + \vec{X}_p = \vec{0} \tag{5}$$

est que chacun des vecteurs $\vec{X}_i$ soit nul.

Raisonnons par exclusion et supposons que, dans l'égalité (5), h des vecteurs, par exemple les h premiers, soient non nuls, les autres étant nuls; on aurait

$$\begin{cases} \vec{X}_1 \neq \vec{0}, \ \ldots, \ \vec{X}_h \neq \vec{0}, \ \vec{X}_{h+1} = \vec{0}, \ \ldots, \ \vec{X}_p = \vec{0} \\ \vec{X}_1 + \ldots + \vec{X}_h = \vec{0}. \end{cases} \tag{6}$$

Il existerait alors une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_h$ à coefficients non tous nuls qui donnerait le vecteur $\vec{0}$, ce qui est contradictoire avec l'indépendance des vecteurs propres $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_h$ associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ deux à deux distinctes.

Finalement l'égalité (5) exige que chacun des $\vec{X}_i$ soit nul, et la proposition est établie.

EXEMPLE. — Considérons l'ensemble Ψ des fonctions d'une variable réelle, définies et continues sur $]-\infty, +\infty[$, et possédant des dérivées successives de tout ordre; c'est un espace vectoriel sur le corps des réels.

y étant un élément de Ψ, et y' sa dérivée, l'application

$$y \longrightarrow y'$$

vérifie les critères de linéarité : c'est un endomorphisme f de Ψ défini par

$$f(y) = y'.$$

Si y est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre λ (réelle), on aura

$$y' = \lambda y \Longrightarrow y = e^{\lambda x}.$$

Par suite tout réel est une valeur propre de Ψ.

Il en résulte que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des réels distincts deux à deux, les fonctions qui à x réel associent $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ sont des éléments indépendants de Ψ :

$$\forall x, \quad \rho_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + \rho_n e^{\lambda_n x} = 0$$

entraîne

$$\rho_1 = 0, \ \ldots, \ \rho_n = 0.$$

232. *Polynôme caractéristique (espace vectoriel de dimension finie).*

1° Position du problème. — L'étude du n° 231 a fourni des propriétés des vecteurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E sans qu'il ait été possible d'affirmer l'existence de ceux-ci.

Nous allons étudier cette question d'existence dans le cas particulier d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, de dimension finie n, sur un corps commutatif K.

Soit $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ une base, arbitrairement choisie, de E et soit $A = [a_{ij}]$ la matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans K, qui représente f dans la base $\mathfrak{U}$.

2° **Recherche des vecteurs propres et des valeurs propres.** — Un vecteur propre de f est un vecteur non nul du noyau de l'endomorphisme

$$g = f - \lambda e \qquad (e : \text{application identique de E})$$

λ étant choisi de façon que g ne soit pas injectif.

Or E étant de dimension finie, les propriétés suivantes sont successivement équivalentes :

— g n'est pas injectif

— g n'est pas bijectif (n° 170)

— la matrice de g, c'est-à-dire $A - \lambda I$, I étant la matrice-unité d'ordre n, n'est pas régulière, c'est-à-dire que le déterminant de $A - \lambda I$ est nul (n° 228, 5°). Finalement :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \text{dét } (A - \lambda I) = 0.$$

Nous noterons : $\text{dét } (A - \lambda I) = \Delta(\lambda)$, avec

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$\Delta(\lambda)$ est un polynôme en λ, et les valeurs propres de f sont les racines de l'équation algébrique

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{1}$$

D'après son origine même, le polynôme $\Delta(\lambda)$ ne dépend que de l'endomorphisme f; à titre d'exercice, vérifions par le calcul qu'il est indépendant de la base $\mathfrak{U}$ choisie pour représenter f. Soit $\mathfrak{U}'$ une nouvelle base de E, P la matrice de passage de $\mathfrak{U}$ à $\mathfrak{U}'$; relativement à $\mathfrak{U}'$, f a pour matrice $A' = P^{-1}AP$.

A' est semblable à A par P, ainsi que I à I, λI à λI; par suite $A' - \lambda I$ est semblable à $A - \lambda I$ (228, 6°), et enfin : $\text{dét } (A' - \lambda I) = \text{dét } (A - \lambda I)$ (228, 4°).

Si λ est une racine de l'équation (1), les vecteurs propres associés sont les vecteurs $\vec{X}$ non nuls qui vérifient

$$g(\vec{X}) = 0, \qquad \text{avec} \qquad g = f - \lambda e.$$

Les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\vec{X}$ sont une solution du système

$$\Sigma(\lambda) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

λ étant racine de (1), le système $\Sigma(\lambda)$ est un système linéaire et homogène qui admet des solutions autres que la solution triviale puisque son déterminant est nul.

3° **Définitions.** — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension n sur un corps commutatif* K *et e l'endomorphisme identique de* E. **On appelle polynôme caractéristique de f le déterminant de l'endomorphisme $f - \lambda e$, indépendant de la base choisie dans** E.

L'étude du 2° permet alors d'énoncer :

THÉORÈME. — **Les zéros du polynôme caractéristique de f sont les valeurs propres de f.**

L'isomorphisme de l'algèbre des endomorphismes de E sur celle des matrices carrées d'ordre n rend naturel l'énoncé des définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — *Soit* A *une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif* K *et* I *la matrice unité d'ordre n;* **on appelle polynôme caractéristique de** A **le déterminant de la matrice** $A - \lambda I$, **les zéros de ce polynôme sont appelés valeurs propres de** A.

Toute matrice unicolonne X, non nulle, telle que $AX = \lambda X$, λ étant une valeur propre, définit un *vecteur propre* de A.

Le polynôme caractéristique est le même pour toutes les matrices semblables à la matrice A.

Si $\Delta(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de f (ou de A), l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ s'appelle l'*équation caractéristique.*

L'ensemble des valeurs propres de f (ou de A) s'appelle le *spectre* de f (ou de A).

4° **Propriétés du polynôme caractéristique.** — *a*) Chaque terme du développement du déterminant $\Delta(\lambda)$ contient un élément et un seul de chaque colonne; il est donc, par rapport à λ, de degré au plus égal à n.

Le terme diagonal

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$$

est le seul qui puisse fournir λ^n; donc le degré de $\Delta(\lambda)$ par rapport à λ est n.

Tout terme, distinct du terme diagonal est au plus de degré $n - 2$ car si ce terme contient en facteur l'élément $a_{ij} (i \neq j)$, il ne renferme ni $a_{ii} - \lambda$, ni $a_{jj} - \lambda$.

Les deux termes de plus haut degré de $\Delta(\lambda)$ sont donc

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) \lambda^{n-1}.$$

Le terme constant de $\Delta(\lambda)$ est $\Delta(0)$; c'est dét A. Le coefficient du terme en λ est le terme constant de la dérivée $\Delta'(\lambda)$.

La dérivée $\Delta'(\lambda)$ de $\Delta(\lambda)$ par rapport à λ s'obtient en faisant la somme des

déterminants des matrices obtenues en dérivant successivement chacune des lignes de $\Delta(\lambda)$. En dérivant la première ligne, on obtient

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad -A_{11}(\lambda)$$

en désignant par $A_{11}(\lambda)$ le cofacteur de l'élément de la première ligne et de la première colonne dans le développement de $\Delta(\lambda)$.

Finalement

$$\Delta'(\lambda) = -A_{11}(\lambda) - A_{22}(\lambda) - \dots - A_{nn}(\lambda).$$

Par suite $$\Delta'(0) = -(A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}),$$

A_{ii} étant le cofacteur de a_{ii} dans dét A. En résumé :

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots - (A_{11} + \dots + A_{nn})\lambda + \text{dét A}.$$

b) Si K est un corps commutatif quelconque, le polynôme $\Delta(\lambda)$ de degré n admet au plus n zéros distincts (103, 6°) et **un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.**

Dans le cas particulier où le corps de base est celui des complexes, le polynôme $\Delta(\lambda)$ a n zéros, distincts ou confondus et **un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, sur C, a au moins une valeur propre.** Dans ce cas la somme des valeurs propres, distinctes ou confondues de f (ou de A) est appelée *trace* de f (ou de A) et notée *tr* f (ou *tr* [A]); la trace de f est égale à la somme des éléments diagonaux de la matrice A de f; cette somme a donc un caractère intrinsèque, indépendamment de la base choisie dans E; il en est de même pour la somme des cofacteurs des éléments diagonaux de A, qui est d'ailleurs la trace de la comatrice de A. Le résultat s'étend au cas où K est un corps algébriquement clos.

5° **Valeur propre nulle.** — Une valeur propre de f peut être nulle si, et seulement si, dét A est nul.

Si la matrice A est régulière (dét A $\neq 0$) (l'endomorphisme f est alors un automorphisme), zéro ne peut être valeur propre.

Si la matrice A est singulière (dét A $= 0$), 0 est une valeur propre; l'endomorphisme f est singulier, son noyau est distinct de $\vec{0}$: les vecteurs non nuls du noyau sont les vecteurs propres de f qui sont associés à la valeur propre 0.

6° **Dimension d'un sous-espace propre.** — THÉORÈME. — **La dimension du sous-espace propre relatif à un zéro d'ordre k du polynôme caractéristique est au plus égale à k.**

Soit λ' un zéro d'ordre k du polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$, et E' le sous-espace propre relatif à la valeur propre λ'.

Nous allons raisonner par exclusion. Supposons dim E' $= q > k$;

soit $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$ une base de E'; complétons-la par des vecteurs $\vec{w}_{q+1}, \ldots, \vec{w}_n$ de E de façon à obtenir une base $\mathfrak{W}$ de E.

Par hypothèse $f(\vec{w}_j) = \lambda' \vec{w}_j$ $(j = 1, \ldots q)$. La matrice de f dans la base $\mathfrak{W}$ a ainsi la forme suivante :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccc} f(\vec{w}_1) & f(\vec{w}_2) & \ldots & f(\vec{w}_q) & \ldots & f(\vec{w}_n) \end{array} \\
\begin{array}{c} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{w}_q \\ \vec{w}_{q+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{w}_n \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|c}
\lambda' & 0 & \ldots & 0 & \\
0 & \lambda' & \ldots & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
0 & 0 & \ldots & \lambda' & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
0 & 0 & \ldots & 0 &
\end{array}\right] = \mathrm{B}
\end{array}
$$

$\Delta(\lambda) = \det(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I})$ est un polynôme divisible au moins par $(\lambda' - \lambda)^q$; $\Delta(\lambda)$ admet λ' comme zéro d'ordre au moins égal à $q > k$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que λ' est zéro d'ordre k.

Par conséquent $q \leqslant k$.

Compte-tenu du n° 231, 2°, la dimension q du sous-espace propre relatif à un zéro d'ordre k du polynôme caractéristique vérifie

$$1 \leqslant q \leqslant k.$$

COROLLAIRE. — **La dimension du sous-espace propre relatif à un zéro simple du polynôme caractéristique est égale à 1.**

Il suffit de faire $k = 1$ dans l'étude précédente pour obtenir $q = 1$.

Si l'on se reporte alors au système linéaire et homogène $\Sigma(\lambda)$ (cf. 2°) dont la résolution fournit le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda e$, on a vu (n° 216, 3°) que la dimension de ce noyau est $n - r$, r étant le rang du système $\Sigma(\lambda)$; $n - r = 1$ entraîne $r = n - 1$.

Pour un zéro simple λ du polynôme caractéristique, le système $\Sigma(\lambda)$ est de rang $n - 1$.

233. *Diagonalisation d'un endomorphisme.*

Soit K un corps commutatif.

1° **Définitions.** — I. **On dit que l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E, de dimension finie, sur K, est diagonalisable s'il peut être représenté dans une base convenablement choisie de E par une matrice diagonale.**

La bijection de l'algèbre des endomorphismes de E sur l'algèbre des matrices carrées d'ordre n permet d'énoncer :

II. On dit que la matrice carrée A, à coefficients dans K, est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale semblable à A.

Il existe alors une matrice carrée régulière P telle que

$$B = P^{-1}AP,$$

B étant une matrice diagonale.

La relation de similitude étant une relation d'équivalence (228, 2°), si A est semblable à la matrice diagonale B, toutes les matrices semblables à A sont aussi semblables à B, et par suite sont diagonalisables.

2° **Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.** — THÉORÈME. — **Un endomorphisme f de l'espace vectoriel E de dimension finie n est diagonalisable si et seulement s'il existe dans E une base formée de vecteurs propres.**

I. *Condition nécessaire.* — Supposons f diagonalisable; cela signifie qu'il existe une base de E, $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale

$$H = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

les scalaires λ_i du corps K peuvent être distincts ou confondus; certains peuvent être nuls.

Il en résulte (n° 173) : $f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$,

et $\vec{v}_i$ est un vecteur propre : la base $\mathcal{V}$ est formée de vecteurs propres.

Le polynôme caractéristique de f qui est, en particulier (232), celui de H, s'écrit alors

$$\Delta(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda).$$

Les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de la matrice H.

II. *Condition suffisante.* — Supposons que la base $\mathcal{V} = \{\vec{v}_i\}$ de E soit formée de vecteurs propres; à $\vec{v}_i$ est associé le scalaire λ_i tel que

$$f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i.$$

Dans la base $\mathfrak{V}$, f est représenté par la matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_i; f est diagonalisable.

3° **Application.** — Nous verrons dans les n°s 234 et 235 un cas particulier, puis une étude générale permettant de savoir si, inversement, la connaissance des valeurs propres de f conduit à l'obtention d'une matrice diagonale pour représenter f.

234. *Diagonalisation d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, qui admet n valeurs propres deux à deux distinctes.*

1° **Théorie.** — Reprenons les notations du n° 232 en supposant maintenant que le polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$ de l'endomorphisme f, qui est un polynôme de degré n sur le corps de base K, admet n zéros deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

En prélevant dans chaque sous-espace propre $E(\lambda_i)$ associé à la valeur propre λ_i un vecteur propre $\vec{v}_i$, on obtient un système de n vecteurs de E qui est libre (n° 231, 3°), il s'agit donc d'une base $\mathfrak{V}$ de E, formée de vecteurs propres de f, qui est ainsi diagonalisable (n° 233).

2° **Pratique.** — Soit A la matrice qui représente l'endomorphisme f de E dans la base $\mathfrak{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ initialement choisie.

Soit $\mathfrak{V}$ la base de E, formée de vecteurs propres de f, obtenue au 1°.

Dressons la matrice de passage P de la base $\mathfrak{U}$ à la base $\mathfrak{V}$:

$$\begin{array}{c|c} & \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \ldots \quad \vec{v}_n \\ \hline \vec{u}_1 & \\ \vec{u}_2 & \\ \vdots & \left[\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{array}\right] \\ \vec{u}_n & \end{array} = \mathrm{P}.$$

P est une matrice régulière. Le vecteur $\vec{X}$ et son image $\vec{Y}$ par l'endomorphisme f sont représentés par les matrices unicolonnes X et Y dans la base $\mathfrak{U}$, X′ et Y′ dans la base $\mathfrak{V}$, et l'on a

$$X = PX', \qquad Y = PY'.$$

La relation matricielle $Y = AX$ dans $\mathfrak{U}$ se traduit par $Y' = P^{-1}APX'$ dans $\mathfrak{V}$.

La matrice $B = P^{-1}AP$ de f dans $\mathfrak{V}$ a pour vecteurs-colonnes $f(\vec{v_1}), \ldots, f(\vec{v_n})$:

$$\begin{array}{c|c} & f(\vec{v_1})\ f(\vec{v_2})\ \ldots\ f(\vec{v_n}) \\ \hline \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v_n} \end{array} \left|\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array}\right| = B.$$

Dans la base $\mathfrak{V}$ la matrice de f est bien une matrice diagonale.

3° EXEMPLE. — *Diagonaliser l'endomorphisme f de l'espace vecloriel* E, *de dimension* 3, *sur le corps* Q, *qui esl délerminé dans la base donnée* $\mathfrak{U} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ *de* E *par les relations*

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

La matrice A qui représente f dans la base $\mathfrak{U}$ et le polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$ sont respectivement

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = 6.$$

A chaque valeur propre est associé comme vecteur propre tout vecteur non nul dont les coordonnées (x_1, x_2, x_3) vérifient

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système étant de rang 2 pour chacun des zéros simples de $\Delta(\lambda)$, il suffit dans chaque cas de résoudre deux des équations précédentes convenablement choisies. On peut prendre, par exemple,

pour $\lambda_1 = 2$, $\vec{v_1}(0, 1, 1)$

pour $\lambda_2 = 4$, $\vec{v_2}(1, 0, 1)$

pour $\lambda_3 = 6$, $\vec{v_3}(1, 1, 0)$.

Prenons pour nouvelle base $\mathfrak{V}$ dans E les vecteurs précédents; la matrice de passage est

$$\begin{array}{c|c} & \vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3} \\ \hline \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \vec{u_3} \end{array} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = P.$$

Dans la base $\mathfrak{V}$, la matrice B de f est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont 2, 4, 6. Vérifions-le à titre d'exercice.

Dans $\mathfrak{U}$: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; dans $\mathfrak{V}$: $\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = B \times \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$

avec $B = P^{-1}AP$.

P^{-1} a été obtenue au n° 223 :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On trouve successivement

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \text{ ou } P^{-1}(AP) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Par rapport à la base $\mathfrak{V}$, f est défini par

$$y'_1 = 2x'_1, \qquad y'_2 = 4x'_2, \qquad y'_3 = 6x'_3.$$

4° **Complément sur les endomorphismes commutables.** — Soit deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E sur le corps commutatif K, rapporté à une base $\mathfrak{U}$ et ayant chacun n valeurs propres distinctes, ce qui implique qu'ils sont diagonalisables.

Soit $\vec{V} \neq \vec{0}$ un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ ;

$$f(\vec{V}) = \lambda \vec{V} \implies g[f(\vec{V})] = \lambda g(\vec{V}). \qquad (1)$$

a) Supposons $g \circ f = f \circ g$. Le premier membre de (1) s'écrit $f[g(\vec{V})]$, et par suite

$$f[g(\vec{V})] = \lambda g(\vec{V}) ;$$

$g(\vec{V})$ est ou bien $\vec{0}$, ou bien un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ ; comme λ est un zéro simple du polynôme caractéristique de f, le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1 ; il en résulte que le vecteur $g(\vec{V})$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$ du même sous-espace propre. Il existe donc un scalaire μ du corps K, éventuellement nul, tel que

$$g(\vec{V}) = \mu \vec{V} ;$$

comme $\vec{V}$ n'est pas nul, $\vec{V}$ est un vecteur propre de g.

Les vecteurs propres de f et g sont les mêmes.

b) Supposons inversement que f et g aient tous leurs vecteurs propres communs. f est diagonalisable, il existe donc une base $\mathfrak{V}$ de E formée de vecteurs propres de f ; $\mathfrak{V}$ est aussi formée de vecteurs propres de g. Dans $\mathfrak{V}$, f et g sont représentés par des matrices diagonales, donc par des matrices commutables. Il en résulte que f et g eux-mêmes commutent.

En résumé : *Deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n, ayant chacun n valeurs propres distinctes sont commutables si, et seulement si, ils ont les mêmes vecteurs propres.*

235. ***Théorème général sur la diagonalisation d'un endomorphisme.*** — **1° Théorème.** — **Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie n, sur le corps commutatif K, est diagonalisable si, et seulement si le polynôme caractéristique de f admet n zéros sur K, distincts ou confondus, et si pour chacun de ces zéros, λ_i, l'ordre de multiplicité k_i est égal à la dimension q_i du sous-espace propre E (λ_i) relatif à λ_i.** (Autrement dit, f est diagonalisable si et seulement si la somme des E (λ_i), qui est directe, coïncide avec E).

I. *Condition nécessaire.* — Supposons f diagonalisable : il existe une base $\mathcal{V}$ de E dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale H.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les éléments diagonaux distincts de H. On a $p \leqslant n$; désignons par k_i le nombre des éléments diagonaux de H égaux à λ_i.

Le polynôme caractéristique de f est $\Delta(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{k_p}$.

Les valeurs propres distinctes de f sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et leurs ordres de multiplicité, en temps que zéros de $\Delta(\lambda)$, sont $k_1, \ldots, k_p$, dont la somme est n. La proposition relative au nombre des zéros de $\Delta(\lambda)$ est ainsi démontrée.

Par ailleurs k_i est le nombre des vecteurs de la base $\mathcal{V}$ qui sont vecteurs propres relatifs à λ_i. Ces vecteurs forment un système libre (extrait du système libre $\mathcal{V}$); comme ils appartiennent au sous-espace propre $E(\lambda_i)$, de dimension q_i, on a

$$k_i \leqslant q_i.$$

Étant donné que, dans tous les cas (**232**, 6°) : $k_i \geqslant q_i$, on a

$$(1) \qquad k_i = q_i \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

II. *Condition suffisante.* — Supposons maintenant que f admet les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ aux ordres $k_1, \ldots, k_p$, de somme n, et que la dimension du sous-espace propre $E(\lambda_i)$ est $q_i = k_i$.

Nous savons (**231**, 4°) que la somme E′ des sous-espaces $E(\lambda_i)$ est directe; il en résulte (**160**, 3°)

$$\dim E' = q_1 + \ldots + q_p \qquad \text{et} \qquad \dim E' = n.$$

Comme cette somme E′ est un sous-espace vectoriel de E, E′ coïncide avec E. Soit $\mathcal{V}_i$ une base de $E(\lambda_i)$ (formée de vecteurs propres de f, relatifs à λ_i). La réunion, $\mathcal{V}$, des $\mathcal{V}_i$ est (**160**, 3°) une base de $E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_p) = E'$, et, par suite une base de E. Ainsi il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, ce qui prouve que l'endomorphisme est diagonalisable.

2° **Cas particulier.** — La possibilité de diagonaliser un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n dans le cas où il existe n valeurs propres deux à deux distinctes, mise en évidence au n° **234**, est un cas particulier du théorème précédent.

3° Exemple. — *Discuter la possibilité de diagonaliser l'endomorphisme f de l'espace vecloriel* E, *de dimension* 3, *qui est représenté dans une base donnée,* $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ *par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

La matrice A étant triangulaire, on forme immédiatement le polynôme caractéristique

$$\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)^2 (c - \lambda).$$

Celui-ci admet toujours trois zéros sur le corps de base.

1er *cas* : $c = 1$; f admet une seule valeur propre $\lambda_1 = 1$ dont l'ordre de multiplicité est

$k_1 = 3$. Le sous-espace propre E_1 associé à λ_1 est l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que

$$\begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0. \end{cases}$$

Si $ab \neq 0$, alors $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_1 quelconque : $\dim E_1 = 1$.

Si $ab = 0$, $\begin{cases} \text{ou bien} & a = 0, & \text{alors } x_3 = 0, & x_1 \text{ et } x_2 \text{ quelconques}, & \dim E_1 = 2 \\ \text{ou bien} & a \neq 0, & \text{alors } x_1 \text{ et } x_2 \text{ quelconques}, & x_3 = -ax_2, & \dim E_1 = 2. \end{cases}$

La dimension q_1 de E_1 étant inférieure à l'ordre de multiplicité k_1, f n'est pas diagonalisable.

2e *cas* : $c \neq 1$: f admet une valeur propre double $\lambda_1 = 1$, et une valeur propre simple $\lambda_2 = c$.

Le sous-espace propre E_1 relatif à $\lambda_1 = 1$ est déterminé par

$$\begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \\ (c-1)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ax_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, alors $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_1 quelconque : $\dim E_1 = 1$, f n'est pas diagonalisable.

Si $a = 0$, alors x_1 et x_2 quelconques, $x_3 = 0$: $\dim E_2 = 2$, f est diagonalisable.

La matrice A est alors $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

Les vecteurs propres relatifs à λ_2 sont donnés par

$$\begin{cases} (1-c)x_1 + x_3 = 0 \\ (1-c)x_2 + bx_3 = 0. \end{cases}$$

on peut choisir $x_3 = c - 1$, alors $x_1 = 1$, $x_2 = b$.

Finalement on peut prendre pour base $\mathfrak{V}$ de E les vecteurs suivants

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \hline \vec{u}_1 & 1 & 0 & 1 \\ \vec{u}_2 & 0 & 1 & b \\ \vec{u}_3 & 0 & 0 & c-1 \end{array} = P.$$

P est la matrice de passage de la base $\mathfrak{U}$ à la base $\mathfrak{V}$.

Par rapport à $\mathfrak{V}$, f est déterminé par

$$\begin{cases} y'_1 = x'_1 \\ y'_2 = x'_2 \\ y'_3 = cx'_3. \end{cases}$$

236. ***Applications de la diagonalisation des matrices.*** — 1° **Puissance** p**-ième d'une matrice diagonalisable.** — Soit A une matrice carrée d'ordre n, diagonalisable : il existe une matrice carrée d'ordre n, régulière, P, telle que la matrice

$$B = P^{-1}AP$$

soit diagonale; posons $B = [\lambda_i]$

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$$

$$B^2 = (P^{-1}A(PP^{-1})AP \quad \text{ou} \quad P^{-1}A^2P.$$

Or B^2 est la matrice diagonale $[\lambda_i^2]$, et par suite A^2 est diagonalisable. Plus généralement, on montrera que

$$B^p = P^{-1}A^pP,$$

B^p étant la matrice diagonale $[\lambda_i^p]$; et par suite A^p est diagonalisable.

EXEMPLE. — Cherchons la puissance p-ième de la matrice A étudiée au n° **234**, 3°.

On a pu mettre $$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

sous la forme $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}.$$

$$A^p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 4^p & 0 \\ 0 & 0 & 6^p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}.$$

$$A^p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4^p + 6^p & 6^p - 4^p & 4^p - 6^p \\ 6^p - 2^p & 2^p + 6^p & 2^p - 6^p \\ 4^p - 2^p & 2^p - 4^p & 2^p + 4^p \end{bmatrix}$$

2° Étude de certaines suites récurrentes. — *a*) On donne u_0 et v_0, et, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = cu_{n-1} + dv_{n-1} \end{cases} \tag{1}$$

a, b, c, d étant des scalaires fixes, donnés, d'un corps commutatif K.

Posons $$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

les formules (1) peuvent se noter $X_n = AX_{n-1}$,
et l'on en déduit $X_n = A^nX_0$.

Si l'on peut dlagonaliser la matrice A, on sait évaluer A^n, et par suite u_n et v_n en fonctlon de u_0 et v_0.

b) On donne u_0 et u_1, et plus généralement, pour $n \geqslant 2$

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}.$$

On se ramène au cas précédent en posant

$$v_n = u_{n-1}$$

ce qul donne

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

En posant $$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_n = AX_{n-1} \qquad \text{avec} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

et $$X_n = A^{n-1}X_1$$

ce qu'on pourra calculer aisément si les valeurs propres de A sont distinctes

EXEMPLE. — Soit donnés u_0 et u_1 et, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = u_{n-1} + 2\,u_{n-2}.$$

Avec les notations précédentes, on doit diagonaliser la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0;$$

les racines sont $\lambda' = -1, \quad \lambda'' = +2;$

d'où la matrice diagonale $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

obtenue au moyen de la matrice de passage $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = PBP^{-1} \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{3}.$$

$$A^{n-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^n + (-1)^{n-1} & 2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n-1} + (-1)^{n-2} & 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

On en déduit $u_n = \frac{1}{3}[2^n + (-1)^{n-1}]\,u_1 + \frac{2}{3}[2^{n-1} + (-1)^n]\,u_0.$

3° **Intégration d'un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans seconds membres.** Cette question est traitée au tome II, n° 252.

4° **Résolution de certaines équations matricielles.** — *a*) Etant donné un polynôme à coefficients dans un corps commutatif K

$$Q(\lambda) = c_0\lambda^p + c_1\lambda^{p-1} + \ldots + c_p,$$

peut-on trouver les matrices carrées d'ordre n, à éléments dans K, soit A, telles que

(1) $$Q(A) = [0].$$

Les notations sont celles du n° 223 et [0] désigne la matrice carrée nulle d'ordre n.

Observons immédiatement que si A est une solution de (1), toute matrice semblable à A est aussi solution de (1), car on sait (n° 228, 5°) que si P est une matrice carrée régulière d'ordre n,

$$Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P.$$

b) Soit E un espace vectoriel sur le corps K, de dimension n, rapporté à une base $\mathcal{U}$; A est la matrice d'un endomorphisme f de E et la bijection φ (cf. 221) transforme l'endomorphisme $Q(f)$ de E, en la matrice $Q(A)$.

Résoudre (1) revient à chercher les endomorphismes f de E tels que

(2) $$Q(f) = o,$$

o étant l'endomorphisme nul de E.

c) Nous examinerons ce problème dans le cas particulier où Q est le produit de polynômes du premier degré, deux à deux distincts. Pour cela nous utiliserons :

THÉORÈME. — **Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, de dimension n, sur le corps commutatif K. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de K, deux à deux distincts, tels que, e étant l'endomorphisme identique de E, l'endomorphisme**

$$g = (f - \lambda_p e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_2 e) \circ (f - \lambda_1 e)$$

soit l'endomorphisme nul, o, de E.

Dans ces conditions :

I) L'ensemble des valeurs propres distinctes de f est une partie non vide de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

II) L'endomorphisme f est diagonalisable.

Rappelons tout d'abord (223) que deux quelconques des endomorphismes qui composent g sont commutables et que, d'autre part (231, 1°), le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si $f - \lambda e$ est un endomorphisme singulier.

I. *a*) Si aucun des scalaires λ_i n'était valeur propre de f, chacun des endomorphismes $f - \lambda_i e$ serait un automorphisme; il en serait de même de l'endomorphisme composé g, en contradiction avec $g = o$. Ainsi l'un des λ_i, au moins, est valeur propre de f.

b) Soit λ l'une quelconque des valeurs propres de f et $\vec{X}$ un vecteur propre associé à λ. L'image de $\vec{X}$ par $f - \lambda_1 e$ est

$$f(\vec{X}) - \lambda_1 e(\vec{X}) \qquad \text{ou} \qquad (\lambda - \lambda_1)\,\vec{X}.$$

L'image de $\vec{X}$ par $(f - \lambda_2 e) \circ (f - \lambda_1 e)$ est

$$(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1)\,\vec{X}, \qquad \text{etc, ...}$$

Finalement l'image de $\vec{X}$ par g est

$$(\lambda - \lambda_p) \ \ldots \ (\lambda - \lambda_1)\,\vec{X}.$$

Étant donné que $\vec{X} \neq \vec{0}$ et que cette image est $\vec{0}$, (d'après $g = o$), nous avons

$$(\lambda - \lambda_p) \ldots (\lambda - \lambda_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}.$$

II. Ainsi les valeurs propres de f sont m scalaires, $(1 \leqslant m \leqslant p)$, figurant parmi $\lambda_1, \ldots \lambda_p$; notons que, puisque $\dim E = n$, $m \leqslant n$.

En changeant éventuellement la notation on peut, d'après la remarque initiale sur la commutativité, supposer que ces valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Posons
$$h = (f - \lambda_m e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_1 e)$$
$$h^* = (f - \lambda_p e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_{m+1} e)$$

h^* est un automorphisme de E,

$$g = h^* \circ h = o \implies h = o$$

Posons $H(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_m)$
$H(\lambda) = H_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$

Les polynômes $H_i(\lambda)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, par suite (n° 102) il existe m polynômes $U_i(\lambda)$ tels que

$$\sum H_i(\lambda)\, U_i(\lambda) = 1,$$

1 étant le polynôme associé à l'élément 1 du corps K.

Il en résulte que

$$\sum H_i(f) \circ U_i(f) = e,$$

Pour simplifier, nous poserons $h_i = H_i(f)$, $u_i = U_i(f)$.

De $\sum h_i \circ u_i = e$, nous déduisons

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \vec{X} = \sum \vec{X}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{X}_i = h_i\left[u_i(\vec{X})\right].$$

Mais $(f - \lambda_i e) \circ h_i = h$ n'est autre que o; a fortiori $(f - \lambda_i e) \circ h_i \circ u_i = o$; l'image de $\vec{X}$ par l'endomorphisme précédent, qui est $\vec{0}$, est aussi l'image de $\vec{X}_i$ par $f - \lambda_i e$, ce qui entraîne

$$f(\vec{X}_i) = \lambda_i \vec{X}_i,$$

et montre que $\vec{X}_i$ est un vecteur du sous-espace propre $E(\lambda_i)$ associé à la valeur propre

λ_i de E. Finalement tout vecteur $\vec{X}$ de E s'écrit

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{m} \vec{X}_i, \qquad \vec{X}_i \in E(\lambda_i)$$

et E est la somme des sous-espaces propres $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_m)$. On sait (231, 4°) qu'une telle somme est directe; d'où

$$\dim E = n = q_1 + \ldots + q_m, \qquad q_i = \dim E(\lambda_i).$$

D'autre part (232, 6°) l'ordre k_i du zéro λ_i du polynôme caractéristique vérifie $k_i \geqslant q_i$. Si pour une valeur de i l'inégalité précédente était stricte, on aurait $\sum k_i > n$, ce qui constituerait une contradiction. Nécessairement

$$q_i = k_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

et, par suite, f est diagonalisable (235, 1°).

d) APPLICATION. — Montrons sur un exemple comment on utilise l'étude précédente : *Chercher les matrices carrées d'ordre* 4, *à éléments réels qui vérifient l'équation matricielle*

$$A^2 - 3A + 2I = [0]. \tag{3}$$

Ce problème équivaut au suivant : chercher les endomorphismes f d'un espace vectoriel E, de dimension 4, sur le corps R, tels que

$$f^2 - 3f + 2e = o \qquad \text{ou} \qquad (f - 2e) \circ (f - e) = o. \tag{4}$$

D'après *c*) les seules solutions possibles sont les endomorphismes diagonalisables admettant des valeurs propres prises dans l'ensemble $\{1, 2\}$. D'où les solutions :

f admet quatre valeurs propres égales à 1 : c'est que $f = e$;

f admet quatre valeurs propres égales à 2 : c'est que $f = 2e$

f admet à la fois 1 et 2 pour valeur propre : c'est que f peut être représenté par l'une des matrices suivantes :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Inversement les endomorphismes ainsi sélectionnés répondent à la question : la vérification est immédiate en ce qui concerne e et $2e$; pour les autres on calcule

$$B_i^2 - 3B_i + 2I, \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad \text{on obtient } [0].$$

Finalement les solutions de (3) sont les matrices I, 2 I, et les matrices semblables soit à B_1, soit à B_2, soit à B_3.

237. *Réduction d'une matrice carrée à la forme triangulaire.* — THÉORÈME. — **Toute matrice carrée à éléments complexes est semblable à une matrice triangulaire.** — Soit E un espace vectoriel sur C, de dimension n, et soit f un endomorphisme de E.

1° RAPPELS. — Soit E′ et E″ deux sous-espaces supplémentaires quelconques de E. Rappelons (n° 154) que

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad \vec{X} = \vec{X'} + \vec{X''}, \qquad \vec{X'} \in E', \qquad \vec{X''} \in E''$$

et que cette représentation est unique.

Soit p l'endomorphisme de E qui associe au vecteur générique de E sa projection sur E″, parallèlement à E′ : $p(\vec{X}) = \vec{X}''$;

$$p(\vec{X}) = \vec{0} \iff \vec{X} \in E'; \qquad p(\vec{X}) = \vec{X} \iff \vec{X} \in E''.$$

Montrons que E″ est stable par $p \circ f$; en effet

$$\forall \vec{X} \in E \quad (\text{et } a \textit{ fortiori } \forall \vec{X} \in E'') \quad p[f(\vec{X})] \in E'';$$

autrement dit, la restriction g de $p \circ f$ à E″ est un endomorphisme de E″.

Ces rappels étant faits, nous allons procéder par analyse et synthèse.

2° ANALYSE. — Supposons que, par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ la matrice de f soit triangulaire et que, par exemple, les éléments situés au-dessous de la diagonale principale soient des 0; c'est donc que

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{w}_1) = \lambda_{11}\vec{w}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\vec{w}_k) = \lambda_{1k}\vec{w}_1 + \ldots + \lambda_{kk}\vec{w}_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

On constate ainsi :

I) $\vec{w}_1$ est un vecteur propre de f.

II) Pour $k > 1$,

$$f(\vec{w}_k) - \lambda_{kk}\vec{w}_k = \lambda_{1k}\vec{w}_1 + \ldots + \lambda_{k-1,k}\vec{w}_{k-1}$$

appartient au sous-espace vectoriel E'_k engendré par $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}$. Soit alors E''_k un sous-espace supplémentaire de E'_k, et p_k l'endomorphisme-projection de E sur E''_k, parallèlement à E'_k :

$$p_k[f(\vec{w}_k) - \lambda_{kk}\vec{w}_k] = \vec{0}.$$

D'après le caractère linéaire de p_k,

$$p_k[f(\vec{w}_k)] - \lambda_{kk}p_k(\vec{w}_k) = \vec{0};$$

$$\vec{w}_k \in E''_k \implies p_k(\vec{w}_k) = \vec{w}_k$$

et enfin

$$p_k[f(\vec{w}_k)] = \lambda_{kk}\vec{w}_k,$$

c'est donc que $\vec{w}_k$ est un vecteur propre de l'endomorphisme g_k, restriction de $p_k \circ f$ à E''_k.

En résumé, si $\mathfrak{B}$ existe, $\vec{w}_1$ est un vecteur propre de f, et pour $k = 2, \ldots, n$, $\vec{w}_k$ est un vecteur propre de la restriction de $p_k \circ f$ à E''_k;

E''_k : sous-espace supplémentaire de E'_k engendré par $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}$;

p_k : projection de E sur E''_k, parallèlement à E'_k.

3° SYNTHÈSE. — I. — L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre (les $n-1$ autres pouvant être confondues avec celle-ci) (cf. n° 231); c'est donc que f admet au moins un vecteur propre, qui est différent de $\vec{0}$.

II. — On choisit donc pour $\vec{w}_1$ un vecteur propre de f, puis $\vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ d'après l'algo-

rithme du 2°; le I) précédent montre l'existence, pour chaque valeur $k = 2, \ldots, n$ d'un vecteur propre au moins pour l'endomorphisme $p_k \circ f$ de E''_k.

α) Montrons, par récurrence sur k, que $\mathfrak{W} = \{ \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n \}$ est un système libre. D'abord $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$.

Supposons alors que $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}$ soit libre; si $\vec{w}_k$ est une combinaison linéaire de $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}, \vec{w}_k \in E'_k$, ce qui est incompatible avec $w_k \in E''_k$ et $\vec{w}_k \neq \vec{0}$. C'est donc que $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$ est libre.

β) Appelons H la matrice de f dans la base $\mathfrak{W}$ de E; la k-lème colonne de H a pour éléments les coordonnées de $f(\vec{w}_k)$.

Par construction, il existe un scalaire du corps C, μ_k, tel que

$$p_k[f(\vec{w}_k)] = \mu_k \vec{w}_k,$$

et comme $p_k(\vec{w}_k) = \vec{w}_k$, on a aussi

$$p_k[f(\vec{w}_k) - \mu_k \vec{w}_k] = \vec{0}.$$

D'après le 1°, l'égalité précédente entraîne

$$f(\vec{w}_k) - \mu_k \vec{w}_k \in E'_k,$$

autrement dit, il existe des scalaires du corps C, ρ_{jk} tels que

$$f(\vec{w}_k) = \rho_{1k} \vec{w}_1 + \ldots + \rho_{k-1,\,k} \vec{w}_{k-1} + \mu_k \vec{w}_k$$

H est donc une matrice triangulaire dans laquelle les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont des 0. Les éléments de la diagonale principale de H en sont ainsi les valeurs propres; ce sont les valeurs propres, distinctes ou confondues, de l'endomorphisme f.

4° Remarque. — Dans le cas où le corps de base n'est pas celui des complexes, le procédé s'étend à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n dont le polynôme caractéristique a n zéros dans le corps de base.

5° Exemple. — *Trouver une matrice triangulaire semblable à la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Considérons A comme la matrice d'un endomorphisme f de l'espace vectoriel R^3 rapporté à sa base primitive $\mathfrak{U} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$. Soit $\vec{Y} = f(\vec{X})$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de f est $(2 - \lambda)^3$. A la valeur propre $\lambda = 2$ sont associés les vecteurs propres colinéaires au vecteur

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3; \qquad \text{on a} \qquad f(\vec{w}_1) = 2\vec{w}_1.$$

Soit E' le sous-espace vectoriel de R^3 engendré par les vecteurs colinéaires à $\vec{w}_1$; on peut prendre comme sous-espace supplémentaire E'' celui qui admet pour générateurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Tout vecteur $\vec{X}$ de R^3 peut ainsi s'écrire

$$\vec{X} = h\vec{w_1} + \rho_1\vec{u_1} + \rho_2\vec{u_2}.$$

En identifiant avec

$$\vec{X} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + x_3\vec{u_3}$$

on obtient $h = x_3$, $\rho_1 = x_1$, $\rho_2 = x_2 - x_3$.

Soit p l'endomorphisme projection de E sur E'' parallèlement à E' :

$$p(\vec{X}) = x_1\vec{u_1} + (x_2 - x_3)\vec{u_2}.$$

La matrice S de p est

$$\begin{array}{c|ccc} & p(\vec{u_1}) & p(\vec{u_2}) & p(\vec{u_3}) \\ \hline \vec{u_1} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{u_2} & 0 & 1 & -1 \\ \vec{u_3} & 0 & 0 & 0 \end{array} = S$$

L'endomorphisme $p \circ f$ a pour matrice, dans la base primitive, le produit

$$SA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $p \circ f$ est $-\lambda(2-\lambda)^2$; à la valeur propre $\lambda = 2$ sont associés les vecteurs propres colinéaires au vecteur $\vec{w_2} = \vec{u_1} - \vec{u_2}$;

$$f(\vec{w_2}) = 2\vec{u_1} + 2\vec{u_3}, \qquad \text{ou encore} \qquad 2\vec{w_1} + 2\vec{w_2}.$$

On complète alors le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ par un sous-espace supplémentaire, par exemple celui qu'engendre le vecteur $\vec{w_3} = \vec{u_3}$.

$$f(\vec{w_3}) = \vec{u_1} + \vec{u_3} = \vec{w_2} + 2\vec{w_3}.$$

Dans la base $\mathfrak{W}' \left\{ \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3} \right\}$ l'endomorphisme f est défini par la matrice

$$\begin{array}{c|ccc} & f(\vec{w_1}) & f(\vec{w_2}) & f(\vec{w_3}) \\ \hline \vec{w_1} & 2 & 2 & 0 \\ \vec{w_2} & 0 & 2 & 1 \\ \vec{w_3} & 0 & 0 & 2 \end{array} = B$$

La matrice B est bien triangulaire.

La matrice de passage de la base $\mathfrak{U}$ à la base $\mathfrak{W}'$ est

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{w_1} & \vec{w_2} & \vec{w_3} \\ \hline \vec{u_1} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{u_2} & 1 & -1 & 1 \\ \vec{u_3} & 1 & 0 & 0 \end{array} = P$$

Les expressions de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en fonction de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ donnent la matrice inverse

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \hline \vec{w}_1 & 0 & 0 & 1 \\ \vec{w}_2 & 1 & 0 & 0 \\ \vec{w}_3 & 1 & 1 & -1 \end{array} = P^{-1}$$

On vérifiera la relation de similitude

$$B = P^{-1}AP$$

238. ***Théorème de Cayley-Hamilton.*** — THÉORÈME. — **Si $\Delta(\lambda)$ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, de dimension finie n, sur le corps C, $\Delta(f)$ est l'endomorphisme nul de E.**

Nous savons (237, 3°) qu'il existe au moins une base $\mathfrak{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ de E dans laquelle l'endomorphisme f de E est représenté par une matrice triangulaire H :

$$\begin{array}{c|ccccccc} & f(\vec{w}_1) & f(\vec{w}_2) & \ldots & f(\vec{w}_k) & \ldots & f(\vec{w}_n) \\ \hline \vec{w}_1 & \lambda_1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1k} & \ldots & \rho_{1n} \\ \vec{w}_2 & 0 & \lambda_2 & \ldots & \rho_{2k} & \ldots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{w}_k & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & \ldots & \rho_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{w}_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array} = H$$

Les éléments diagonaux de H sont les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, distincts ou confondus du polynôme $\Delta(\lambda)$.

Nous allons étudier les endomorphismes

$$\varphi_1 = f - \lambda_1 e$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_j = (f - \lambda_j e) \circ (f - \lambda_{j-1} e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_1 e)$$

e étant l'endomorphisme identique de E.

L'indice j prend les valeurs de 1 à n;

$$\varphi_n = (f - \lambda_n e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_1 e) \quad \text{ou} \quad (-1)^n \Delta(f).$$

Nous savons que les endomorphismes qui composent φ_j sont commutables;

$$\varphi_j = (f - \lambda_j e) \circ \varphi_{j-1} \quad \text{peut s'écrire} \quad \varphi_{j-1} \circ (f - \lambda_j e).$$

D'autre part, si $\varphi_j(\vec{X}) = \vec{0}$,

$$\varphi_{j+1} = (f - \lambda_{j+1} e) \circ \varphi_j$$

montre que $\varphi_{j+1}(\vec{X}) = \vec{0}$,

et, plus généralement, $\varphi_k(\vec{X}) = \vec{0}$ pour $k \geqslant j$.

Nous allons montrer, par récurrence sur k, que, pour chaque vecteur $\vec{w_k}$ de la base $\mathfrak{W}$ $\varphi_k(\vec{w_k}) = \vec{0}$.

I. La relation $\varphi_1(\vec{w_1}) = \vec{0}$ résulte immédiatement de $f(\vec{w_1}) = \lambda_1 \vec{w_1}$.

II. Faisons l'hypothèse de récurrence

$$\varphi_j(\vec{w_j}) = \vec{0} \qquad \text{pour} \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

$\varphi_k(\vec{w_k})$ est l'image de $\varphi_{k-1}(\vec{w_k})$ par $f - \lambda_k e$, mais aussi l'image par φ_{k-1} de

$$f(\vec{w_k}) - \lambda_k \vec{w_k} = \varrho_{1k}\vec{w_1} + \ldots + \varrho_{1,k-1}\vec{w_{k-1}}.$$

On en déduit

$$\varphi_k(\vec{w_k}) = \varrho_{1k}\varphi_{k-1}(\vec{w_1}) + \ldots + \varrho_{1,k-1}\varphi_{k-1}(\vec{w_{k-1}}).$$

Or $$\varphi_{k-1}(\vec{w_j}) = \vec{0} \qquad \text{pour} \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

par suite on a bien $$\varphi_k(\vec{w_k}) = \vec{0}.$$

Finalement on peut écrire

$$\varphi_n(\vec{w_1}) = \vec{0}, \ \ldots, \ \varphi_n(\vec{w_n}) = \vec{0}.$$

Le vecteur générique de E, qui est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_n}$ de la base $\mathfrak{W}$ est ainsi transformé par l'endomorphisme φ_n en $\vec{0}$, ce qui prouve que $\Delta(f)$ est l'endomorphisme nul de E.

REMARQUE I. — Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton fait l'objet de l'exercice n° 34.

REMARQUE II. — Le théorème de Cayley-Hamilton s'applique à un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, de dimension finie n, sur le corps R. En effet on peut introduire (tome III, n°s 103, 104) le complexifié, E_C, de E et le prolongement f_C de f sur E.

Soit A la matrice qui représente f dans la base $\mathfrak{U}$ de E; nous savons (104, 2°) que A représente également f_C dans la base $\mathfrak{U}$ de E_C.

$\Delta(\lambda)$ étant le polynôme caractéristique de A, nous venons de voir que $\Delta(f_C)$ est l'endomorphisme nul de E_C. Il en résulte que $\Delta(f)$ est l'endomorphisme nul de E.

REMARQUE III. — Comme la triangularisation des matrices, le théorème de Cayley-Hamilton est valable sur tout corps algébriquement clos.

En utilisant la notion de clôture algébrique (193, 5°) et en généralisant la remarque II, on montrerait que le théorème est valable sur tout corps commutatif.

239. ***Polynôme minimal d'un endomorphisme.*** — Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, sur un corps commutatif K et soit f un endomorphisme de E.

1° Idéal annulateur; polynôme minimal. — Désignons par $\mathfrak{J}$ la partie de l'anneau commutatif K [λ] formée des polynômes Q (λ) tels que Q (f) soit l'endomorphisme nul o de E, (les notations sont celles du n° 223).

● $\mathfrak{J}$ n'est pas vide. En effet dans l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$ (E) des endomorphismes de E, dont la dimension est n^2 (cf. n° 177), les $n^2 + 1$ éléments

$$e, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$$

forment un système lié, ce qui prouve que $\mathfrak{J}$ admet pour élément un polynôme non nul, dont le degré n'excède pas n^2.

● On vérifie, sans difficulté que

$$\begin{cases} Q_1 \in \mathfrak{J} \text{ et } Q_2 \in \mathfrak{J} & \Longrightarrow \quad Q_1 - Q_2 \in \mathfrak{J} \\ Q \in \mathfrak{J} \text{ et } P \in K[\lambda] & \Longrightarrow \quad PQ \qquad \in \mathfrak{J}. \end{cases}$$

On en déduit que $\mathfrak{J}$ est un idéal (nécessairement bilatère) de l'anneau K [λ]. On dit que $\mathfrak{J}$ est l'idéal annulateur de f.

Comme (n° 100) tout idéal de K [λ] est principal, $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des multiples d'un polynôme normalisé M (λ), connu sans ambiguïté, qui est appelé *polynôme minimal* de f.

2° **Étude des zéros du polynôme minimal.** — Soit λ_i une valeur propre de f et soit $\vec{V}_i$ un vecteur propre associé à λ_i. On vérifie, par récurrence :

$$(\forall m \in \mathbf{N}^*) \qquad f^m(\vec{V}_i) = \lambda_i^m \vec{V}_i.$$

On en déduit que, Q (λ) désignant un polynôme quelconque de K [λ], l'image de $\vec{V}_i$ par l'endomorphisme Q (f) est le vecteur : Q (λ_i) $\vec{V}_i$.

En particulier, le vecteur M (λ_i) $\vec{V}_i$ est l'image de $\vec{V}_i$ par M (f), c'est-à-dire par o, si bien que M (λ_i) $\vec{V}_i = \vec{0}$ et que, compte tenu de $\vec{V}_i \neq \vec{0}$:

$$\mathrm{M}(\lambda_i) = 0.$$

Ainsi *toute valeur propre de f est zéro du polynôme minimal.*

3° Théorème. — **L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est le produit de polynômes normalisés du premier degré, deux à deux distincts.**

N) *Supposons que f est diagonalisable.* D'après le n° 235, E est la somme directe des sous-espaces propres E (λ_i) associés aux valeurs propres distinctes λ_i de f ($i = 1, \ldots, p$). Tout vecteur $\vec{X}$ de E s'écrit donc

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}_i, \qquad \vec{X}_i \in \mathrm{E}(\lambda_i).$$

On en déduit que l'endomorphisme (composé d'endomorphismes commutatifs)

$$g(f) = (f - \lambda_p e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_1 e)$$

transforme $\vec{X}$ en $\vec{0}$ et que $g(f) = o$.

Le polynôme $g(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)$ est ainsi un élément de l'idéal annulateur $\mathfrak{J}$ de f, c'est-à-dire un multiple du polynôme minimal M (λ).

S) Supposons que :

$$\mathrm{M}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i), \qquad \text{(les } \lambda_i \text{ deux à deux distincts).}$$

L'endomorphisme $(f - \lambda_m e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_1 e)$ est M (f), c'est-à-dire o. D'après le n° 236, 4°, f est diagonalisable.

4° Remarque. - Dans la mesure où le théorème de Cayley-Hamilton a été démontré, et en particulier lorsque le corps de base est celui des complexes, nous pouvons affirmer que le polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$ de f est un élément de l'idéal annulateur $\mathfrak{J}$, c'est-à-dire un multiple du polynôme minimal M (λ) dont chaque zéro est ainsi une valeur propre de f (ce qui complète le résultat obtenu au 2°).

240. ***Décomposition de la matrice d'un endomorphisme en blocs diagonaux.*** - 1° **Introduction.** I. — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps commutatif K. Nous nous plaçons ici dans le cas où il existe deux sous-espaces supplémentaires, E_1 et E_2, de E, l'un et l'autre stables par f. Nous désignons par f_i, ($i = 1, 2$), l'endomorphisme de E_i induit par f sur E_i (n° 15, 5°).

Soient $\mathfrak{V}_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ et $\mathfrak{V}_2 = \{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$

des bases arbitrairement choisies de E_1 et E_2 et soient B_1 et B_2 les matrices carrées, d'ordres p et $n - p$, qui représentent respectivement f_1 dans $\mathfrak{V}_1$ et f_2 dans $\mathfrak{V}_2$. Explicitons sous la forme :

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pp} \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} b_{p+1,\,p+1} & \ldots & b_{p+1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,\,p+1} & \ldots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1(\vec{v}_j) = b_{1j}\vec{v}_1 + \ldots + b_{pj}\vec{v}_p, & (j \in [1, p]), \\ f_2(\vec{v}_k) = b_{p+1,\,k}\vec{v}_{p+1} + \ldots + b_{n,\,k}\vec{v}_n, & (k \in [p+1, n]). \end{cases}$$

Nous savons que $\mathfrak{V} = \{\vec{v}_j\}$, $(j = 1, \ldots, n)$, est une base de E. Comme

$$f(\vec{v}_j) = f_1(\vec{v}_j), \ (j \in [1, p]) \qquad \text{et} \qquad f(\vec{v}_k) = f_2(\vec{v}_k), \ (k \in [p+1, n]),$$

la matrice qui représente f dans $\mathfrak{V}$ s'écrit

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(le symbole O désignant une matrice nulle de dimensions convenables).

Appelant *bloc* toute sous-matrice d'une matrice donnée, formée avec des lignes et des colonnes consécutives, nous dirons que (1) est une décomposition de la matrice B en deux blocs diagonaux.

II. — *Inversement*, si on se donne un espace vectoriel E, une base $\mathfrak{V} = \{\vec{v}_i\}$ de E et une matrice B de la forme (1), on démontre que les sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E engendrés par $\mathfrak{V}_1 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ et $\mathfrak{V}_2 = \{\vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ sont stables par l'endomorphisme f de E représenté par B dans $\mathfrak{V}$; B_1 et B_2 représentent dans $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$ les endomorphismes f_1 et f_2 induits par f sur E_1 et E_2.

2° **Multiplication des matrices décomposées en deux blocs diagonaux.** — Les notations étant celles du 1°, nous supposons en outre que E_1 et E_2 sont stables par un second endomorphisme f' de E; nous désignons par f'_i, $(i = 1, 2)$, l'endomorphisme de E_i induit par f' sur E_i et par B'_i la matrice qui représente f'_i dans la base $\mathfrak{V}_i$ de E_i. La matrice B′ qui représente f' dans la base $\mathfrak{V}$ admet la décomposition en blocs diagonaux

$$B' = \begin{bmatrix} B'_1 & O \\ O & B'_2 \end{bmatrix}$$

Mais E_1 et E_2 sont stables par l'endomorphisme $f' \circ f$ de E, les endomorphismes induits n'étant autres que $f'_1 \circ f_1$ et $f'_2 \circ f_2$. Comme $f' \circ f$, $f'_1 \circ f_1$, $f'_2 \circ f_2$ sont respectivement représentés par B′B, B'_1B_1, B'_2B_2 dans $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} B'_1 & O \\ O & B'_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1B_1 & O \\ O & B'_2B_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3° **Déterminant et polynôme caractéristique.** — Dans toute la suite I_h désigne la matrice-unité d'ordre h. Reprenons les notations du 1°. La formule (2) donne immédiatement

$$\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & I_{n-p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\det \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \det B_1 \times \det B_2$$

Comme $I_n = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_{n-p} \end{bmatrix}$, l'addition des matrices de mêmes dimensions permet d'écrire :

$$B - \lambda I_n = \begin{bmatrix} B_1 - \lambda I_p & O \\ O & B_2 - \lambda I_{n-p} \end{bmatrix}$$

on en déduit :

$$\text{dét}\,(B - \lambda I_n) = \text{dét}\,(B_1 - \lambda I_p) \times \text{dét}\,(B_2 - \lambda I_{n-p}).$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques de f_1 et f_2.

4° **Généralisation.** — A partir des résultats obtenus au 2° et au 3°, on démontre, par récurrence, les résultats suivants :

I. — Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$,

chacun des E_i étant stable pour l'endomorphisme donné f de E. Soit $\mathfrak{C}_i$ une base arbitrairement choisie de E_i et soit B_i la matrice qui représente dans $\mathfrak{C}_i$ l'endomorphisme f_i induit par f sur E_i.

La matrice B qui représente f dans la base $\mathfrak{C}$ obtenue en réunissant $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_p$ admet la « décomposition en blocs diagonaux »

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & O & \ldots & O \\ O & B_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & B_p \end{bmatrix}$$

II. — $\text{dét}\,B = \text{dét}\,B_1 \times \ldots \times \text{dét}\,B_p$.

III. — Le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des f_i.

241. *Forme réduite de Jordan.* — 1° **Introduction.** — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, de dimension finie n, sur le corps des complexes. Le polynôme caractéristique de f s'écrit, avec les notations du n° 235,

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{p} k_i = n$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignant les valeurs propres distinctes de f.

I. LEMME. — **Soit λ_i une valeur propre de l'endomorphisme f de E et soit N_i le noyau de l'endomorphisme**

$$f_i = (f - \lambda_i e)^{k_i}.$$

a) **Le sous-espace vectoriel N_i de E est stable par f;**

b) **les sous-espaces N_i de E sont supplémentaires (n° 154, 6°);**

c) **l'endomorphisme g_i induit par f sur N_i a pour polynôme caractéristique $(\lambda_i - \lambda)^{k_i}$, ce qui implique $\dim N_i = k_i$.**

a) Soit $\vec{V} \in N_i$, c'est-à-dire $f_i(\vec{V}) = \vec{0}$.

Étudions $f_i(f(\vec{V}))$. Les endomorphismes $f_i \circ f$ et $f \circ f_i$ commutent car ils sont associés (n° 223) au même polynôme $\lambda(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ de l'anneau $C[\lambda]$. D'où

$$f_i(f(V)) = f(f_i(\vec{V})) \quad \text{ou} \quad f(\vec{0}), \quad \text{ou} \quad \vec{0}.$$

Ce résultat montre que $f(\vec{V})$ appartient à N_i.

La partie *a*) du théorème est démontrée.

b) Le quotient de $(-1)^n \Delta(\lambda)$ par $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ s'écrit :

$$Q_i(\lambda) = \prod_{j \in [1, p] - \{i\}} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

Les p polynômes $Q_i(\lambda)$ de $C[\lambda]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble car d'après leur formation il n'existe pas un facteur qui appartienne à toutes les décompositions (2) en facteurs premiers.

D'après le théorème de Bezout (102, 2°), il existe p polynômes $U_i(\lambda)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} U_i(\lambda)\, Q_i(\lambda) = I, \qquad (I : \text{polynôme-unité}).$$

Autrement dit, q_i désignant l'endomorphisme $Q_i(f)$, il existe p endomorphismes $u_i = U_i(f)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} u_i \circ q_i = e \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} q_i \circ u_i = e \tag{3}$$

En écrivant que les deux membres de (3) donnent la même image d'un vecteur générique $\vec{X}$ de E, on obtient

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^{p} \vec{X}_i \qquad \text{avec} \qquad \vec{X}_i = q_i(u_i(\vec{X})). \tag{4}$$

L'image de $\vec{X}_i$ par f_i s'écrit $f_i[q_i(u_i(\vec{X}))]$; elle est aussi l'image de $u_i(\vec{X})$ par l'endomorphisme $f_i \circ q_i = (-1)^n \Delta(f)$; or cet endomorphisme est o d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Par suite

$$f_i(\vec{X}_i) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{X}_i \in N_i.$$

D'après (4), E est ainsi la somme des sous-espaces N_i. Montrons qu'il s'agit d'une somme directe, c'est-à-dire que dans toute décomposition du vecteur $\vec{0}$ en vecteurs $\vec{V}_i$ appartenant à N_i,

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} \vec{V}_i, \qquad \vec{V}_i \in N_i \tag{5}$$

chacun des vecteurs $\vec{V}_i$ est nul.

Considérons l'image $q_j(V_i)$ de $\vec{V}_i$ par l'endomorphisme

$$q_j = f_p \circ \ldots \circ f_{j+1} \circ f_{j-1} \circ \ldots \circ f_1.$$

Si $i \neq j$, f_i est l'un des endomorphismes dont le produit est q_j;

or $$f_i(\vec{V}_i) = \vec{0}, \qquad \text{par suite} \qquad q_j(\vec{V}_i) = \vec{0} \qquad (j \neq i) \tag{6}$$

Écrivons maintenant que les images par q_i des deux membres de (5) sont égales; compte-tenu de (6) et de $q_i(\vec{0}) = \vec{0}$ nous obtenons

$$q_i(\vec{V}_i) = \vec{0}. \tag{7}$$

Les images de $\vec{V}_i$ par les endomorphismes figurant dans chacun des deux membres de l'égalité (3) étant les mêmes

$$\sum_{j=1}^{p} u_j[q_j(\vec{V}_i)] = \vec{V}_i;$$

en tenant compte de (6) et (7), on obtient $\vec{V}_i = \vec{0}$.

La partie *b*) du théorème est ainsi démontrée.

c) D'après *a*), il est légitime de parler de l'endomorphisme g_i induit par f sur N_i :

$$\forall \vec{X} \in N_i, \qquad g_i(\vec{X}) = f(\vec{X}).$$

Les valeurs propres de g_i figurent parmi les valeurs propres de f.

Supposons qu'il existe $j \in [1, p] - \{i\}$ tel que λ_j soit valeur propre de g_i et soit $\vec{X} \in N_i$ un vecteur propre associé. On a :

- d'une part : $f_i(\vec{X}) = \vec{0}$, conséquence de $\vec{X} \in N_i$,
- d'autre part : $f_j(\vec{X}) = \vec{0}$, conséquence de

$$g_i(\vec{X}) = \lambda_j \vec{X} \qquad \text{ou} \qquad f(\vec{X}) - \lambda_j e(\vec{X}) = \vec{0}.$$

Reprenons le produit commutatif

$$q_h = f_p \circ \ldots \circ f_{h+1} \circ f_{h-1} \circ \ldots \circ f_1, \quad (h \in [1, p]) \tag{8}$$

Comme on n'a pas simultanément $h = i$ et $h = j$, l'un des endomorphismes f_i ou f_j, au moins, figure au second membre de (8); d'où

$$(\forall h \in [1, p]) \qquad q_h(\vec{X}) = \vec{0}.$$

En utilisant (3), il vient

$$\sum_{h=1}^{p} u_h [q_h(\vec{X})] = \vec{X}; \qquad \text{d'où} \qquad \vec{X} = \vec{0},$$

ce qui est en contradiction avec la définition de $\vec{X}$, vecteur propre.

Ainsi g_i ne peut admettre comme valeur propre que le scalaire λ_i.

Le polynôme caractéristique de g_i est donc

$$\Delta_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i = \dim N_i.$$

Puisque E est la somme directe des N_i, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes g_i (cf. n° 240, 4°, III), c'est-à-dire

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$$

en comparant avec l'expression initiale de $\Delta(\lambda)$, on en déduit $\alpha_i = k_i$ et la proposition en résulte.

II. Conséquence du lemme. — Rapportons N_i à une base arbitrairement choisie $\mathfrak{V}_i$ et soit B_i la matrice qui représente dans $\mathfrak{V}_i$ l'endomorphisme g_i induit par f sur N_i. La matrice B qui représente f dans la base $\mathfrak{V}$ de E, réunion des $\mathfrak{V}_i$, admet la décomposition en blocs diagonaux (240, 4°)

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & O & \ldots & O \\ O & B_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & & B_p \end{bmatrix}$$

Nous savons que nous pouvons choisir les $\mathfrak{V}_i$ de façon que les B_i soient des matrices triangulaires. L'étude des endomorphismes nilpotents que nous allons aborder va permettre d'obtenir des matrices B_i encore plus simples.

2° **Endomorphismes nilpotents.** — Définition. — **Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K est dit nilpotent d'indice q s'il existe un entier naturel q tel que** (cf. n° 223)

$$f^q = o \qquad \text{et} \qquad f^{q-1} \neq o, \qquad (\text{on pose } f^0 = e).$$

Étudions un tel endomorphisme.

a) Si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. En effet soit $\vec{V} \neq \vec{0}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ :

$$f(\vec{V}) = \lambda \vec{V}.$$

On en déduit $f[f(\vec{V})] = f(\lambda \vec{V}) = \lambda^2 f(\vec{V})$ et, plus généralement

$$f^q(\vec{V}) = \lambda^q \vec{V}.$$

D'après l'hypothèse, le second membre est nul, et par suite, $\vec{V}$ n'étant pas nul, λ est nul

b) Nous noterons $\mathfrak{N}_m = \operatorname{Ker} f^m$.

$\mathfrak{N}_0 = \operatorname{Ker} f^0$ ou $\operatorname{Ker} e$ est $\{\vec{0}\}$

$\mathfrak{N}_q = \operatorname{Ker} f^q$ n'est autre que E lui-même.

I. — $\vec{V} \in \mathfrak{N}_{m+1}$ s'écrit $f^m[f(\vec{V})] = \vec{0}$, c'est-à-dire $f(\vec{V}) \in \mathfrak{N}_m$.

On a donc : $$\mathfrak{N}_{m+1} = f^{-1}(\mathfrak{N}_m) \tag{9}$$

et $$f(\mathfrak{N}_{m+1}) \subset \mathfrak{N}_m \tag{10}$$

II. — $f^m(\vec{V}) = \vec{0}$ entraîne $f[f^m(\vec{V})] = \vec{0}$ ou $f^{m+1}(\vec{V}) = \vec{0}$.

$\vec{V} \in \mathfrak{N}_m$ entraîne donc $\vec{V} \in \mathfrak{N}_{m+1}$. D'où : $\mathfrak{N}_m \subset \mathfrak{N}_{m+1}$

et $$\{\vec{0}\} = \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}_{q-1} \subset \mathfrak{N}_q = E. \tag{11}$$

Ces inclusions sont strictes. En effet s'il existait

$$m \in [0,\ q-1] \quad \text{tel que} \quad \mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}_{m+1},$$

on en déduirait $f^{-1}(\mathfrak{N}_m) = f^{-1}(\mathfrak{N}_{m+1})$ et, d'après (9) : $\mathfrak{N}_{m+1} = \mathfrak{N}_{m+2}$.

De proche en proche on aboutirait à : $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{N}_q = E$, ce qui impliquerait $f^m = o$, en contradiction avec l'hypothèse $f^{q-1} \neq o$.

c) D'après $f^{q-1} \neq o$, il existe un vecteur non nul $\vec{A}$ de E tel que $f^{q-1}(\vec{A}) \neq \vec{0}$. Associons lui la famille des q vecteurs de E.

$$\mathfrak{B} = \{\vec{A},\ f(\vec{A}),\ \ldots,\ f^{q-1}(\vec{A})\}.$$

Montrons que *cette famille est libre.* En effet soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ des scalaires de K tels que

$$\alpha_0 \vec{A} + \alpha_1 f(\vec{A}) + \ldots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(\vec{A}) = \vec{0}.$$

En prenant les images des deux membres de l'égalité précédente par $f, \ldots, f^{q-1}$ on obtient les nouvelles égalités

$$\alpha_0 f(\vec{A}) + \ldots + \alpha_{q-2} f^{q-1}(\vec{A}) = \vec{0}, \ \ldots, \qquad \alpha_0 f^{q-1}(\vec{A}) = \vec{0}.$$

Du fait de $f^{q-1}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ on en déduit successivement $\alpha_0 = 0$, puis $\alpha_1 = 0$, ... enfin $\alpha_{q-1} = 0$. La famille $\mathfrak{B}$ est donc libre.

d) Démontrons que, G *étant un sous-espace vectoriel de* E *et m étant un naturel,* nous avons:

$$(G \cap \mathfrak{N}_m = \{\vec{0}\}) \Longrightarrow (f(G) \cap \mathfrak{N}_{m-1} = \{\vec{0}\}) \tag{12}$$

Soit $\vec{V}$ l'un quelconque des vecteurs communs à $f(G)$ et à $\mathfrak{V}_{m-1}$.

D'après $\vec{V} \in f(G)$, il existe $\vec{X} \in G$ tel que $\vec{V} = f(\vec{X})$.

D'après $\vec{V} \in \mathfrak{V}_{m-1}$ on a $f^{m-1}(\vec{V}) = \vec{0}$. D'où : $f^m(\vec{X}) = \vec{0}$.

On en déduit : $\vec{X} \in (G \cap \mathfrak{V}_m)$.

Si on suppose $G \cap \mathfrak{V}_m = \{\vec{0}\}$, on a $\vec{X} = \vec{0}$; d'où $\vec{V} = \vec{0}$; la proposition est ainsi démontrée.

e) Dans la suite nous nous bornons au cas où E a une dimension finie n. Le résultat établi en *c*) montre : $q \leqslant n$.

Nous allons construire une suite de sous-espaces vectoriels de E de la façon suivante.

$\mathfrak{V}_q$ étant E, et $\mathfrak{V}_{q-1}$ étant inclus dans E, soit G_1 un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{V}_{q-1}$ dans E.

$$G_1 \oplus \mathfrak{V}_{q-1} = \mathfrak{V}_q = E.$$

En utilisant (10), (11) et (12) : $\mathfrak{V}_{q-2} \subset \mathfrak{V}_{q-1}$,

$$f(G_1) \subset f(\mathfrak{V}_q) \subset \mathfrak{V}_{q-1} \qquad \text{et} \qquad f(G_1) \cap \mathfrak{V}_{q-2} = \{\vec{0}\}.$$

$f(G_1)$ et $\mathfrak{V}_{q-2}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{V}_{q-1}$ dont la somme est directe; on peut donc choisir un sous-espace G_2 supplémentaire de $\mathfrak{V}_{q-2}$ dans $\mathfrak{V}_{q-1}$ et contenant $f(G_1)$; on a ainsi

$$f(G_1) \subset G_2 \qquad \text{et} \qquad G_2 \oplus \mathfrak{V}_{q-2} = \mathfrak{V}_{q-1}.$$

De proche en proche, nous disposons, pour $m \in [1, q]$, de G_m tel que

$$f(G_{m-1}) \subset G_m \qquad \text{et} \qquad G_m \oplus \mathfrak{V}_{q-m} = \mathfrak{V}_{q-m+1} \tag{13}$$

En rassemblant les relations (13) :

$$\begin{cases} G_1 \oplus \mathfrak{V}_{q-1} = \mathfrak{V}_q = E \\ G_2 \oplus \mathfrak{V}_{q-2} = \mathfrak{V}_{q-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ G_m \oplus \mathfrak{V}_{q-m} = \mathfrak{V}_{q-m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_q + \{\vec{0}\} = \mathfrak{V}_1. \end{cases}$$

On en déduit :

$$E = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_q. \tag{14}$$

Soit $m \in [1, q-1]$. D'après (13), si $\vec{X}$ est un vecteur non nul de G_m, $f^{q-m}(\vec{X})$ n'est pas nul, et par suite $f(\vec{X})$ n'est pas nul. La restriction de f à G_m, qui est une surjection de G_m sur $f(G_m)$ est injective, donc aussi bijective; $f(G_m)$ étant une partie de G_{m+1}, si $\mathcal{E}_m$ est une base de G_m, $f(\mathcal{E}_m)$ est une base de $f(G_m)$ que l'on peut « compléter » pour obtenir une base $\mathcal{E}_{m+1}$ de G_{m+1}.

f) Matrice de Jordan. — Partons alors d'une base arbitraire $\mathcal{E}_1$ de G_1; nous construisons une base $\mathcal{E}_2$ de G_2 en complétant le système $f(\mathcal{E}_1)$, etc. jusqu'à une base $\mathcal{E}_q$ de G_q (qui est le noyau de f).

L'image par f d'un vecteur de $\mathcal{E}_m$ est un vecteur de $\mathcal{E}_{m+1}$ pour $m \in [1, q-1]$; l'image par f d'un vecteur de $\mathcal{E}_q$ est $\vec{0}$.

La réunion de $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_q$ fournit une base $\mathcal{E}$ de E et nous pouvons supposer que les vecteurs de cette base ont été ordonnés de façon que tout vecteur de $\mathcal{E}$ dont l'image n'est

pas nulle est immédiatement suivi par cette image (les vecteurs de $\mathcal{E}$ dont l'image est nulle intervenant les derniers).

I. — Étudions d'abord le cas particulier où l'indice q de l'endomorphisme nilpotent f est égal à la dimension n de E. La famille libre $\mathcal{A} = \{\vec{A}, f(\vec{A}), \ldots, f^{q-1}(\vec{A})\}$ introduite en *c*, est ici une base de E qui est du type $\mathcal{E}$ considéré ci-dessus; dans cette base f est représenté par la matrice

$$\begin{array}{c|cccccc} & \vec{A} & f(\vec{A}) & f^2(\vec{A}) & \ldots & f^{q-1}(\vec{A}) & f^q(\vec{A}) \\ \hline \vec{A} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f(\vec{A}) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ f^{q-1}(\vec{A}) & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array} = J_q$$

Par définition la matrice carrée d'ordre h dont tous les éléments sont des 0 sauf ceux qui correspondent à la ligne i et à la colonne $i-1$, ($i \in [2, h]$), et qui sont égaux à 1, est dite *matrice de Jordan d'ordre h*; on convient que $J_1 = [\,0\,]$.

II. — Lorsque $q < n$, la matrice qui représente f dans la base $\mathcal{E}$ construite ci-dessus est formée de blocs diagonaux du type J_h. On peut faire en sorte que le premier de ces blocs soit J_q et qu'ensuite les ordres des blocs décroissent, au sens large, pour aboutir éventuellement à 1.

3° **Conclusion.** — Reprenons, où nous l'avons laissée, l'étude du 1° : étant donné $i \in [1, p]$, l'endomorphisme $f_i = (f - \lambda_i e)^{k_i}$ de f a un noyau N_i de dimension k_i; soit g_i l'endomorphisme induit par f sur N_i (qui est stable par f) et soit e_i l'application identique de N_i; $(g_i - \lambda_i e_i)^{k_i}$ est l'endomorphisme nul de N_i, si bien que $g_i - \lambda_i e_i$ est nilpotent (d'indice au plus égal à la dimension k_i de N_i). Utilisons les résultats du 2°, en remplaçant E par N_i, n par k_i, f par $g_i - \lambda_i e_i$: il existe une base de N_i (que nous désignerons par $\mathcal{V}_i$ pour retrouver la notation du 1°) dans laquelle $g_i - \lambda_i e_i$ est représenté par une matrice C_i d'ordre k_i décomposée en blocs diagonaux de matrices de Jordan J_h.

Désignons par B_i la matrice de g_i dans la base $\mathcal{V}_i$; dans la même base, la matrice de $g_i - \lambda_i e_i$ s'écrit :

$$C_i = B_i - \lambda_i I_{k_i}.$$

Par suite

$$B_i = C_i + \lambda_i I_{k_i}.$$

On passe de C_i à B_i en remplaçant chaque bloc diagonal J_h par le bloc $J_h + \lambda_i I_h$ qui s'écrit aussi

$$J_h(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad J_1(\lambda_i) = [\lambda_i]$$

La matrice B_i est ainsi décomposée en blocs diagonaux de la forme $J_h(\lambda_i)$.

Prenons enfin pour base $\mathcal{V}$ de E la réunion des $\mathcal{V}_i$; l'endomorphisme f est alors représenté par une matrice décomposée en blocs diagonaux de la forme B_i, par suite en blocs diagonaux de la forme $J_h(\lambda_i)$, les λ_i étant les valeurs propres de f.

EXERCICES

A. *Les exercices qui suivent ne font pas appel à la diagonalisation.*

1. — L'inverse d'une matrice carrée, régulière, symétrique, est-elle une matrice symétrique?

2. — Soient A et B deux matrices carrées régulières de mêmes dimensions. Démontrer que les matrices AB et BA sont semblables.

3. — Démontrer que si une matrice A vérifie la relation

$$A^2 + A + I = [0]$$

elle est régulière. Quelle est la matrice inverse?

4. — Quelle est la matrice inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$, a, b, c étant les racines supposées distinctes, de l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0?$$

5. — Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n. Dans chacun des cas suivants, examiner si A est régulière, calculer sa matrice inverse B, puis résoudre le même problème avec B, supposée donnée *a priori*, et d'origine inconnue :

1° $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$; $a_{ii} = 0$
2° $a_{ij} = \alpha$ si $i \neq j$; $a_{ii} = \beta$
3° $a_{ij} = 1$ si $i \geqslant j$, $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

6. — L'ensemble des matrices à coefficients entiers

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forme-t-il un groupe multiplicatif?

7. — L'ensemble des matrices

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos\varphi} & -\operatorname{tg}\varphi \\ -\operatorname{tg}\varphi & \dfrac{1}{\cos\varphi} \end{bmatrix}$$

forme-t-il un groupe multiplicatif?

8. — L'ensemble des matrices à coefficients rationnels

$$M = \begin{bmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

est-il un corps commutatif?

9. — Soient a et b des réels donnés ($b \neq 0$).
Montrer que les matrices à coefficients réels

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ -(a^2 + b^2)y & x + 2ay \end{bmatrix}$$

forment un corps isomorphe au corps des complexes.

10. — T est une matrice-substitution d'ordre n. Vérifier $T^{n!} = I$.

11. — Dans un espace vectoriel E, de dimension n, sur un corps K, rapporté à une base $\mathfrak{U}$, un endomorphisme f est déterminé par la matrice $A = [a_{ij}]$, a_{ij} étant nul pour $i \geqslant j$. Étudier les transformés des vecteurs de base par l'endomorphisme f^n. Démontrer que $A^n = O$.

12. — Trouver la matrice inverse de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & (n-1) & (n-2) & \dots & 2 & 1 & \end{bmatrix}$$

13. — On considère l'espace vectoriel $K_n[x]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps K, dont le degré est au plus égal à n. Démontrer que les polynômes

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 1 + x, \quad \dots, \quad v_n = (1 + x)^n$$

forment une base $\mathfrak{V}$ de cet espace.

Application. — Trouver la matrice inverse de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & C_3^2 & \dots & C_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

14. — Soit $A = [a_{ij}]$ la matrice carrée d'ordre $n + 1$ dont tous les termes sont des 0, sauf les $a_{i,i+1}$, $(i = 1, \dots, n)$, qui vérifient : $a_{i,i+1} = i$.

a) Calculer $M = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n$

b) Montrer que M est régulière; exprimer M^{-1} sous forme d'une combinaison linéaire de I, A, ..., A^n.

La théorie de l'exponentielle de matrice (exercice 19 du chapitre XII) laissait-elle prévoir le résultat?

15. — Soit E l'algèbre des matrices (2, 2) sur C et soit K la partie de E formé par les matrices

$$M(m, n) = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$$

a) Montrer que K est un corps.

b) Montrer que l'on peut munir K d'une structure d'espace vectoriel sur R; en donner une base et interpréter la multiplication de deux matrices de K à l'aide de cette base.

16. — Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 3, B, telles que $BC = A$, avec

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \gamma & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(on discutera suivant les valeurs de α et γ).

17. — Une condition suffisante pour que la matrice carrée d'ordre n

$$A = [a_{ij}] \qquad a_{ij} \in C$$

soit régulière est que, pour tout i, on ait

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

(on pourra associer à A un système homogène de n équations linéaires).

18. — *a*) Dans l'espace vectoriel E des polynômes de R $[x]$ dont le degré n'excède pas n, on désigne par e l'application identique et par d la dérivation. Montrer que $f = e + d^2$ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que l'équation différentielle

$$y'' + y = Q(x)$$

où Q est un polynôme donné de R $[x]$ admet une et une seule solution P qui est un polynôme de R $[x]$; montrer

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{d^{2k} Q(x)}{dx^{2k}}.$$

19. — Soit E l'espace vectoriel formé par les polynômes à coefficients complexes dont le degré n'excède pas $n - 1$, auxquels on a adjoint le polynôme nul.

a) Au polynôme $Q(x)$ de E, on associe le polynôme $Q(x + 1)$. Montrer que l'on détermine ainsi une application linéaire f. Montrer que, e désignant l'endomorphisme identique de E, l'endomorphisme $f - e$ est nilpotent (cf. exercice 18).

b) A partir du polynôme $P(x)$ de E, on détermine les polynômes

$$P_0(x) = P(x); \quad P_1(x) = P(x + 1); \quad \ldots; \quad P_n(x) = P(x + n).$$

Déterminer des constantes non nulles $a_0, a_1, \ldots, a_n$, indépendants de P, telles que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) = 0.$$

20. — Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, de dimension n, tel que u commute avec tout endomorphisme de E. On se propose de démontrer que u est une homothétie.

a) Montrer qu'à tout vecteur non nul $\vec{X}$ de E on peut associer un endomorphisme $f_{\vec{X}}$ de E dans lequel les seuls vecteurs invariants sont $\vec{X}$ et les vecteurs colinéaires. Montrer que le vecteur $u(\vec{X})$ est invariant par $f_{\vec{X}}$. En déduire qu'à tout vecteur non nul $\vec{X}$ on peut associer un scalaire $\mu_{\vec{X}}$ tel que : $u(\vec{X}) = \mu_{\vec{X}} \vec{X}$.

b) Montrer que, si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont des vecteurs distincts, non nuls : $\mu_{\vec{X}} = \mu_{\vec{Y}}$; et conclure.

c) Retrouver le résultat en utilisant des matrices (cf. n° 221, 2°)

21. — Soit $K_n[x]$ l'ensemble formé par le polynôme nul et les polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K, et dont le degré est inférieur ou égal à un entier donné n. On sait que $K_n[x]$ est un espace vectoriel sur K, de dimension $n + 1$.

a) Soit $P(x)$ un élément quelconque de $K_n[x]$ et h un élément quelconque de K. Démontrer que $P(x + h) \in K_n[x]$.

b) On considère l'application f_h de $K_n[x]$ dans lui-même qui, à $P(x)$ associe $\varphi[P(x)] = P(x + h)$. Démontrer que f_h est une application linéaire, et trouver la matrice M_h de f_h quand on rapporte $K_n[x]$ à la base :

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \ldots, \quad \frac{x^n}{n!}.$$

c) On considère l'ensemble des matrices M_h associées aux divers éléments h de K. Démontrer que la multiplication des matrices confère à cet ensemble une structure de groupe abélien. Former

$$M_h M_{h'}, \quad M_h^{-1}, \quad (M_h)^p.$$

22. — *Idéaux bilatères de l'algèbre* $\mathfrak{L}(E)$. — Soit $\mathfrak{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E, sur le corps commutatif K. On appelle idéal de l'algèbre $\mathfrak{L}(E)$ tout idéal de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ qui est stable pour la multiplication externe.

a) Soient f et g deux endomorphismes ayant pour noyau commun un hyperplan H et pour image commune une droite D (sous-espace de dimension 1). Montrer qu'il existe un scalaire k tel que $f = kg$.

b) Soit u un endomorphisme non nul et soit f un endomorphisme ayant pour noyau un hyperplan H et pour image une droite D. Montrer qu'il existe deux endomorphismes φ et ψ tels que

$$\psi \circ u \circ \varphi = f$$

c) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{L}(E)$, autre que $\{o\}$, et soit f un endomorphisme de rang fini r. Montrer : $f \in \mathfrak{J}$.

Pour cela on considèrera une base $\{\vec{D}_1, \ldots, \vec{D}_r\}$ de $\mathrm{Im}f$; on désignera par D_k le sous-espace engendré par $\vec{D}_k$ et on écrira

$$f = \sum_{k=1}^{r} f_k \qquad \text{avec} \qquad f_k = p_k \circ f,$$

p_k désignant la projection sur D_k parallèlement à un sous-espace convenablement choisi de $\mathrm{Im}f$; on montrera que le noyau de f_k est un hyperplan de E et on utilisera *b*).

d) Déduire de *c*) que, si E a une dimension finie, les seuls idéaux bilatères de $\mathfrak{L}(E)$ sont $\{o\}$ et $\mathfrak{L}(E)$.

e) Montrer que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des endomorphismes de rang fini de l'espace vectoriel E est un idéal bilatère de $\mathfrak{L}(E)$. En déduire que si E a une dimension infinie, $\mathfrak{L}(E)$ admet d'autres idéaux bilatères que $\{o\}$ et $\mathfrak{L}(E)$.

B. – *Les exercices qui suivent font appel à la diagonalisation et éventuellement à la triangularisation.*

23. – Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes de C^2 ou C^3 déterminés par les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

24. – On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\theta & \mathrm{sh}\,\theta \\ \mathrm{sh}\,\theta & \mathrm{ch}\,\theta \end{bmatrix}.$$

Pour chacune d'elles :

a) chercher le carré, le cube, puis, par récurrence, la puissance n-ième;

b) chercher les valeurs propres et les vecteurs propres; en prenant comme base deux vecteurs propres, diagonaliser ces matrices, et en déduire à nouveau l'expression de la puissance n-ième;

c) trouver la matrice inverse.

25. – *a*) On donne la matrice à éléments complexes $A = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$; on la suppose régulière. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A (on introduira les racines cubiques de l'unité). On constatera que les vecteurs propres ne dépendent pas du choix des nombres a et b.

b) Vérifier que la matrice A et la matrice A′ obtenue en remplaçant a et b par a' et b' sont commutables.

26. — Calculer la puissance n-ième des matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \quad a \text{ et } b \text{ étant réels, non nuls.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

27. — Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & x+\frac{1}{x} & x^2+\frac{1}{x^2} \\ x+\frac{1}{x} & 1 & x+\frac{1}{x} \\ x^2+\frac{1}{x^2} & x+\frac{1}{x} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

28. — Déterminer a, b, a', b', a'', b'' de manière que la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a' & b' \\ 1 & a'' & b'' \end{bmatrix}$$

admette pour vecteurs propres $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$.

29. — Déterminer les valeurs propres des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Étudier les sous-espaces propres correspondants. Montrer que chacune des matrices est diagonalisable.

30. — A quelles conditions peut-on diagonaliser la matrice suivante :

$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad b)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 2 \end{bmatrix}$

31. — Soit la matrice

$$M(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a)$ les matrices $M(x)$ forment-elles un groupe multiplicatif?

$b)$ Montrer que pour toute valeur de x, $M(x)$ vérifie

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = [0].$$

$c)$ Trouver les valeurs propres de $M(x)$.

32. — Dans l'espace euclidien rapporté à un repère cartésien $Oxyz$, on considère la transformation ponctuelle $\mathfrak{T}$ qui, à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que

$$x' = (1 - 2up)x - 2vpy - 2wpz$$
$$y' = -2uqx + (1 - 2vq)y - 2wqz$$
$$z' = -2urx - 2vry + (1 - 2wr)z,$$

u, v, w, p, q, r sont des nombres réels donnés, satisfaisant à la relation $up + vq + wr = 1$.

Démontrer que la transformation $\mathfrak{T}$ a deux valeurs propres distinctes; que, à l'une d'elles correspond une direction propre et qu'à l'autre correspondent une infinité de directions propres toutes parallèles à un même plan.

Utiliser ces résultats pour caractériser géométriquement la transformation $\mathfrak{T}$.

33. — Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

34*. — THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON. — Il s'agit de démontrer que

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

étant le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f de l'espace vectoriel E, de dimension n, sur le corps C,

$$(-1)^n f^n + c_1 f^{n-1} + \ldots + c_{n-1}f + c_n e$$

est l'endomorphisme nul.

a) Établir la proposition dans le cas où $\Delta(\lambda)$ a ses n zéros λ_k simples, en étudiant l'endomorphisme

$$g = (f - \lambda_n e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_2 e) \circ (f - \lambda_1 e).$$

b) Dans le cas général on introduit la matrice A qui traduit f dans la base donnée, $\mathfrak{A}$, de E. A tout scalaire λ, on associe $B(\lambda)$, transposée de la comatrice de $(A - \lambda I)$.

On écrit : $$B(\lambda) = \lambda^{n-1}\Gamma_1 + \ldots + \lambda\Gamma_{n-1} + \Gamma_n. \qquad (1)$$

Montrer : $$(A - \lambda I)B(\lambda) = \Delta(\lambda)I. \qquad (2)$$

Déduire n égalités matricielles de la comparaison des deux expressions de la matrice $(A - \lambda I)B(\lambda)$ obtenues à partir de (1) et (2). En déduire l'égalité

$$(-1)^n A^n + c_1 A^{n-1} + \ldots + c_{n-1}A + c_n I = [0].$$

Conclure.

35. — Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit B la transposée de la comatrice de A.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

b) Dans le cas où A a n valeurs propres distinctes, dont une nulle, calculer les valeurs propres de B.

36. — Soit A une matrice-colonne non nulle. Former le polynôme caractéristique de $B = A\tilde{A}$.

37. — Soit f l'application de C^{n+1} dans lui-même ainsi définie : au vecteur générique $\vec{X} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de C^{n+1} on associe la fonction complexe d'une variable réelle

$$x \longrightarrow P_{\vec{X}}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^{n-k}x \sin^k x$$

et on convient que $\vec{X}' = f(\vec{X})$ signifie que la fonction $P_{\vec{X}'}(x)$ est la dérivée (par rapport à x) de la fonction $P_{\vec{X}}(x)$.

Montrer que f est un endomorphisme. Écrire la matrice qui le représente dans la base canonique de C^{n+1}. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. Montrer que f est diagonalisable et effectuer la diagonalisation dans le cas $n = 2$.

38. — Soit A une matrice carrée d'ordre n, régulière, de polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$. Montrer que le polynôme caractéristique de A^{-1} est

$$(-1)^n \frac{1}{\Delta(0)} \lambda^n \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

39*. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie, sur le corps C, et soit E* le dual de E. On considère un endomorphisme f de E et l'application linéaire transposée, $\tilde{f}$, qui est un endomorphisme de E* (186).

a) Montrer que f et $\tilde{f}$ ont le même polynôme caractéristique.

b) Montrer que les sous-espaces propres de E et E*, relatifs à une valeur propre commune à f et à $\tilde{f}$, ont la même dimension.

40. — Soit T l'ensemble des matrices (n, n) sur C, antisymétriques.

a) Montrer que l'on peut munir T d'une structure d'espace vectoriel sur C; en donner la dimension.

b) Soit A une matrice (n, n) sur C, donnée. A la matrice générique M de T on associe la matrice $f(M) = \tilde{A}M + MA$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme f de T. Calculer la trace de f en fonction de la trace de A.

41. — Montrer qu'il existe une infinité de matrices (2, 2) dont les éléments sont des entiers relatifs et dont le déterminant est 1. L'une de ces matrices, A, est dite d'ordre fini, s'il existe un entier positif p tel que $A^p = I$; montrer que, pour une telle matrice on a $A^{12} = I$.

42. — Pour chacune des matrices suivantes, trouver une matrice triangulaire semblable :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

INDEX ALPHABÉTIQUE

(Les chiffres renvoient aux pages)

A

abaissement des équations . . . 253
abélien (groupe —) 48
additive (notation — d'un groupe). . 51
affixe 136
D'Alembert (théorème de —). . . . 210
algèbre. 300
— des endomorphismes de E . . . 442
— des matrices (n, n). 445
— des polynômes à une indéterminée 300
analyse combinatoire. 78
anneau. 68
— commutatif. 68
— des entiers relatifs. 68
— intègre (ou d'intégrité). 69
— ordonné 69
— quotient. 71
— unitaire 68
antisymétrie d'une relation binaire. . 12
application. 18
— alternée 382
— bijective. 22
— composée 24
— identique. 19
— injective. 22
— involutive 26
— linéaire 324
— multilinéaire 376
— réciproque 23
— surjective 22
— transposée 372
archimédien 67
argument d'un nombre complexe. . . 135
arrangement 78
assertion. 1
associativité 30
automorphisme. 35
— d'un groupe. 54
— d'un espace vectoriel. 443
axiome. 1

B

barycentre 120
base d'un espace vectoriel 313
— canonique 314
— duale 369
— incomplète (théorème de la —) . 318
Bezout (égalité de —) 188
bidual. 380
bijection. 22
binôme (formule du —) 91
borne supérieure, inférieure. 16

C

caractéristique d'un anneau 69
— d'un corps 72
— (équation — d'une matrice ou d'un endomorphisme) 466
cardinal (— d'un ensemble). 42
Cayley (théorème de —) 82
Cayley-Hamilton (théorème de —). . 482
changement de base. 452

classe d'équivalence 13
clôture algébrique 211
codimension 322
cofacteur d'un élément d'un déterminant 394
colonne d'une matrice 341
comatrice 394
combinaison 88
commutativité 29
complémentaire d'une partie 8
composition des applications 24
conjugué d'un nombre complexe . . 133
corps 71
— algébriquement clos 211
— des complexes 130
— des fractions d'un anneau . . . 73
— des rationnels 72
Cramer (système de —) 423

D

décomposition en éléments simples . 225
— d'un polynôme en facteurs premiers 193
degré d'une équation algébrique . . 237
— d'un polynôme 165
demi-groupe 55
dénombrable (ensemble —) 43
dérivée d'un polynôme 199
déterminant 387
— adjoint 394
— caractéristique 428
— d'un endomorphisme 458
— d'une matrice carrée 387
— principal d'un système linéaire . . 427
diagonale principale d'une matrice . . 357
diagonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice 468
diagramme 24
dimension d'un espace vectoriel . . . 314
distributivité 33
diviseur de zéro 69
division euclidienne 172
— suivant les puissances croissantes. 179
droite (— d'un espace vectoriel) . . . 322
dual d'un espace vectoriel 367

E

égalité 5
élément générique 6
— invariant 19
— neutre 31
— régulier 32
— simple (— d'une fraction rationnelle) 224
— symétrisable 32
élimination 237
endomorphisme 35
— diagonalisable 468
— d'un espace vectoriel . . . 324, 442
— d'un groupe 54
— nilpotent 488
ensemble 5
— dénombrable 43
— des indices 10
— des opérateurs 34
— des parties 7
— fini 41
— naturel 40
— ordonné 15
— quotient 13
— vide 9
ensembles disjoints 9
— équipotents 23
entiers naturels 39
— relatifs (ou rationnels) 59
équation 20
— algébrique 237
— réciproque 254
équations linéaires (système d' —) . . 420
équivalence (relation d' —) 13
espace ponctuel 108
— vectoriel 296
— — quotient 309
et 4
Euclide (algorithme d' —) 184
extension algébrique d'un corps . . . 194

F

factorielle 80
factorisation canonique d'une application 27
— — — linéaire 336
— — d'un homomorphisme . . . 38
— — — de groupes 55
famille indexée d'ensembles 10
fonction 18
forme bilinéaire 377
— linéaire 367
— multilinéaire 377
formule du binôme 91
fraction rationnelle 217
— — symétrique 219

G

Gauss (théorème de —). 187
générateur (système — d'un espace vectoriel). 312
graphe (— d'une relation binaire) . 11
groupe. 46
— abélien ou commutatif 48
— alterné. 88
— linéaire 443
— quotient. 51
— symétrique. 81

H

homomorphisme 34
— d'anneaux, de corps 74
— de groupes. 54
— d'espaces vectoriels 324
homothétie (— d'un espace vectoriel). 326
hyperplan (— d'un espace vectoriel). 322

I

idéal. 70
— à droite (resp. à gauche) . . . 71
— bilatère 71
— principal. 184
image d'une application linéaire . 329
— par une application 18
— réciproque 22
implication. 2
inclusion. 6
indépendance linéaire 302
indéterminée 166
injection. 22
intersection. 8
intervalle. 17
inverse. 51
— d'une matrice carrée régulière . 403
inversion dans une permutation . . 86
isomorphisme. 35
— de groupes 54
— d'espaces vectoriels 327
— pour l'ordre. 39

K

Kronecker (symbole de —). 347

L

Lagrange (polynôme d'interpolation de —) 190
libre (système — de vecteurs). . . . 302
lié (système — de vecteurs) 302
ligne d'une matrice 341
loi externe 34
— interne. 28
— — associative. 30
— — commutative. 29
— — distributive. 33
loi quotient. 38

M

majorant. 16
matrice 341
— antisymétrique 357
— carrée 341
— — régulière. 400
— de passage 452
— diagonale. 358
— diagonalisable. 469
— de Jordan 491
— nulle. 342
— scalaire 446
— substitution 450
— symétrique. 357
— transposée d'une matrice . . . 342
— triangulaire. 357
— unicolonne (resp. uniligne) . . . 341
— unité 347
matrices équivalentes 455
— semblables. 457
maximal. 17
mineur. 394
minimal 17
minorant. 16
module d'un nombre complexe . . . 134
— sur un anneau 195
Moivre (formule de —). 156
monôme. 170
multiplicative (notation — d'un groupe) 51

N

naturel (ensemble —). 40
négation d'une proposition. 4
Newton (formules de —). 208

nombres complexes 127
— — conjugués 133
— rationnels 63
notation additive (resp. multiplicative) d'un groupe. 51
noyau d'une application linéaire . . 333
— d'un homomorphisme de groupes. 54

O

opérateur (dans une loi externe) . . 34
opposé. 51
ordre (relation d' —). 14
— de multiplicité d'un pôle. . . . 225
— — d'un zéro. 208
— d'un déterminant 388
— d'une matrice carrée. 341
orientation d'un espace vectoriel réel. 454
ou. 4

P

parité d'une permutation. 86
partie d'un ensemble. 6
— entière d'une fraction rationnelle. 220
— génératrice d'un espace vectoriel. 302
— invariante par une application. 19
— stable par une application. . . . 19
— — pour une loi interne 29
partition. 11
Pascal (triangle de —). 90
permutation 79
P. G. C. D.'. 182
plan complexe 136
plan (— d'un espace vectoriel). . . . 322
polaire (partie —). 225
pôle d'une fraction rationnelle . . . 225
polynôme à une indéterminée 166
— à plusieurs indéterminées. . . . 195
— caractéristique 466
— dérivé. 108
— irréductible (ou premier). . . . 192
— minimal d'un endomorphisme . 183
— normalisé (ou unitaire) 171
— symétrique. 205
polynômes premiers entre eux. . . . 185
— symétriques élémentaires. . . . 205
— — simples 205
P. P. C. M.. 191
prédécesseur 18
produit cartésien d'ensembles. . . . 7
projection 309
proposition. 1
proposition équivalente 2

Q

quantificateur 4

R

racine d'une équation 20
n-ième dans C 144
— — de l'unité. 145
rang d'une application linéaire . . . 332
— d'une forme bilinéaire 460
— d'une matrice. 375, 407
— d'un système d'équations linéaires 427
— d'un système de vecteurs. . . . 305
rationnels 63
recouvrement. 11
récurrence 41
réflexivité d'une relation binaire. . . 12
relation binaire 11
— d'équivalence. 12
— d'ordre. 14
restriction d'une application 19
résultant de deux polynômes 241
réunion 7
Rouché et Fontené (théorème de —). 429

S

Sarrus (règle de —) 281
scalaire (pour un espace vectoriel). . 296
segment 17
signature (d'une substitution) . . . 86
somme de sous-espaces vectoriels . . 307
— directe. 308
sous-anneau 68
sous-corps 72
sous-ensemble. 6
sous-espace vectoriel. 301
— — propre. 462
sous-espaces supplémentaires. . . . 308
sous-groupe. 49
— distingué (ou invariant) 53
— monogène 63

spectre (— d'un endomorphisme) . . 466
structure algébrique 34
— quotient 38
substitution 80
successeur 17
suite 44
surjection 22
Sylvester (déterminant de —) 243
symétrie d'une relation binaire 12
symétrique d'un élément symétrisable 32
symétrisation d'un demi-groupe . . . 55
système d'équations linéaires 420
— linéaire homogène 420

T

Taylor (formule de —) 201, 203
théorème 2
trace d'un endomorphisme ou d'une matrice 467
transitivité d'une relation binaire . . 12
transformation d'une équation algébrique 250
transport d'une loi 35
transposée d'une matrice 342
transposition 83
triangularisation 478

V

valeur absolue 67
— propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée 461
valuation d'un polynôme 166
Vandermonde (déterminant de —) . . 397
vecteur d'un espace vectoriel 296
— colonne (resp. ligne) 343
— propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée 462

Z

zéro d'un polynôme 208

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. — *Définitions générales* 1

I. Notions de logique 1
II. Ensembles 5
III. Relations binaires 11
IV. Applications. Équations 18
V. Lois de composition 28
VI. Les entiers naturels 39

Exercices 45

CHAPITRE II. — *Groupes. Anneaux. Corps* 46

I. Structure de groupe 46
II. Les entiers relatifs. Les nombres rationnels 55
III. Structures d'anneau et de corps 68

Exercices 76

CHAPITRE III. — *Analyse combinatoire* 78

I. Arrangements. Permutations 78
II. Substitutions 80
III. Combinaisons. Formule du binôme 88

Exercices 96

CHAPITRE IV. — *Notions élémentaires sur les vecteurs* 98

I. Rappel des définitions 98
II. Opérations élémentaires sur les vecteurs libres 100
III. Espaces vectoriels. Espaces ponctuels 107
VI. Barycentre 120

Exercices 126

CHAPITRE V. — *Nombres complexes* 127

I. Définition. Opérations 127
II. Forme trigonométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique 133
III. Racines n-ièmes d'un nombre complexe 141
IV. Applications géométriques des nombres complexes 147
V. Compléments de calcul trigonométrique 155

Exercices 160

CHAPITRE VI. — *Polynômes* 164

I. Fonctions polynômes 164
II. Introduction des polynômes à une indéterminée 166
III. Division euclidienne 172
IV. Divisions suivant les puissances croissantes 179
V. Plus grand commun diviseur. 182
VI. Polynômes premiers sur le corps K 192
VII. Introduction des polynômes à plusieurs indéterminées. 195
VIII. Dérivation. Formule de Taylor. 199
IX. Réduction des polynômes sur les corps C et R 208

Exercices. 215

CHAPITRE VII. — *Fractions rationnelles*. 217

I. Décomposition en éléments simples. 217
II. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur le corps des complexes et sur celui des réels. 225

Exercices. 235

CHAPITRE VIII. *Équations algébriques* 237

I. Élimination. 237
II. Relations entre les coefficients et les zéros d'un polynôme. 244
III. Polynômes symétriques. 249
IV. Transformation des équations 250
V. Équations de la division des arcs. 257

Exercices. 261

CHAPITRE IX. — *Algèbre linéaire du second et du troisième ordres*. 266

I. Algèbre linéaire du second ordre. 266
II. Algèbre linéaire du troisième ordre. 274
III. Systèmes de deux ou trois équations linéaires à deux ou trois inconnues. 287

Exercices. 294

CHAPITRE X. — *Espaces vectoriels* 296

I. Définition. Sous-espaces vectoriels 296
II. Espaces vectoriels de dimension finie 312

Exercices. 322

CHAPITRE XI. — *Applications linéaires* 324

I. Définition. Opérations. 324
II. Image. Noyau. Rang 329

Exercices. 338

CHAPITRE XII. — *Matrices*. 341

I. Représentation de vecteurs et d'applications linéaires. 341
II. Opérations sur les matrices. 349

Exercices. 363

CHAPITRE XIII. — *Formes linéaires, bilinéaires* 367

I. Formes linéaires 367
II. Applications multilinéaires. Formes bilinéaires 376

Exercices. 381

CHAPITRE XIV. — *Déterminants* 382

I. Forme n-linéaire alternée 382
II. Propriétés des déterminants. 387
III. Indépendance de n vecteurs à l'aide des déterminants 398
IV. Détermination pratique du rang à l'aide des déterminants. 407

Exercices. 415

CHAPITRE XV. — *Équations linéaires* 420

I. Généralités 420
II. Système de Cramer. 423
III. Cas général : n équations linéaires à p inconnues. 426

Exercices. 439

CHAPITRE XVI. — *Endomorphismes d'un espace vectoriel. Matrices carrées* . . 442

I. Endomorphismes d'un espace vectoriel 442
II. Matrices carrées 445
III. Matrices équivalentes, semblables, congruentes 452
IV. Diagonalisation. Triangularisation 460

Exercices. 492

INDEX ALPHABÉTIQUE. 499

MASSON ET Cie, ÉDITEURS,
Libraires de l'Académie de Médecine
120, boulevard Saint Germain, Paris VIe
4e trimestre 1970.
11

Imprimé en France par Brodard-Taupin
Imprimeur-Relieur, Coulommiers-Paris, 3132-2

70279